

Esercizi n.10

key words: Teorema degli zeri e dei valori intermedi. Punti di massimo e punti di minimo. Valori massimo e minimo. Teorema di Weierstrass. Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine.

1) Provare che

- esistono funzioni continue che mandano intervalli chiusi in intervalli aperti;
- esistono funzioni continue che mandano intervalli aperti in intervalli chiusi;
- esistono funzioni continue che mandano intervalli limitati in intervalli illimitati;
- esistono funzioni continue che mandano intervalli illimitati in intervalli limitati;

2) Sia I un intervallo chiuso e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che se $f(I)$ è aperto allora I può essere inferiormente o superiormente limitato ma non entrambe le cose.

3) Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si supponga che $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Provare che f ha massimo e minimo assoluto. Mostrare con un esempio che non è detto che li abbia entrambi se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si supponga che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Provare che f ha minimo assoluto.

5) Provare che

- una funzione uniformemente continua manda insiemi limitati in insiemi limitati;
- esistono funzioni continue che mandano insiemi limitati in insiemi non limitati.

6) Provare che

- una funzione continua manda successioni convergenti in successioni convergenti;
- una funzione uniformemente continua manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy;
- esistono funzioni continue che mandano successioni di Cauchy in successioni che non sono di Cauchy.