Lezione 1 (8/9/2025)

- Linguaggio naturale
- Teoria degli insiemi
- Relazioni
- Funzioni

Linguaggio naturale (della matematica)

Proposizioni: intuitivamente
sono "parti del discorso" a cui si può associare il valore di vero o falso.

proposizioni con p, q, r lettere minuscole

valori vero e falso con V e F

Esempi "Trieste è una città del FVG" p

" $\pi = 3,14$ " q ($3,14 \neq \pi = 3,1415 \ldots\ldots$

" Il leone è un animale domestico" r

"domani piove" non è (in generale) una proposizione.

Le proposizioni elementari vanno a costituire proposizioni complesse tramite l'uso dei connettivi logici

negazione $\neg$ $\quad \neg p$ si legge "non p"

unario

è individuato dalla tabella di verità

(dà il valore di V e F per la prop. composta a partire dai valori di V e F delle componenti)

p	$\neg p$
V	F
F	V

binari

congiunzione $\quad p \wedge q$ si legge "p e q"

p Vittorio è alto almeno 180 cm

q Vittorio pesa almeno 75 Kg

$p \wedge q$ " Vittorio è alto almeno 180 cm e pesa almeno 75 kg "

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

disgiunzione (non esclusiva) $\quad p \vee q$ si legge "p o q"
"p oppure q"

n è un numero pari

n è divisibile per 5

n è un numero pari oppure divisibile per 5

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

oss. $\neg(\neg p) = p$

$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$
$\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$
} leggi di De Morgan

es. $\neg(\neg p) = p$

$\boxed{\neg(p \wedge q)} = \boxed{(\neg p) \vee (\neg q)}$ } leggi di De Morgan
$\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$

tabella di verità

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

a "¬"

sono uguali!

tabella di v

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Implicazione materiale

$p \Rightarrow q$ si legge "p implica q" oppure "se p allora q"

doppia freccia

Es. p: piove
q: prendo l'ombrello

$p \Rightarrow q$ significa "se piove allora prendo l'ombrello"

che cosa significa $\neg(p \Rightarrow q)$
$\neg$(se piove allora prendo l'ombrello)
è piove e non prendo l'ombrello

definiamo $\neg(p \Rightarrow q)$ come $p \wedge \neg q$

quindi $p \Rightarrow q$ è definito come $\neg(p \wedge \neg q)$
$\parallel$
$\neg p \vee q$

conclusione

$p \Rightarrow q$ è definito come $\neg p \vee q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

È importante rendere che
$\neg(p \Rightarrow q)$ è equiv. a $p \wedge \neg q$

Es

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

significa

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x,$

$$\underbrace{0 < |x-1| < \delta}_{p} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-2| < \varepsilon}_{q}$$

$p \Rightarrow q$

cosa significa che
non è vero che $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$?

cioè cosa significa
$\neg \left(\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \right)$?

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x :$

$\neg (p \Rightarrow q) \qquad p \wedge \neg q$

$0 < |x-1| < \delta \quad \wedge \quad |f(x)-2| > \varepsilon$

---

doppia implicazione $\qquad p \Leftrightarrow q$

si legge
"p se e solo se q"

è equiva $\quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Tabella

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esercizio

scrivere le tabelle di verità di

tautologie
- $p \vee (\neg p)$ $\qquad$ terzo escluso
- $\neg (p \wedge \neg p)$ $\qquad$ non contraddizione
- $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ $\qquad$ modus ponens
- $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ $\qquad$ modus tollens
- $(p \wedge ((p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r))) \Rightarrow q$

dim. per assurdo.

Predicati

Predicato: intuitivamente "è un oggetto che contiene una o più variabili (che assumono valori in un ambiente predefinito) che diventano proposizioni se le variabili vengono determinate"

Es. $P(x)$ significa "lo studente x è più alto di 180 cm".

$Q(x,y)$ = x è amico di y

$\tilde{Q}(x,y)$: $x \geq y$

un predicato diventa una proposizione < vera / falsa quando si attribuisce il valore alle variabili.

c'è un altro modo! per trasformare un predicato in proposizione.

QUANTIFICATORI

universale $\forall x,$ si legge "per ogni x"

esistenziale $\exists x:$ " " "esiste un x"

Es. $P(x)$: x è più alto di 180 cm

$\forall x, P(x)$ significa $\forall x$, vale $P(x)$ cioè tutti sono più alti di 1,80 m

$\exists x : P(x)$ significa esiste un x per cui vale $P(x)$, cioè c'è almeno uno più alto di 180 m.

$Q(x,y)$: lo studente x è amico della studentessa y

$\forall x, Q(x,y) = R(y)$

tutti gli studenti sono amici dello stud. y.

$\exists y : Q(x,y) = P(x)$