Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2024-2025, appello autunnale.

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. $\mathrm{Den} = x^{\frac14} - 2(x+o(x))^{\frac14} = x^{\frac14}\left(1-2(1+o(1))^{\frac14}\right) = x^{\frac14}(1-2+o(1)) = -x^{\frac14}(1+o(1))$

• (4 punti) Si calcoli $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\log\left(e^{4x^{-5/8}}(1+2x^{1/4})+e^{3x^{7/4}}\right) - \frac{4}{(3(\tan(x)-x))^{5/24}}}{x^{1/4}-2(\sin x)^{1/4}}$

$$\mathrm{Num} = \lg\left[e^{4x^{-\frac58}}\left((1+2x^{\frac14})+e^{3x^{\frac74}-4x^{-\frac58}}\right)\right] - \frac{4}{\left(\cancel{3}\left(\cancel{x}+\frac{x^3}{\cancel{3}}+o(x^3)-\cancel{x}\right)\right)^{5/24}} =$$

$$= 4x^{-\frac58} + \lg\Big(1+2x^{\frac14}+\underbrace{e^{3x^{\frac74}-4x^{-\frac58}}}_{o(x)}\Big) - \frac{4}{x^{5/8}\,(1+o(x^3))^{5/24}}$$

$$= \cancel{4x^{-\frac58}} + 2x^{\frac14}+o(x^{\frac14}) - \cancel{\frac{4}{x^{5/8}}} + \underbrace{\frac{1}{x^{\frac58}}\,O(x^3)}_{O\left(x^{\frac{19}{8}}\right)}$$

$$\lim_{x\to0^+} = \frac{2x^{\frac14}}{-x^{\frac14}} = -2$$

• (2 punti) si calcoli $\lim_{x\to0^+} \int_x^{3x} \dfrac{e^t-1}{1-\cos(t)}dt$;

$$\int_x^{3x} \frac{t+o(t)}{\frac{t^2}{2}+o(t^3)} = 2\int_x^{3x} \frac{1+o(1)}{t(1+o(t))} =$$

$$= 2\int_x^{3x} \frac1t(1+o(1))\,dt = 2\lg(3)+o(1) \xrightarrow{x\to0^+} 2\lg 3.$$

• (2 punti) si calcoli $f'(x)$ per $f(x) := \int_{x^2}^{\log|x-1|}(1+t^2)\,dt$.

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}\left(1+\lg^2|x-1|\right) - 2x\lg(1+x^4)$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 2}$$

• si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio;

$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \frac{3}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

• si calcoli $f'(x)$, si trovino punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+2) - (x^2-x+1)}{(x+2)^2} = \frac{(\cancel{2}x^2+3x-2) - (\cancel{x^2}-x+1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+4x-3}{(x+2)^2} \qquad x^2+4x-3=0 \qquad x_{\pm} = -2 \pm \sqrt{4+3} = -2 \pm \sqrt{7}$$

• si calcoli la derivata seconda e si studi concavita e convessita;

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x-3)\,2(x+2)}{(x+2)^4} = 2\,\frac{(x+2)^2 - (x^2+4x-3)}{(x+2)^3} =$$

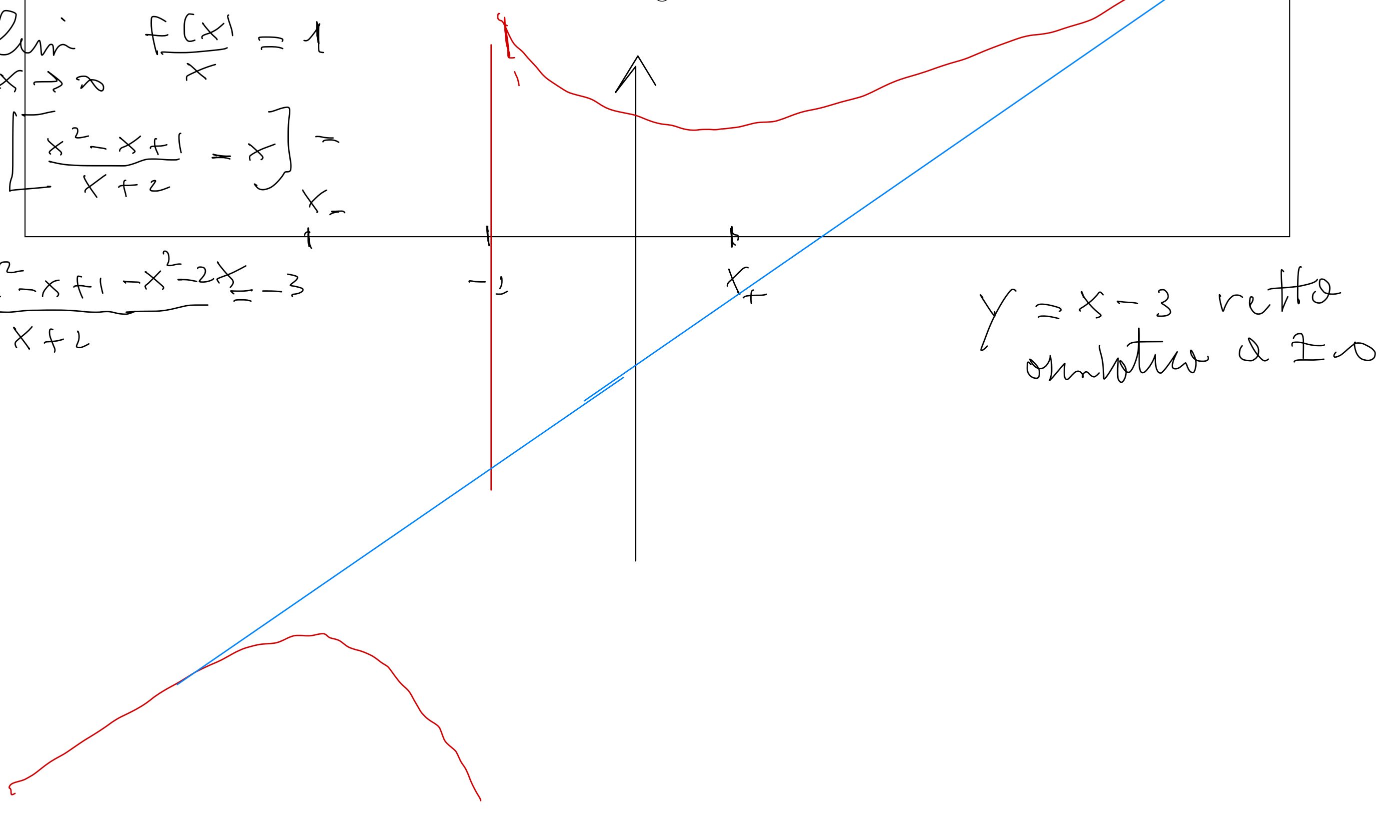
$$= 2\,\frac{\cancel{x^2}+\cancel{4x}+4 - (\cancel{x^2}+\cancel{4x}-3)}{(x+2)^3} = 2\,\frac{7}{(x+2)^3} = \frac{14}{(x+2)^3}$$

convessa per $x > -2$, concava per $x < -2$

• si trovino le eventuali rette asintotiche e si tracci il grafico .

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2-x+1}{x+2} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-x+1-x^2-2x}{x+2} = -3$$



$y = x - 3$ retta asintotica a $\pm\infty$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

- si calcoli $\int_1^{\infty} e^{-x}(x+1)dx$ $= - \int_1^{+\infty} (e^{-x})'(x+1)\,dx = -e^{-x}(x+1)\Big]_1^{+\infty}$

$+ \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = 2e^{-1} - e^{-x}\Big]_1^{+\infty} = 3e^{-1}$

- si calcoli le primitive di $\int \sin^2(2x)dx$; $\int \frac{1-\cos(4x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(4x)\,dx$

$= \frac{x}{2} - \frac{\sin(4x)}{8} + c$

- si stabilisca se $f(x) = e^{1/x}x^2$ e' integrabile in $(0,1]$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^3} = +\infty$

e siccome $\frac{1}{x} \notin L(0,1]$ segue per confronto asintotico

che $f \notin L(0,1]$

- si stabilisca se $\frac{1}{x\log^2 x}$ e' integrabile in $[2,+\infty)$.

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\lg^2 x}\,dx$ $\quad y = \lg x \quad dy = \frac{1}{x}\,dx$

$= \int_{\lg 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,dy = -y^{-1}\Big]_{\lg 2} = \frac{1}{\lg 2}$

cioè $\frac{1}{x\lg^2 x} \in L([2,+\infty))$

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli il polinomio di McLaurin di ordine 6 di $f(x) = \arctan(x^2 + x)$.

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 + o(y^5), \quad \arctan y = \int_0^y \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^y \left(1 - t^2 + t^4 + o(t^5)\right) dt = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + o(y^6)$$

$$f(x) = (x^2+x) - \frac{(x^2+x)^3}{3} + \frac{(x^2+x)^5}{5} + o(x^6$$

$$= x^2 + x - \frac{x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3}{3} + \frac{x^5 + 5x^6 + o(x^6)}{5} + o(x^6)$$

$$= x + x^2 - \frac{x^3}{3} - x^4 + \left(\frac{1}{5} - 1\right)x^5 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^6 + o(x^6)$$

$$= x + x^2 - \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + o(x^6)$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y = x$ con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.

$r^2 + 1 = 0 \qquad r = \pm i$

$y_h = A\cos x + B\sin x \qquad y_p = x$

$y = A\cos x + B\sin x + x$

$y(0) = 1 = A$

$y'(0) = -1 = B + 1$

$\Rightarrow A = 1 \qquad B = -2$