

Esercizi n.12

key words: Derivate successive. Funzioni di classe $\mathcal{C}^m$ e di classe $\mathcal{C}^\infty$. Funzioni convesse. Punti di flesso. Formula di Taylor. Studio di funzioni.

1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0.$$

Provare che se è convessa allora f è l'identità.

2) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Provare che se è convessa allora f è decrescente.

3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^4$ tale che

$$f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, f''''(x) \geq 0.$$

Provare che è convessa.

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Provare che f è decrescente.

5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^3$ tale che

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'''(x) > 0.$$

Provare che f è strettamente crescente.

6) Scrivere la formula di Taylor fino all'ordine n , nel punto x_0 , con resto di Lagrange per:

- $f(x) = e^{2x^2}$, $n = 2$, $x_0 = 1$.
- $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = \sqrt{2}$.
- $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$, $n = 2$, $x_0 = \log 2$.
- $f(x) = \sin x^2$, $n = 3$, $x_0 = \sqrt{\pi}$.
- $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + \cos x$, $n = 4$, $x_0 = 0$.
- $f(x) = \log x^2$, $n = 4$, $x_0 = \sqrt{e}$.

7) Studiare le seguenti funzioni, determinando dominio, segno, caratteristiche di regolarità e simmetria (dire eventualmente se si tratta di funzione pari o dispari, periodica e di quale periodo, continua, derivabile, di classe $\mathcal{C}^m$ o $\mathcal{C}^\infty$ eccetera), limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivata prima, intervalli di crescita e decrescenza, massimi e minimi, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, punti di flesso. Disegnare un grafico approssimativo.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad f(x) = \frac{xe^x}{x - 1}, \quad f(x) = \arccos(2 + \cos x),$$

$$f(x) = \frac{2x^3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}, \quad f(x) = \frac{(x - 2)^3}{1 - x^2}, \quad f(x) = x^2(\log(|x|) - 1),$$

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 4}, \quad f(x) = x + \frac{e^x}{e^x - 1}, \quad f(x) = \arctan(2x) - \arctan x,$$

$$f(x) = \frac{1}{(\log x)^2} - \frac{2 - \log x}{\log x}, \quad f(x) = \frac{x\sqrt{x + 3}}{x + 2}, \quad f(x) = \frac{e^{|x|+1} + 1}{e^{|x|+1} - 1}.$$