

Esercizi n.5

key words: Distanza in $\mathbb{R}$. Intorno centrato in $x_0 \in \mathbb{R}$. Intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$. Intorno di $+\infty$ e di $-\infty$. Punto interno a $E \subseteq \mathbb{R}$. Interno di E . Punto di frontiera per $E \subseteq \mathbb{R}$. Frontiera di E . Punto esterno a $E \subseteq \mathbb{R}$. Insiemi aperti. Insiemi chiusi. Punti di aderenza a $E \subseteq \mathbb{R}$. Chiusura di E . Proprietà dell'interno e della chiusura. Punti di accumulazione per $E \subseteq \mathbb{R}$. Derivato E . Teorema di Bolzano-Weierstrass.

1) Calcolare la distanza delle seguenti coppie di numeri reali

$$1, 4, \quad \frac{1}{2}, -7, \quad x, x^2, \text{ per } x \geq 2.$$

2) Dire, per ciascun insieme di seguito specificato, di quali punti di $\mathbb{R}$ tale insieme è intorno.

$$[2, 4], \quad]2, 5[, \quad [1, 3[\setminus \{2\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \geq |2x+1|\}, \\ \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup]-\infty, \frac{1}{2}[, \quad \mathbb{Q} \cap]-1, 1[, \quad \{\frac{2p}{q^2} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*\}.$$

3) Per ciascun insieme di seguito specificato, determinare l'interno, la frontiera e l'interno del complementare.

$$[3, 5], \quad [2, 7[, \quad [1, 3] \setminus \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \frac{|x+1|}{x+2} \geq 1\}, \\ \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \mathbb{Q} \cap [0, +\infty[, \quad \{\frac{p\sqrt{2}}{q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*\}.$$

4) Provare che

- se $E \subseteq \mathbb{R}$ allora $\overset{\circ}{E} \cup \partial E \cup \overset{\circ}{CE} = \mathbb{R}$
- se $E \subseteq \mathbb{R}$ allora $\overset{\circ}{E} \cap \partial E = \emptyset$
- se $E \subseteq \mathbb{R}$ allora $\partial E = \partial(CE)$
- se x è esterno all'insieme A e $B \subseteq A$, allora x è esterno a B .

5) Per ciascun insieme di seguito specificato, dire se è aperto o se è chiuso ed eventualmente determinarne la chiusura e il derivato. Stesse domande per gli insiemi degli esercizi 2 e 3.

$$]2, 7[, \quad]2, 5], \quad [1, 3] \cap \mathbb{Q}, \quad \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].$$