

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

$$\equiv$$

$$\neg p \vee p$$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

si dice la seguente è una tautologia

$$p \Rightarrow (p \wedge q)$$

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

non è una tautologia

$$(p \wedge (p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow q$$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge r$	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \wedge ((p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \wedge r))$	$(p \wedge ((p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \wedge r))) \Rightarrow q$
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	F	V

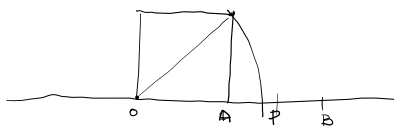
OK

Esempio di dim. per assurdo

Teo (Euclide)

non esistono due numeri interi m, n
(con $n > 0$) tali che $(\frac{m}{n})^2 = 2$

(cioè $\sqrt{2}$ non è un numero razionale)



minore OP
utilizzando OA
come unità di misura

dim. (per assurdo)

suffrago vero le proprietà dei numeri interi

suffrago falso la tesi

se ottengo una contraddizione ho finito

sufficiente assumere m e n in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
non interi > 0

$$t.c. \quad (\frac{m}{n})^2 = 2$$

non è restrittivo supporre che m e n siano
primi tra loro (se m e n non hanno fattori
in comune)

$$\text{ho } \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \text{cioè } m^2 = 2n^2$$

quindi 2 divide m^2 e quindi 2 divide m

$$\text{cioè } \exists k \text{ t.c. } m = 2k$$

$$\text{allora } m^2 = 4k^2$$

$$\text{allora } 2n^2 = 4k^2$$

$$\text{allora } n^2 = 2k^2$$

allora 2 divide n^2 ma allora 2 divide n

abbiamo 2 dividi m e 2 dividi n

PROBLEMA!

abbiamo detto che m e n non hanno
fattori in comune

ASSURDO

Predicati $P(x)$ predicato di x
 $R(x,y)$ relazione tra x e y
 eccetera.

- un predicato diventa proposizione se le variabili assumo
tutte un valore

- il predicato ha davanti un quantificatore

$\forall$ in legge "per ogni" q. universale
 $\exists$ in legge "esiste" q. esistenziale

$\forall x, P(x)$ significa $P(x)$ vale per tutti gli x

$\exists x: P(x)$ significa esiste almeno un x
per cui vale $P(x)$

come si fa la negazione di una frase con i quantificatori

$\neg (\forall x, P(x))$ è equivalente a $\exists x: \neg P(x)$

esempio lo studente x è più alto di 1,80m

$\forall x, P(x)$ "tutti sono più alti di 1,80m"

$\neg (\forall x, P(x))$ "almeno uno è più basso di 1,80m"

$\exists x: \neg P(x)$

ES. sia $M \subseteq \mathbb{R}$

$m \in \mathbb{R}$ m dice meno di M

$p \quad m \in M$
 $q \quad \neg \forall x \in M, x \leq m$

$p \wedge q$

m non è minimo $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

o $m \notin M$ o $m \in M$ ma
 $\exists x \in M: x > m$!

$\neg (\exists x: P(x))$ è equiv. a $\forall x, \neg P(x)$

queste regole si applicano tra loro.

$Q(x,y)$: l'astronomo x osserva la stella y

$\forall x, \exists y: Q(x,y)$

ogni astronomo osserva almeno una
stella

$\neg (\forall x, \exists y: Q(x,y))$

$$\neg (\forall x, \exists y : Q(x, y))$$



$$\exists x : \neg (\exists y : Q(x, y))$$



$$\exists x : \forall y, \neg Q(x, y)$$

non è vero che ogni estremo osserva almeno una stella

è
ente un estremo che non osserva nessuna stella

in ogni ospedale c'è un medico che ha sbagliato
tutte le diagnosi

è falso! cosa è vero?

$Q(x, y, z)$: nell'ospedale x , il medico y ,
ha sbagliato le diagnosi z

$$\forall x, \exists y : \forall z, Q(x, y, z)$$

$$\neg (\forall x, \exists y : \forall z, Q(x, y, z))$$

$$\exists x : \neg (\exists y : \forall z, Q(x, y, z))$$

$$\exists x : \forall y, \neg (\forall z, Q(x, y, z))$$

$$\exists x : \forall y, \exists z : \neg Q(x, y, z)$$

ente un ospedale in cui ogni medico ha
sbagliato almeno una diagnosi

Insieme

idea intuitiva : aggregato, famiglia, gruppo

la relazione fondamentale è

$$a \in A$$

↑
elemento

↑
"appartiene"

↑
insieme

significa "l'elemento a appartiene all'insieme A "
ovvero " a è elemento di A "

come si rappresenta un insieme?

1) si riuniscono tutti gli elementi, tra parentesi
grasse, separati da una virgola

$$A = \{1, 3, 5\}$$

2) considerare un insieme arbitrario e
scegliere un altro insieme come quello
degli elementi che soddisfanno una
proprietà

$$A = \{x \in B : P(x)\}$$

$$\text{es. } A = \{n \in \mathbb{N} : \underbrace{n \text{ dispari e } n \leq 5}_{P(n)}\}$$

$$= \{1, 3, 5\}$$

ES. voglio definire i numeri pari

$$\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k)\}$$

DD. Quando due insiemi sono uguali?
se hanno gli stessi elementi

$$A = B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

DD. se ho 2 insiemi e gli elementi del primo sono anche elementi del secondo
il primo è sotto-insieme del secondo

$$\text{ovvero } A \subseteq B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$\text{in particolare } A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

DD. conviene indicare che esista un insieme
che non ha elementi, lo chiamo
insieme vuoto

$$\text{di conseguenza } \begin{cases} \forall A \text{ insieme } \emptyset \subseteq A \\ \text{l'insieme vuoto è unico} \end{cases}$$

DD. ha senso considerare, dato A, tutti i suoi
sotto-insiemi

Questi formano, con elementi, un nuovo insieme
che chiamo insieme delle parti di A

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

$$\text{ES. } A = \{1, 3, 5\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$$

ES. se un insieme ha n elementi
quanti elementi ha $\mathcal{P}(A)$? 2^n

Sugli insiemi posso agire facendo

- intersezione $(\wedge)$ $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$

- unione $(\vee)$

- complementari $(\neg)$ $\complement_U A = \{x \in U : \neg(x \in A)\}$