

Variabili Aleatorie e Misurabilità

Variabili Aleatorie

- Idea:

- ▶ per un dato esperimento aleatorio rappresentato da Ω , si possono calcolare diverse **quantità, o enti, che dipendono dal risultato del esperimento**
- ▶ formalmente, si tratta di applicazioni

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	variabile aleatoria
$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$	vettore di variabili aleatorie
$X : \Omega \rightarrow E$	ente aleatorio a valori in E

- ▶ il vero $\omega \in \Omega$ che si realizza non è noto, quindi non è noto $X(\omega)$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Lancio di due dadi, definire le seguenti variabili aleatorie: risultato del primo e del secondo dado; somma, prodotto, massimo, minimo, scarto fra i due dadi
- Esercizio. Infiniti lanci di una moneta, definire le seguenti variabili aleatorie: $X_n = 1$ se esce T al lancio n -esimo, 0 altrimenti; T_n = numero di T nei primi n lanci; D_n = differenza tra il numero di T e C nei primi n lanci; C_n = numero massimo di T consecutive nei primi n lanci

Misurabilità

- Per varie ragioni, solo applicazioni **misurabili** possono essere considerate

▶ $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$ due spazi misurabili

▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ è $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ **misurabile** se

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ per ogni } A' \in \mathcal{F}'$$

↪ ogni controimmagine di insiemi in $\mathcal{F}'$ è in $\mathcal{F}$

▶ **controimmagine** di A' tramite f :

$$f^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A'\} \subset \Omega$$

Misurabilità

- [Commutabilità della controimmagine]

$f : \Omega \rightarrow \Omega', A' \subset \Omega', (A'_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \Omega'$

▶ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

▶ $f^{-1}(\Omega') = \Omega$

▶ $f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}$

▶ $f^{-1}(\cup_\alpha A'_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(A'_\alpha)$

▶ $f^{-1}(\cap_\alpha A'_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(A'_\alpha)$

Misurabilità

- Esercizio. Esempi/osservazioni su applicazioni misurabili
 - ▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ **applicazione costante**: fissato $\bar{\omega}' \in \Omega'$, $f(\omega) = \bar{\omega}'$ per ogni $\omega \in \Omega$; è sempre misurabile
 - ▶ $\Omega = \Omega'$, f **applicazione identica**: $f(\omega) = \omega$; quando è misurabile?
 - ▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ misurabile allora è anche $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$ misurabile per ogni $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{G}' \subset \mathcal{F}'$
 - ▶ ogni $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ è $2^\Omega/\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}/\{\emptyset, \Omega'\}$ misurabile

Misurabilità

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ σ -algebra in Ω
 - ▶ se la σ -algebra di riferimento in $\mathbb{R}^n$ è $\mathcal{B}^n$ (scelta usuale) e si dice semplicemente: f è $\mathcal{F}$ misurabile
 - ▶ se anche $\Omega = \mathbb{R}^m$ e la σ -algebra è $\mathcal{F} = \mathcal{B}^m$ (scelta usuale) si dice semplicemente: f è misurabile

Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità
 - ▶ **variabile aleatoria**: una applicazione $\mathcal{F}$ misurabile

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- ▶ **vettore aleatorio**: una applicazione $\mathcal{F}$ misurabile

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- ▶ un **ente aleatorio** è una applicazione

$$X : \Omega \rightarrow E$$

$\mathcal{F} / \mathcal{E}$ misurabile, con $\mathcal{E}$ σ -algebra su E

Variabili Aleatorie

- $\mathbf{X}$ vettore aleatorio su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- ▶ per ogni Boreliano $B \in \mathcal{B}^n$,

$$\mathbf{X}^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

- ▶ notazione:

$$\mathbf{X}^{-1}(B) = \{\mathbf{X} \in B\} = \text{"}\mathbf{X} \text{ appartiene a } B\text{"}$$

- ▶ perché si richiede la misurabilità? si può calcolare

$$P(\mathbf{X}^{-1}(B)) = P(\{\mathbf{X} \in B\}) = P(\mathbf{X} \in B)$$

(si possono omettere le parentesi)

Variabili Aleatorie

- Esempio. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $A \subset \Omega$
l'**indicatore di A** è

$$1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \notin A \\ 1 & \text{se } \omega \in A \end{cases}$$

- ▶ 1 se A è V, 0 se A è F
- ▶ è una variabile aleatoria $\iff A \in \mathcal{F}$
- Esercizio. Scrivere tramite 1_A e 1_B i seguenti indicatori:
 $1_{\bar{A}}, 1_{A \cup B}, 1_{A \cap B}, 1_{A-B}, 1_{A \Delta B}$

Variabili Aleatorie

- Su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
 - ▶ X **variabile aleatoria semplice** se prende un numero finito di determinazioni ($X(\Omega)$ finito); tutte e sole le variabili aleatorie del tipo

$$X = \sum_{i=1}^m c_i 1_{A_i}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, m$

- ▶ X **variabile aleatoria discreta** se prende al più un numerabile di determinazioni

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$$

- In uno spazio di probabilità finito (discreto) tutte le variabili aleatorie sono semplici (discrete)

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili

- ▶ [Criterio standard di misurabilità] $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ con $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C}')$
 $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ tale che

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ per ogni } A' \in \mathcal{C}'$$

allora f è $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile

Prova: mostrare che la classe dei “buoni insiemi”

$$\mathcal{G}' = \{A' \subset \Omega' \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

è una σ -algebra su Ω'

Misurabilità

- [Criterio standard di misurabilità (II)]

▶ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, se

$$f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}$$

allora f è $\mathcal{F}$ misurabile

▶ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, se

$$f^{-1}((-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n]) \in \mathcal{F} \text{ per ogni } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

allora f è $\mathcal{F}$ misurabile

▶ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ è misurabile se e solo se ogni f_i è misurabile

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili

► [Composizione] $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}'), (\Omega'', \mathcal{F}'')$

$$f : \Omega \rightarrow \Omega', \quad g : \Omega' \rightarrow \Omega''$$

se $f : \mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile, $g : \mathcal{F}' / \mathcal{F}''$ misurabile, allora

$$g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega'', \quad g \circ f(\omega) = g(f(\omega))$$

è $\mathcal{F} / \mathcal{F}''$ misurabile

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili

- ▶ [Operazioni fra funzioni misurabili] $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ misurabili, allora

$$\begin{aligned} f + g, \quad f \cdot g, \quad c \cdot f \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \max\{f, g\}, \quad \min\{f, g\} \\ \frac{1}{f} \quad (\text{se } f(\omega) \neq 0 \text{ per ogni } \omega \in \Omega) \end{aligned}$$

sono $\mathcal{F}$ misurabili

Misurabilità

- Variabili aleatorie **estese**: a volte conviene considerare applicazioni che prendono valori $+\infty$ e/o $-\infty$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

(convenzione: $-\infty \leq x \leq +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$)

- ▶ σ -algebra dei Boreliani su $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathcal{B}} = \sigma(\{[-\infty, a] \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\})$$

si ottengono tutti i Boreliani di $\mathbb{R}$ a cui si aggiungono uno o entrambi i simboli $+\infty$, $-\infty$

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ misurabile per ogni $n \geq 1$

▶ allora

$$\sup_n f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \inf_n f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

sono $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$ misurabili

▶ riesce

$$E_1 = \{\omega \in \Omega \mid \lim_n f_n(\omega) \text{ esiste in } \mathbb{R}\} \in \mathcal{F}$$

$$E_2 = \{\omega \in \Omega \mid \lim_n f_n(\omega) \text{ esiste in } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{F}$$

- ▶ se $P(E_1) = 1$ allora $\lim_n f_n$ è $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$ misurabile
se $P(E_2) = 1$ allora $\lim_n f_n$ è $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$ misurabile

Misurabilità

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 - ▶ [Continuità implica misurabilità]
se l'insieme dei punti di discontinuità di f è **discreto**, allora f è misurabile
 - ▶ tutte le funzioni di uso pratico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ sono misurabili
- Esercizio. verificare direttamente che sono misurabili
 - ▶ $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \cos x$
 - ▶ $f(x, y) = (x + y, x, y)$

Variabili Aleatorie

- Operazioni con variabili aleatorie, **purché ben definite**, portano a nuove variabili aleatorie

- ▶ se $X, Y, (X_n)_{n \geq 1}$ sono variabili aleatorie, tali sono

$$c \cdot X (c \in \mathbb{R}), X + Y, X \cdot Y, \frac{X}{Y}, \max\{X, Y\}, \min\{X, Y\}$$

$$\sup_n X_n, \inf_n X_n, \lim_n X_n, \sum_n X_n$$

$$f(X) \text{ con } f \text{ misurabile: } e^X, \log X, X^\alpha, \dots$$

- ▶ se $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vettore aleatorio, $X \in D$ q.c. ($D \in \mathcal{B}^n$),
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ misurabile, allora $f(X)$ è un (ben definito) vettore aleatorio

σ -Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- Come definire l'informazione risultante dall'osservazione di una o più variabili aleatorie?
 - ▶ σ -algebra generata da una famiglia di funzioni
 - ▶ misurabilità di una variabile aleatoria rispetto alla σ -algebra generata equivale alla possibilità di ottenere (funzionalmente) la variabile aleatoria da quelle generanti la σ -algebra

σ -Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, $f_\alpha : \Omega \rightarrow \Omega'_\alpha$, $\mathcal{F}'_\alpha$ σ -algebra in Ω'_α ;
la σ -algebra generata da f_α , $\alpha \in I$ è

$$\sigma(f_\alpha, \alpha \in I) = \cap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra su } \Omega, \\ f_\alpha \text{ è } \mathcal{G} / \mathcal{F}'_\alpha \text{ misurabile per ogni } \alpha \in I \}$$

$$= \sigma(\{ f_\alpha^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{F}'_\alpha, \alpha \in I \})$$

σ -Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, $f_\alpha : \Omega \rightarrow \Omega'_\alpha$, $\mathcal{F}'_\alpha$ σ -algebra in Ω'_α
 $\mathcal{F} = \sigma(f_\alpha, \alpha \in I)$ è la **più piccola σ -algebra su Ω che rende f_α $\mathcal{F} / \mathcal{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$:**
 - ▶ $\mathcal{F}$ è una σ -algebra su Ω
 - ▶ f_α è $\mathcal{F} / \mathcal{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$
 - ▶ per ogni σ -algebra $\mathcal{G}$ su Ω tale che f_α è $\mathcal{G} / \mathcal{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$, è $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

σ -Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- Nel caso di un'unica applicazione, la costruzione si semplifica:
 $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, $\mathcal{F}'$ σ -algebra in Ω' ; la σ -algebra generata da f è

$$\sigma(f) = \cap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra su } \Omega, f \text{ è } \mathcal{G} / \mathcal{F}' \text{ misurabile} \}$$

$$= \{ f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{F}' \}$$

è la più piccola σ -algebra su Ω che rende f misurabile

Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

- ▶ X variabile aleatoria

$$\sigma(X) = \{\{X \in B\} \mid B \in \mathcal{B}\}$$

informazione data dall'osservazione di X

- ▶ $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ variabili aleatorie

$$\sigma(X_\alpha, \alpha \in I) = \sigma(\{\{X_\alpha \in B\} \mid B \in \mathcal{B}, \alpha \in I\})$$

informazione data dall'osservazione di ogni X_α , $\alpha \in I$

Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile, $A \in \mathcal{F}$ è un **atomo** di $\mathcal{F}$ se $A \neq \emptyset$ e

$$\text{se } B \in \mathcal{F}, B \subset A \Rightarrow B = \emptyset \text{ o } B = A$$

- ▶ [**misurabilità $\equiv$ costanza sugli atomi**] $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ misurabile, A atomo di $\mathcal{F}$ allora f è costante su A
- ▶ [**misurabilità rispetto a partizioni**] $\mathbb{P}$ partizione discreta di Ω , $\mathcal{F} = \sigma(\mathbb{P})$ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathcal{F}$ misurabile se e solo se f è **costante su ognuno degli atomi** di $\mathbb{P}$

Variabili Aleatorie

- Esempio.

- ▶ $\sigma(1_A) = \sigma(\{A, \bar{A}\}) = \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$
 f è $\sigma(1_A)$ misurabile se costante su A e $\bar{A} \iff f$ è funzione di 1_A

- ▶ X variabile aleatoria discreta con determinazioni $x_1, x_2, \dots$

$$\sigma(X) = \sigma(\{\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}, \dots\})$$

se Y è $\sigma(X)$ misurabile $\iff Y$ è funzione di X

Variabili Aleatorie

- [misurabilità rispetto variabili aleatorie]

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

sono equivalenti

① $\mathbf{Y}$ è $\sigma(\mathbf{X})$ misurabile

② $\sigma(\mathbf{Y}) \subset \sigma(\mathbf{X})$

③ esiste una funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ misurabile tale che

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$$

- $\mathbf{Y}$ è $\sigma(\mathbf{X})$ misurabile: significa che si può calcolare $\mathbf{Y}$ partendo da $\mathbf{X}$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie,

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

$$\dots\dots$$

$$Y_n = X_1 + \dots + X_n$$

mostrare che

$$\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$$

- Esercizio. X e Y sono variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $c \in \mathbb{R}$; mettere in ordine crescente di inclusione

$$\mathcal{F}, \sigma(X, X+Y), \sigma(|X|), \sigma(X), \sigma(X+Y, X-Y),$$

$$\sigma(X^2), \sigma(X, Y), \{\emptyset, \Omega\}, \sigma(X+c), \sigma(X, X^2 - Y^2).$$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Lancio di due dadi, X_1, X_2 risultato del primo e secondo dado; $Z = X_1 + X_2$, $W = X_1 \cdot X_2$, $U = \min\{X_1, X_2\}$, $V = \max\{X_1, X_2\}$; dire quali delle seguenti relazioni sono V o F

1 $\sigma(X_1 \cdot X_2) = \sigma(Z, W)$

2 $\sigma(X_1 \cdot X_2) = \sigma(U, V)$

3 $\sigma(Z, U) = \sigma(Z, V)$

4 $\sigma(X_1 - X_2) = \sigma(V - U, 1_{\{X_1 > X_2\}})$

5 $\sigma(X_1, U) = \sigma(X_2, V)$

6 $\sigma(Z) \cap \sigma(W) = \{\emptyset, \Omega\}$

7 $\sigma(U) \cap \sigma(V) = \{\emptyset, \Omega\}$