

Soluzioni Tutorato Analisi 1: Foglio 4

Alessandro Tamai e Riccardo Caniato

4 novembre 2018

Esercizio 1

i) Consideriamo il numero complesso

$$z = \frac{(3+2i)^3 - (2+i)^2}{(1+2i)^2 - (1-i)^3}$$

Per determinarne parte reale ed immaginaria, dobbiamo cercare di riformulare z in modo che al denominatore sia presente un numero reale. Ricordiamo che il modulo quadro di un numero complesso $\eta \in \mathbb{C}$ è dato da

$$|\eta|^2 = \eta \cdot \bar{\eta}$$

e $|\eta|^2 \in \mathbb{R}$. Per eliminare la componente immaginaria del denominatore di z , possiamo quindi moltiplicare e dividere z per il coniugato del suo denominatore. Esplicitandolo,

$$(1+2i)^2 - (1-i)^3 = 6i - 1$$

Da cui

$$z = \frac{(3+2i)^3 - (2+i)^2}{6i-1} = \frac{(3+2i)^3 - (2+i)^2}{6i-1} \cdot \frac{6i+1}{6i+1} = \frac{[(3+2i)^3 - (2+i)^2](6i+1)}{37}$$

Sviluppando il numeratore si riesce quindi a determinare con semplici passaggi algebrici la parte reale ed immaginaria di z .

ii) Determiniamo la parte reale e la parte immaginaria di

$$z = \frac{(1-i)^9}{(1+i)^7}$$

Osserviamo che

$$i(1-i) = i - i^2 = i + 1$$

Se moltiplichiamo e dividiamo z per i^9 otteniamo allora

$$z = \frac{(1-i)^9}{(1+i)^7} \frac{i^9}{i^9} = \frac{[i(1-i)]^9}{i^9(1+i)^7} = \frac{(1+i)^9}{i^9(1+i)^7} = \frac{(1+i)^2}{i^9}$$

Ma,

$$i^9 = i^8 \cdot i = i$$

in quanto $i^8 = (-1)^4 = 1$. Otteniamo così che

$$z = \frac{(1+i)^2}{i} = \frac{2i}{i} = 2$$

Concludiamo quindi che $Im(z) = 0$ e $Re(z) = 2$.

Esercizio 2

iii) Consideriamo il numero complesso

$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$$

Vogliamo scriverlo in forma trigonometrica. Per prima cosa dobbiamo scriverlo nella forma $z = x + iy$ con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Moltiplichiamo e dividiamo per $(1 - i)$; otteniamo

$$z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

L'espressione di numero complesso $\eta \in \mathbb{C}$ in forma trigonometrica è del tipo

$$\eta = |\eta| [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$. Nel nostro caso

$$|z| = \sqrt{2}$$

Esprimiamo quindi z come

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = \sqrt{2} \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right)$$

Dobbiamo ora determinare l'angolo $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\cos(\theta_0) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \sin(\theta_0) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

ovvero per cui

$$\tan(\theta_0) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

Da cui

$$\theta_0 = \arctan \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \right)$$

che porta all'espressione trigonometrica di z

$$z = \sqrt{2} [\cos(\theta_0) + i \sin(\theta_0)]$$

Esercizio 3

i) Risolviamo l'equazione

$$\frac{z - 1}{z - i} = 1$$

Essa è equivalente a

$$z - 1 = z - i$$

che porta alla relazione

$$-1 = -i$$

e dunque non ammette soluzione.

ii) Consideriamo l'equazione

$$z^2 + \bar{z} = 0$$

Esprimendo $z = x + iy$ possiamo riformularla come

$$(x + iy)^2 + x - iy = 0$$

ovvero

$$(x^2 - y^2 + x) + i(2xy - y) = 0$$

Affinchè tale numero complesso sia nullo, devono essere nulle la sua parte reale ed immaginaria. L'equazione in $\mathbb{C}$ si riduce quindi ad un sistema di due equazioni in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Osserviamo che se $x = 0$, si ottiene la condizione $y = 0$, da cui la prima soluzione $z_1 = (0, 0)$. Invece per $y = 0$ otteniamo nella seconda equazione un'identità mentre nella prima l'equazione algebrica

$$x(x + 1) = 0$$

da cui per $x = 0$ si ritrova la soluzione z_1 mentre per $x = -1$ la soluzione $z_2 = (-1, 0)$. Supponiamo ora che $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Dalla seconda equazione si ricava $x = \frac{1}{2}$ che sostituita nella prima rende

$$y^2 = \frac{3}{4}$$

la quale porta alle due soluzioni

$$z_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad z_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Esercizio 4

iii) Consideriamo l'insieme

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + 1| \geq \operatorname{Im}(i - z) \right\}$$

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è elemento di G se e solo se

$$|z + 1| \geq \operatorname{Im}(i - z)$$

Ponendo $z = x + iy$ otteniamo

$$|x + 1 + iy| \geq -x + i(1 - y)$$

ovvero

$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \geq (1 - y)$$

Osserviamo che il primo membro di tale disequazione è positivo, dunque la relazione è sempre verificata se $1 - y \leq 0$ ovvero $y \geq 1$. Questo significa che tutta la porzione E_1 di $\mathbb{C}$ con $y \geq 1$, ovvero tutti i punti sopra la retta $y = 1$, appartiene a tale insieme. Invece, se $y \leq 1$, il secondo membro dell'equazione è positivo, da cui

$$(x + 1)^2 + y^2 \geq (1 - y)^2$$

Sviluppando i quadrati otteniamo

$$y^2 \geq -\frac{x^2}{2} - x$$

Il secondo membro è una parabola rivolta verso le y negative; tutti i punti sopra tale parabola, indichiamo tale insieme con E_2 , saranno punti di G ; concludiamo così che

$$G = E_1 \cup E_2$$

Esercizio 5

Vogliamo determinare il minimo $m \in \mathbb{N}$ con $m > 0$ tale che

$$(1+i)^m$$

sia un numero reale. Ricordiamo che $z \in \mathbb{C}$ è reale se e solo se

$$z = \bar{z}$$

Nel nostro caso, quindi, $(1+i)^m$ è un numero reale se e solo se

$$(1+i)^m = \overline{(1+i)^m} = \overline{(1+i)}^m = (1-i)^m$$

ovvero se e solo se

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$$

ma,

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^m = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^m = i^m$$

Dobbiamo quindi cercare il minimo m per cui $i^m = 1$. Osserviamo che

$$i^{2n} = (-1)^n$$

ed è quindi uguale ad 1 per n pari, ovvero il minimo n è $n = 2$, da cui ricaviamo $m = 4$.

Esercizio 6

Risolviamo l'equazione

$$z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esprimendo $z = x + iy$ otteniamo

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Ovvero l'equazione diventa

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Eguagliando parte reale ed immaginaria, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{2} \\ 2xy = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Dalla seconda equazione ricaviamo le condizioni $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Possiamo quindi dividere la seconda equazione per y e ricavare

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4y}$$

Sostituendo tale relazione nella prima equazione, otteniamo così

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4y}\right)^2 - y^2 = -\frac{1}{2}$$

Che possiamo riformulare come

$$16y^4 - 8y^2 - 3 = 0$$

ovvero

$$(2y)^4 - 2(2y)^2 - 3 = 0$$

Ponendo ora $h = 2y^2$ otteniamo l'equazione in h

$$h^2 - 2h - 3 = 0$$

le cui soluzioni portano alle soluzioni del problema di partenza.