

Esercizi n.11

key words: Derivata di f in x_0 , funzione derivabile in x_0 . Derivabilità e continuità. Punti stazionari. Punti di minimo e massimo locale. Teorema di Fermat. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange. Crescenza e derivate. Regola di de l'Hôpital.

1) Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \sin^2 x, \quad \sin x^2, \quad \sin(\tan x), \quad e^{\cos x}, \quad \sqrt{e^{\sqrt{x}}},$$
$$\arcsin(\sqrt{x^2 + 1}), \quad \log(\arctan x), \quad (x + 1)^{x-1}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

2) Si dica per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua e per quali è derivabile, se

$$f = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta & \text{per } x > 0, \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

3) Data la funzione f , si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto x_0 a fianco riportato:

$$f(x) = x\sqrt{x}, \quad x_0 = 1;$$

$$f(x) = e^x + x, \quad x_0 = 0;$$

$$f(x) = \arcsin x, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

4) Si consideri una semicirconferenza di raggio R e si considerino i rettangoli aventi un lato contenuto nel diametro e che siano inscritti nella semicirconferenza. Si trovino il rettangolo di diametro massimo e quello di area massima.

5) Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio R si trovi quello di volume massimo.

I seguenti 3 esercizi sono la versione dei teoremi di Rolle, Cauchy e de l'Hôpital nel caso dell'intervallo $[a, +\infty[$.

6) Si provi che data $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continua su $[a, +\infty[$, derivabile su $]a, +\infty[$ e tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$, esiste $\xi \in]a, +\infty[$ tale che $f'(\xi) = 0$.

7) Siano $f, g :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabili su $]a, +\infty[$. Supponiamo che per ogni $x \in]a, +\infty[$, $g'(x) \neq 0$ e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$, con $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Si dimostri che esiste $\xi \in]a, +\infty[$ tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{L_1 - f(a)}{L_2 - g(a)}.$$

8) Siano $f, g :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabili su $]a, +\infty[$. Supponiamo che per ogni $x \in]a, +\infty[$, $g'(x) \neq 0$ e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Si dimostri che se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste e vale $L \in \mathbb{R}$ allora anche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste e vale L .

I seguenti esercizi sono tutti tratti dai compiti d'esame a partire dall'anno accademico 2014/15.

9) Si calcolino i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - \sin x}{3x^2}, \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+1}}, \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x^2}{\cos(e^x - 1) - 1}; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x^4}{\cos x^{-2} - 1}, \quad & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi - 2 \arcsin x}{\sin \sqrt{1-x}}, \quad & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi - \arccos x}{\log x}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x^2 - x^2}{\cos x^3 - 1}, \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2})^4}{(\tanh x^4)^3}, \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sin x + 3)^3}{\sqrt{2x-1}}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{\sin x + 2}, \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{x-1} - 1 - x^2}{(\sin^3(x-1))}, \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1 - x)}{\cos(e^x - 1) - 1}. \end{aligned}$$

10) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0.$$

Si dimostri che esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $f'(\xi) = 1$.

11) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Si dimostri che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

12) Sia $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Si dimostri che esiste $\xi \in]0, 1[$ tale che $f'(\xi) = 0$. Più in generale si dimostri che la funzione derivata $f' :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva.

13) Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2.$$

Si dimostri che esiste $\xi \in]0, +\infty[$ tale che $f'(\xi) = -1$.

14) Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0.$$

Si dimostri che esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.