



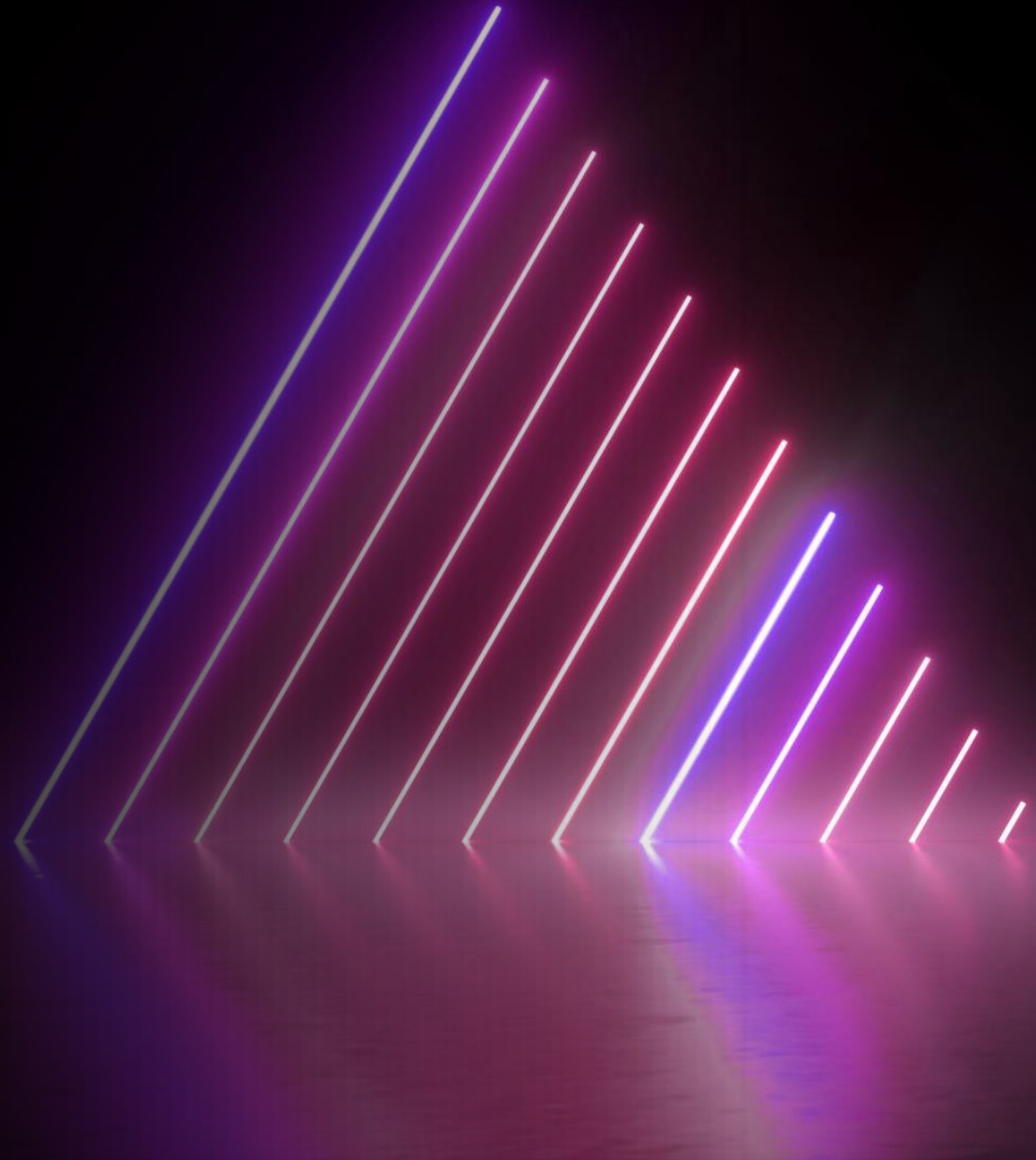
# ANALISI MULTIDISCIPLINARE, PROGETTO E OTTIMIZZAZIONE DI SISTEMI COMPLESSI

---

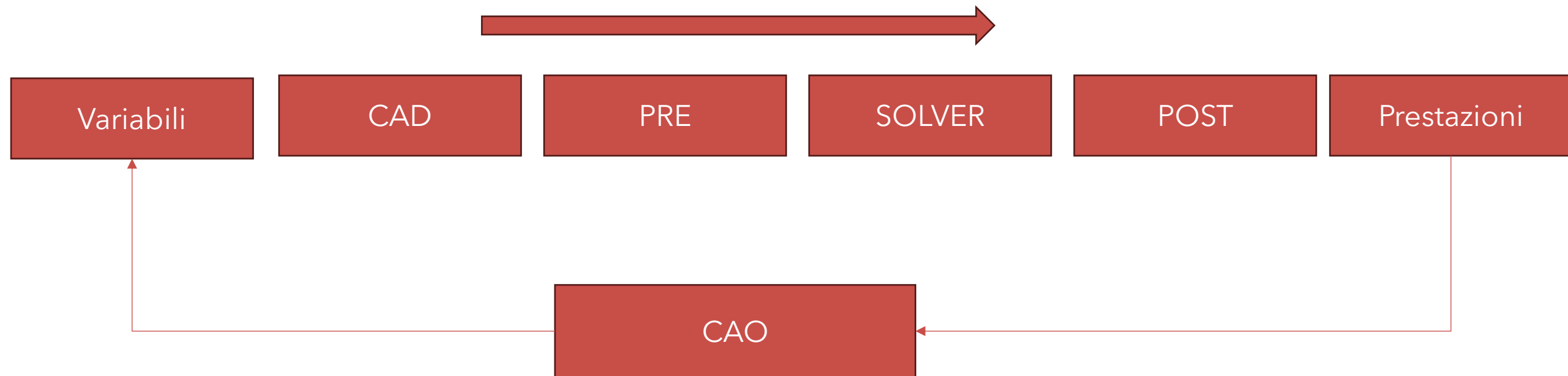
Valentino Pediroda

[pediroda@units.it](mailto:pediroda@units.it)

Ufficio: edificio C5 primo piano



# Concetto di CAO



# Concetto di CAO

$$\max R(\bar{x}) : \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$f_{\bar{\zeta}}(\bar{x}) \leq 0 \quad \bar{\zeta} : 1, \dots, p$$

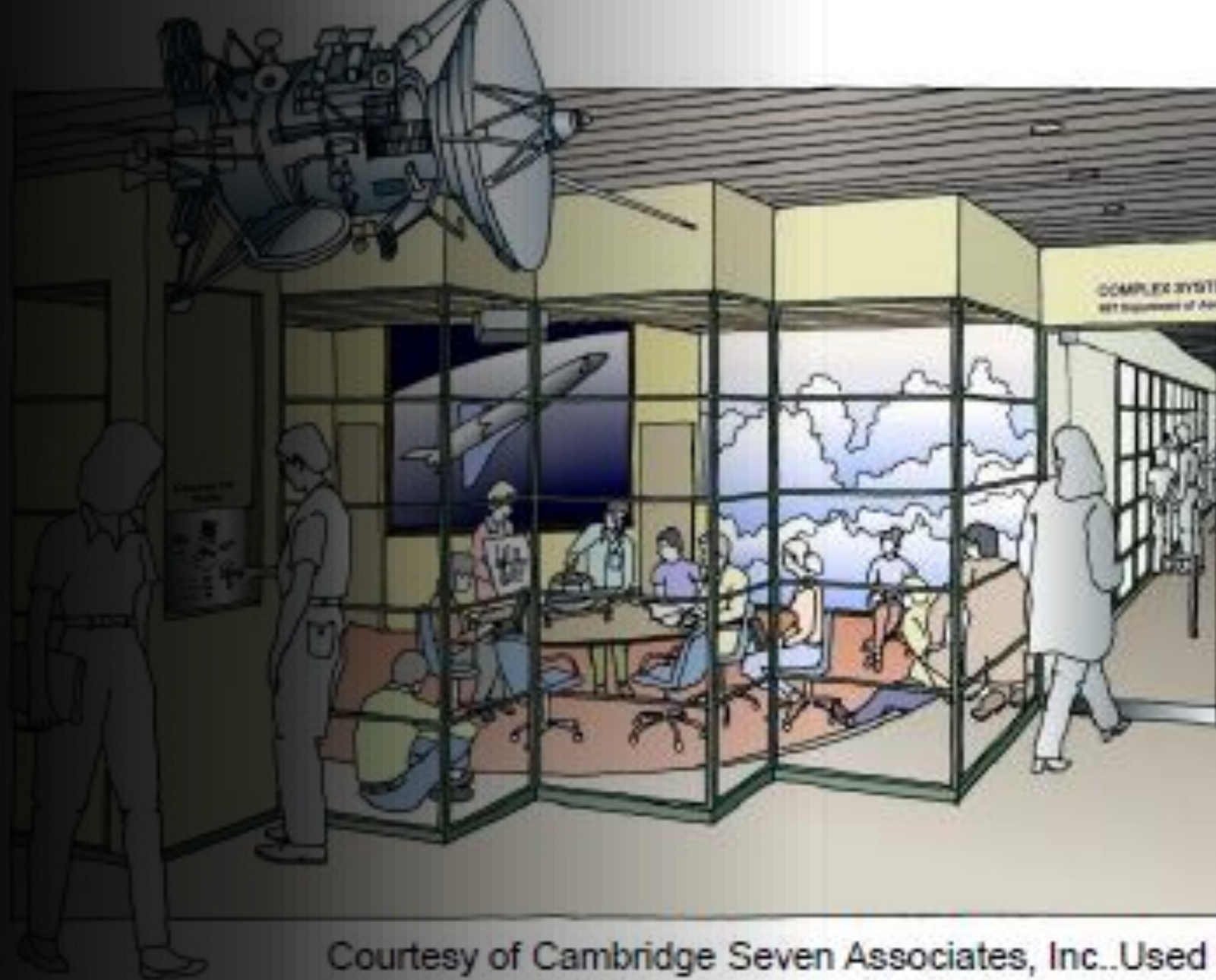
Ci siamo soffermati sul concetto generale e su approfondire le diverse aree di analisi mediante algoritmi:

- Parametrizzazione
- Analisi statistica
- Metodi Gradiente
- Metodo no gradiente
- Teoria dei giochi / multiobiettivo
- Superfici di risposta

# Concetto di MDO

MDO: Multi Disciplinary Optimization

- Da un punto di vista ingegneristico la complessità dei sistemi è sempre maggiore.
- I sistemi ingegneristici diventano sempre più multidisciplinari e si va sempre maggiormente affermando il concetto di Concurrent Engineering (CE) come parte fondamentale del Product Development Process (PDP)



Courtesy of Cambridge Seven Associates, Inc..Used

# Concetto di MDO

- Il concetto di processo di progettazione multi disciplinare è ormai nel ciclo di sviluppo → non solo tecniche e scienze ma anche collaborazione tra teams



Image by MIT OpenCourseWare.

?  
=

Fuselage Group

Electrical Group

Equipment Group

Controls Group

Power Plant Group

Aerodynamics Group

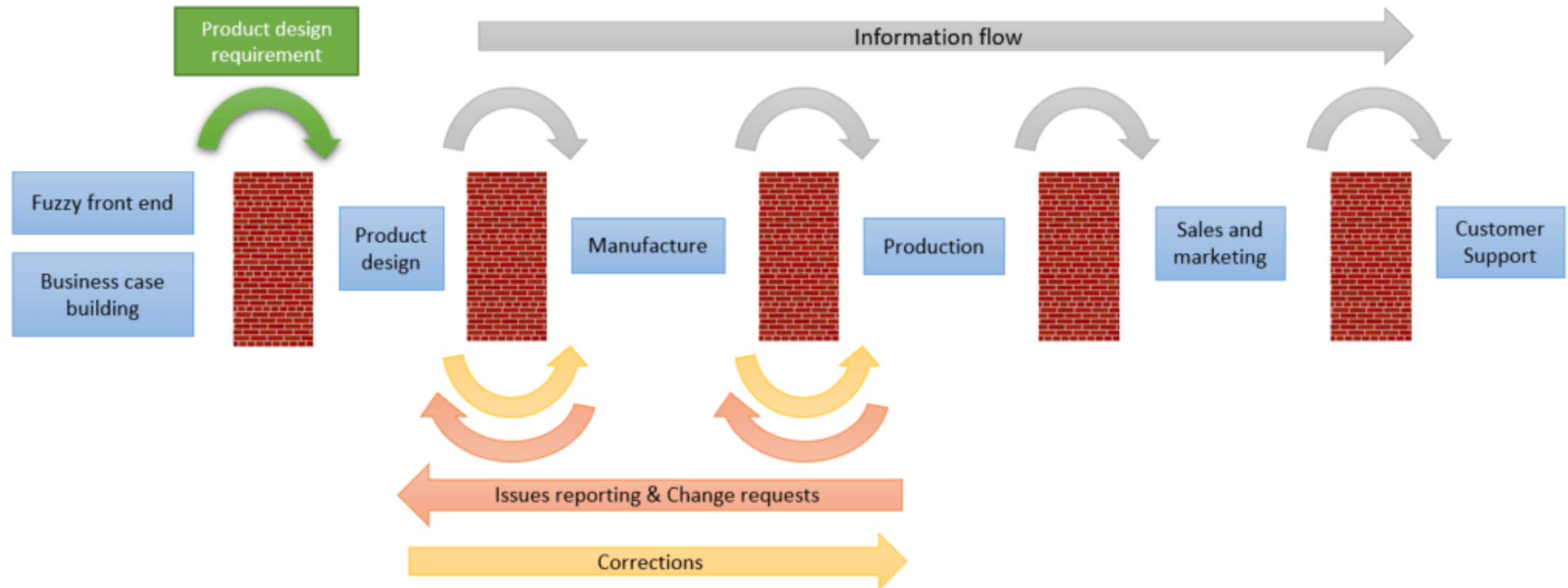
Hydraulics Group

Loft Group

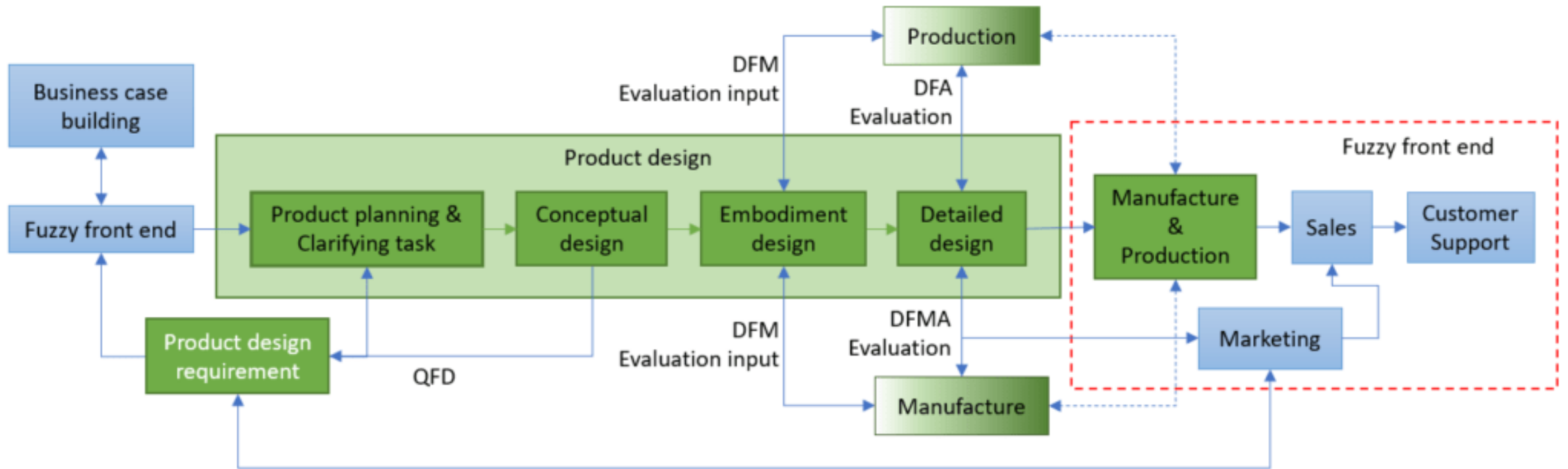
Stress Group

Production Engineering Group

# Sequential engineering product development workflow

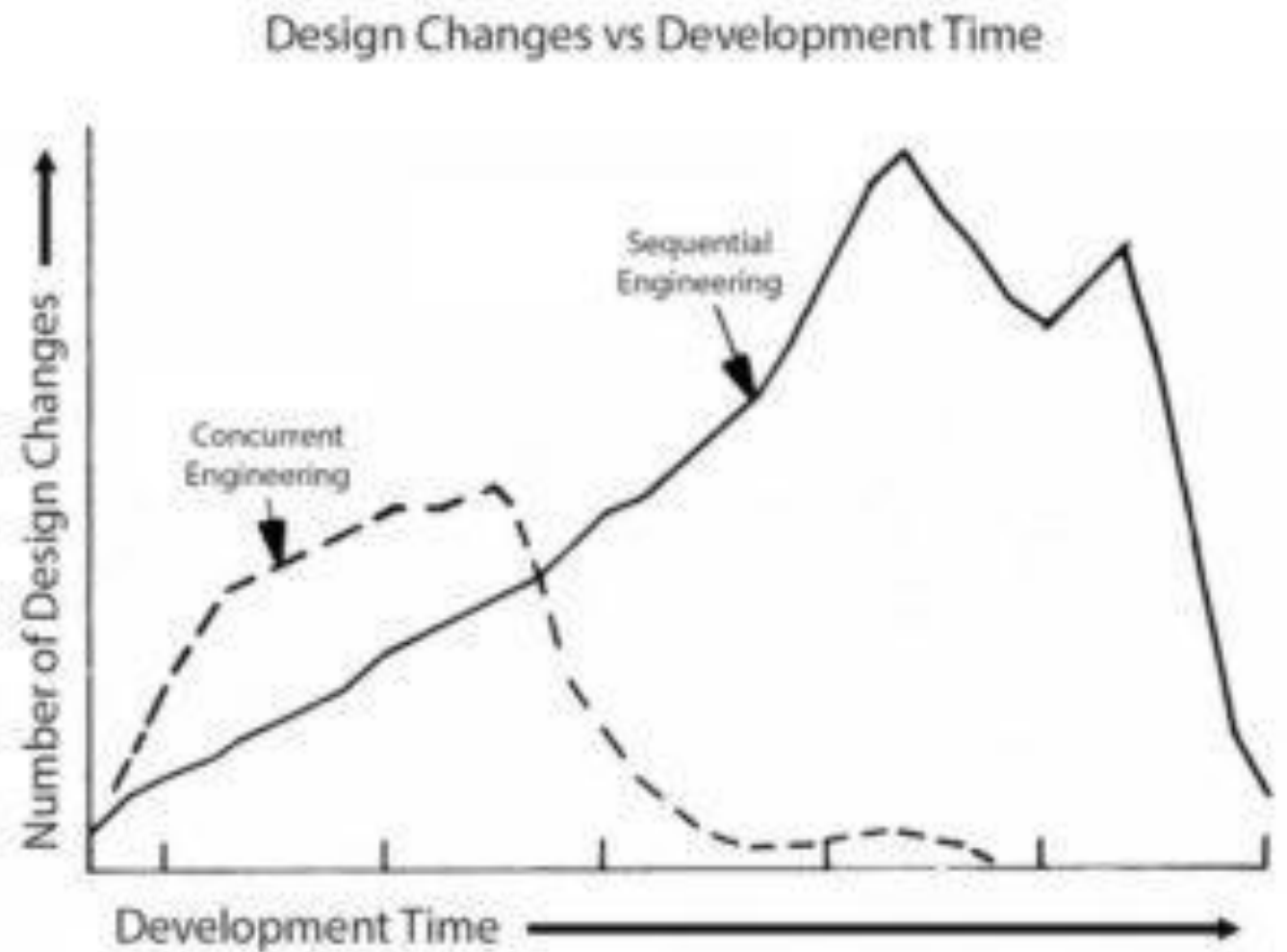


100





# Concurrent and sequential engineering costs







## Multidisciplinary System Design Optimization (MSDO)

---

**Obiettivo:** creare sistemi di ingegneria avanzati e complessi che devono essere competitivi non solo in termini di prestazioni, ma anche in termini di valore del ciclo di vita.

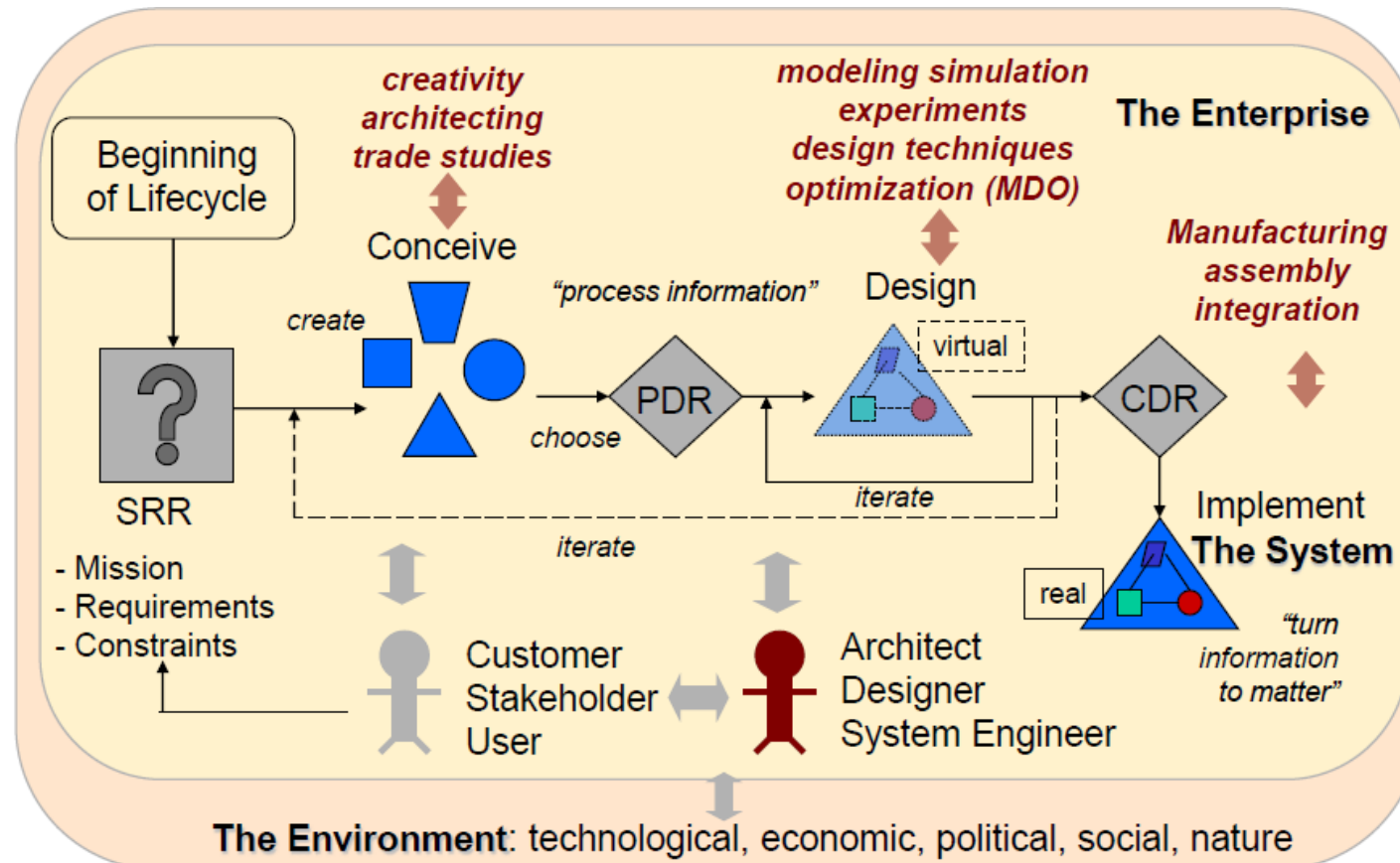
---

**Esigenza:** una metodologia di progettazione multidisciplinare rigorosa e quantitativa che possa lavorare di pari passo con il lato intuitivo non quantitativo e creativo del processo di progettazione.

---

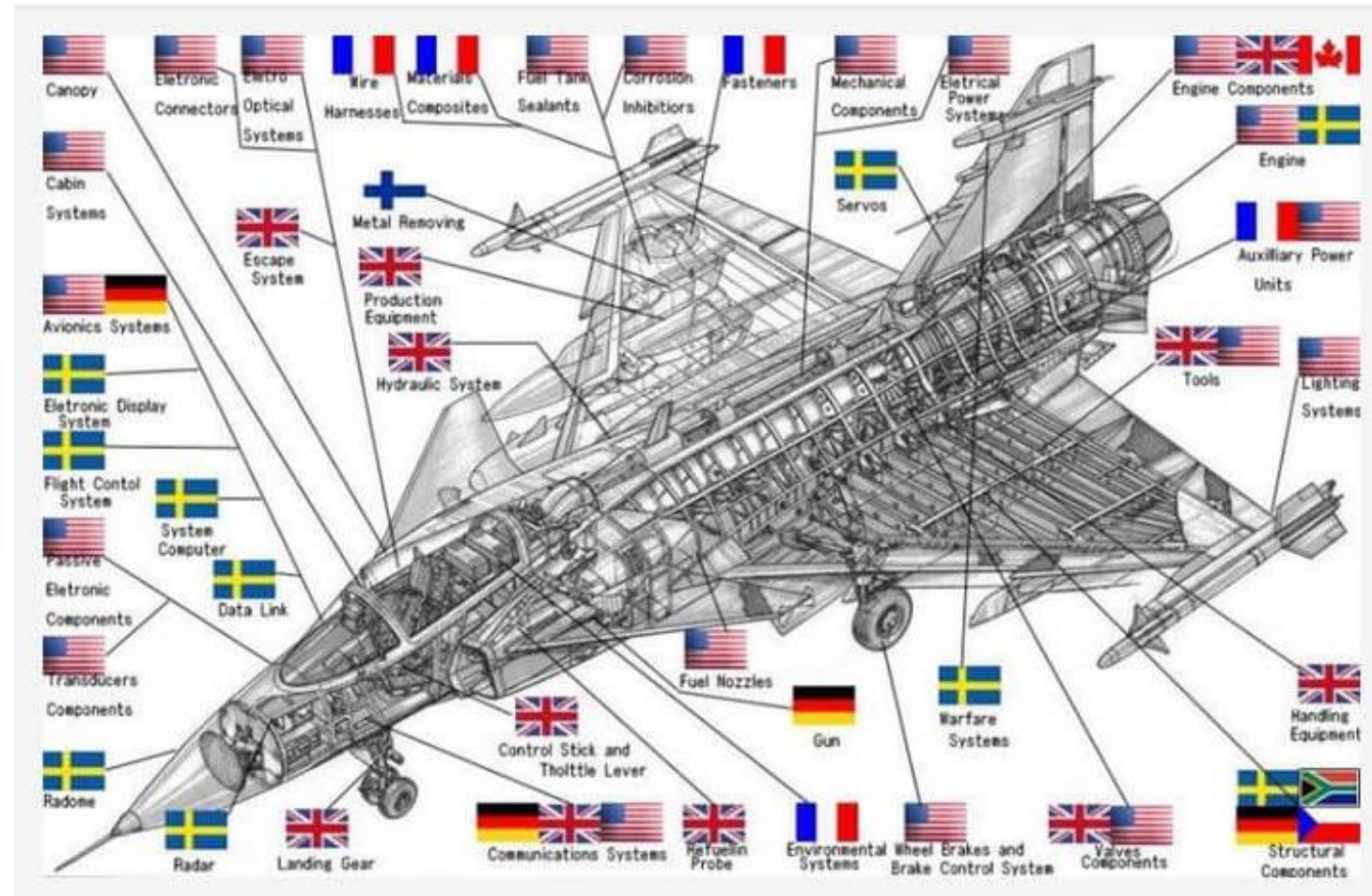
Questa classe presenta lo stato dell'arte attuale nell'ottimizzazione della progettazione simultanea e multidisciplinare (MDO)

# Product Development Process



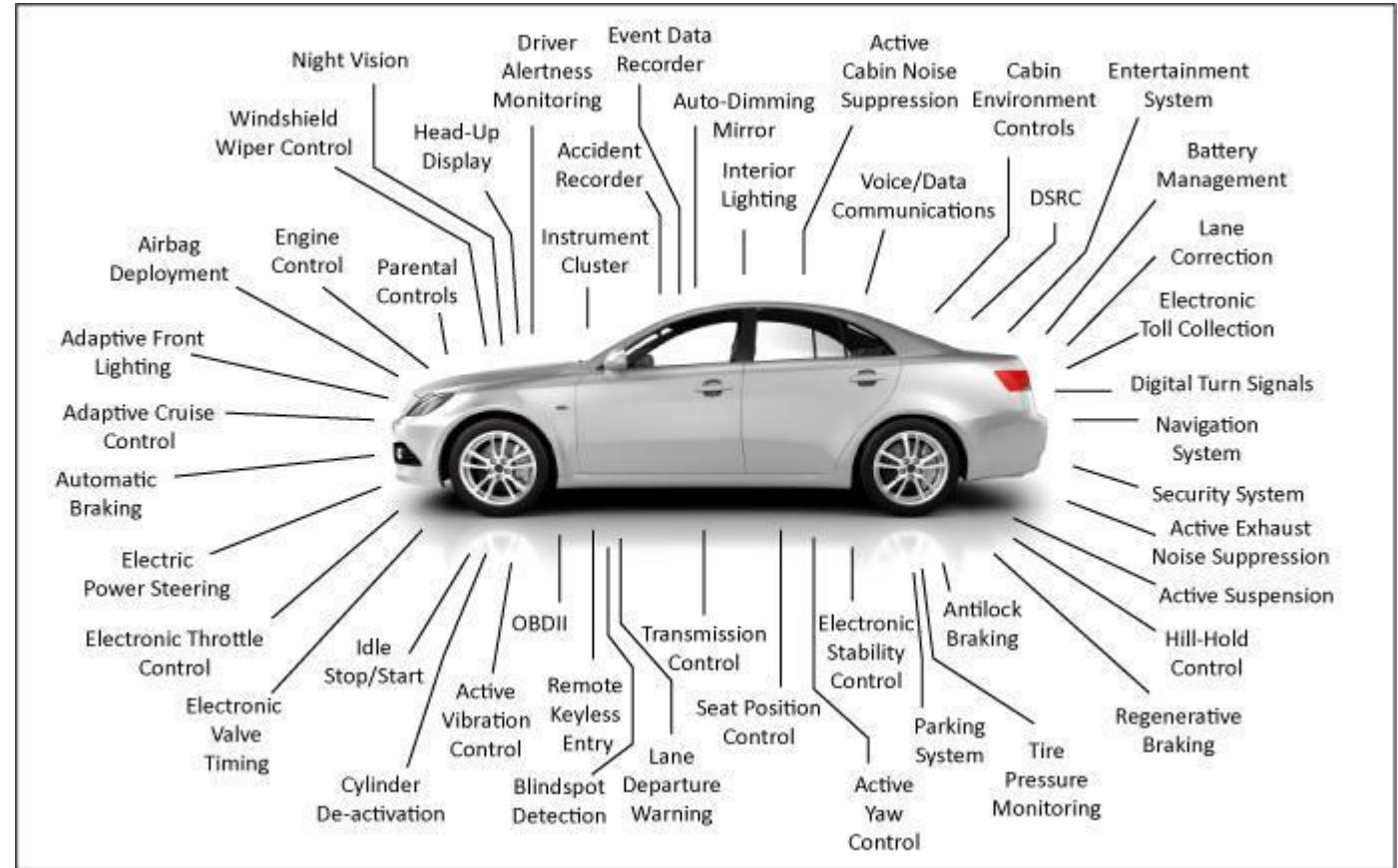
# Complex System Design Examples

Saab JAS 39 Gripen



# Complex System Design Examples

Sistemi di guida assistita



# MSDO Oggi



Design multidisciplinare esteso ad altri settori: veicoli spaziali, automobili, elettronica e computer, trasporti, energia e architettura



- Spinte nel governo e nell'industria per migliorare la produttività e la qualità dei prodotti e dei processi

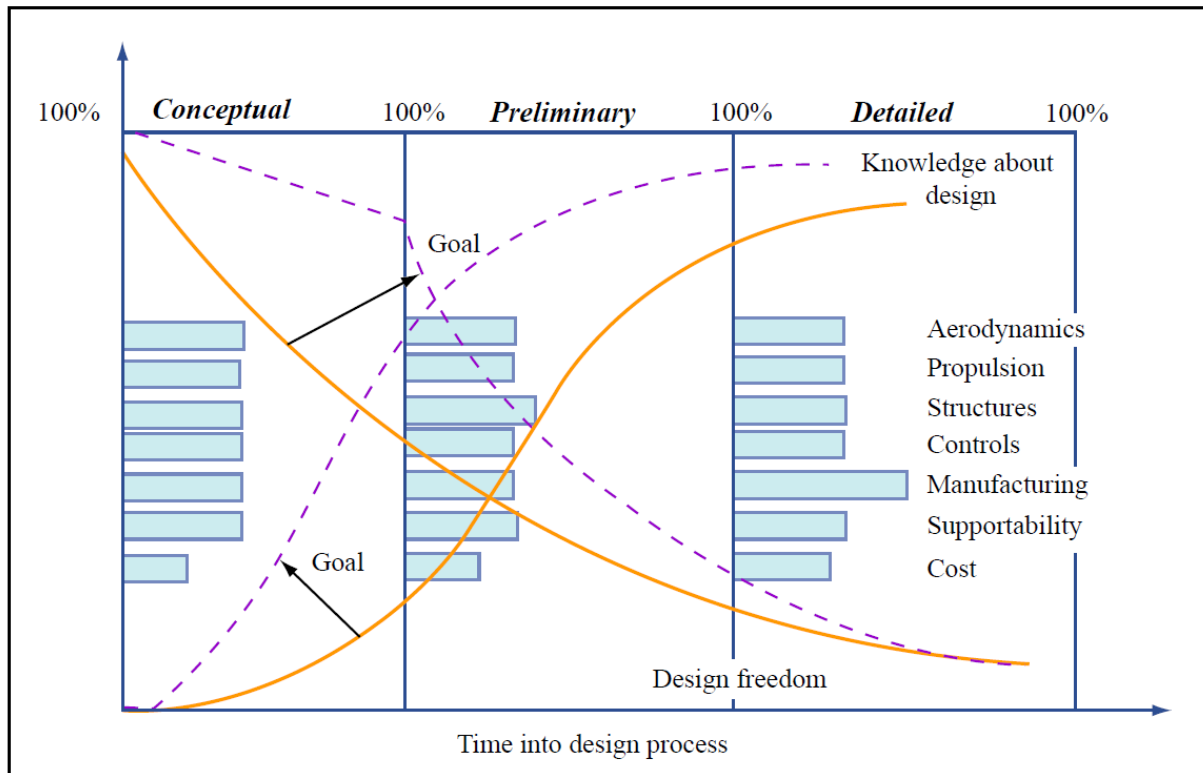


- Processo di progettazione: la globalizzazione si traduce in team di progettazione distribuiti e decentralizzati, PC ad alte prestazioni hanno sostituito i supercomputer centralizzati, software di progettazione disciplinare (CAD/CAM) molto maturo, Internet e LAN consentono un facile trasferimento delle informazioni



- Progressi negli algoritmi di ottimizzazione: ad es. Algoritmi genetici, Simulated Annealing, software MDO

# Obiettivo di MDO: acquisire conoscenze di progettazione in anticipo e mantenere



- Mantenere il più a lungo possibile flessibilità durante la fase di progettazione

# Definizioni

- **Multidisciplinare** - composto da più di un'area disciplinare tradizionale descritta da equazioni governative di vari campi fisici, economici, sociali
- **Sistema** - Un sistema è un oggetto fisico o virtuale che mostra un certo comportamento o svolge qualche funzione come conseguenza delle interazioni tra gli elementi costitutivi
- **Design** - Il processo di ideazione e pianificazione di un oggetto o di un processo con un obiettivo specifico in mente. Nel contesto di questa classe questo si riferisce alla concezione di un sistema che sarà successivamente implementato e gestito per qualche scopo benefico.
- **Ottimizzazione**: per trovare un progetto di sistema che riduca al minimo alcune funzioni obiettivo. La funzione obiettivo può essere un vettore comprendente misure del comportamento del sistema ("prestazioni"), utilizzo delle risorse ("tempo, denaro, carburante ...") o rischio ("margini di stabilità ...").



# Definizioni: matematica

$\min \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \longrightarrow \text{objective}$

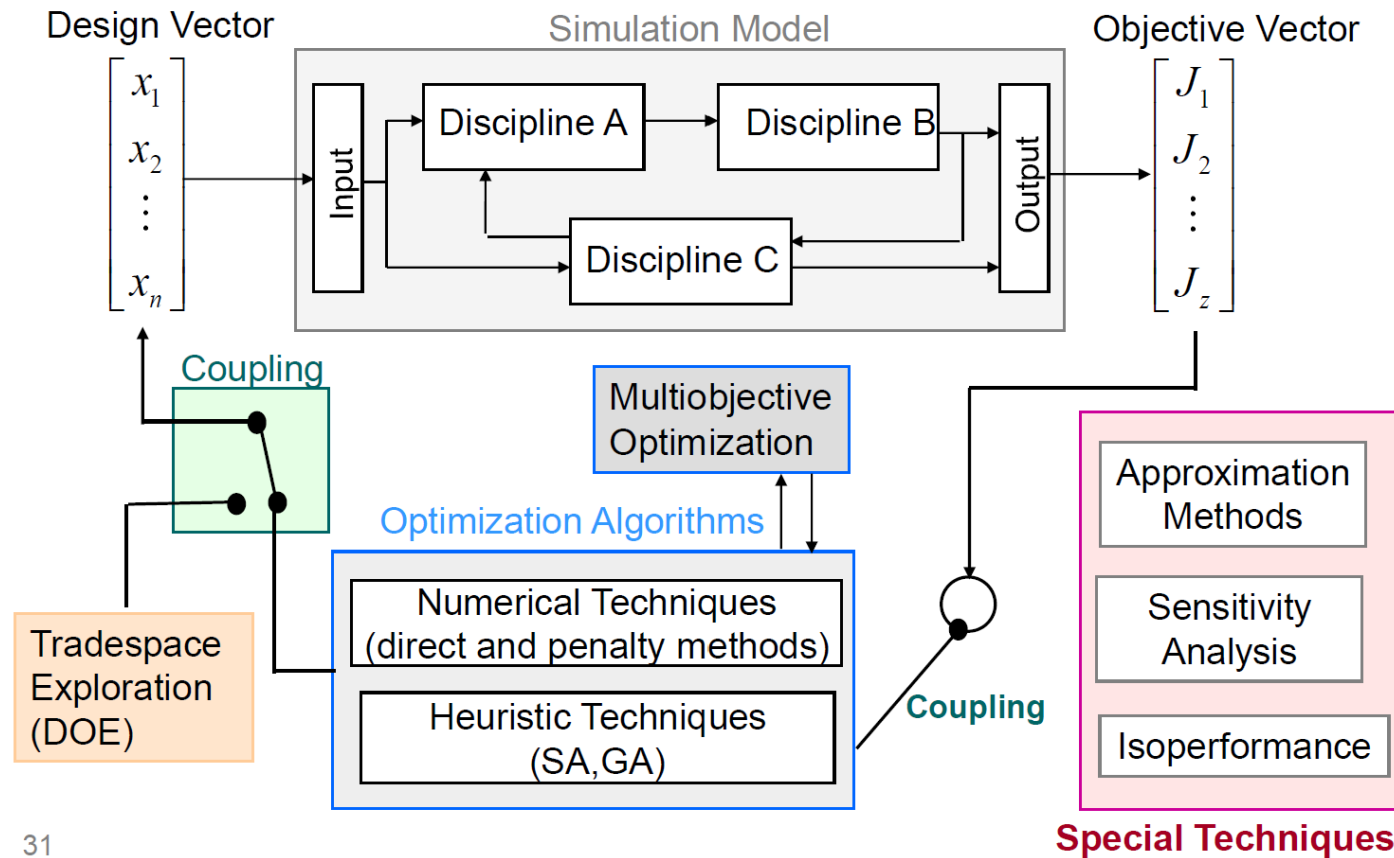
s.t.  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0$   
 $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 \longrightarrow \text{constraints}$

$x_{i, LB} \leq x_i \leq x_{i, UB} \longrightarrow \text{bounds}$

where  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1(\mathbf{x}) & \cdots & J_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \longrightarrow \text{design vector}$

# MDO: schema operativo



# Definizioni/considerazioni

- Che cos'è MDO? Una metodologia per la progettazione di sistemi e sottosistemi ingegneristici complessi che sfrutti coerentemente la sinergia di fenomeni reciprocamente interagenti
- Progettazione ottimale di sistemi ingegneristici complessi che richiedono un'analisi che tenga conto delle interazioni tra le discipline (= parti del sistema)
- "Come decidere cosa cambiare, e in che misura cambiarlo, quando tutto influenza tutto il resto."

# Esempio

## Aircraft:

Aerodynamics  
Propulsion  
Structures  
Controls  
Avionics/Software  
Manufacturing  
others

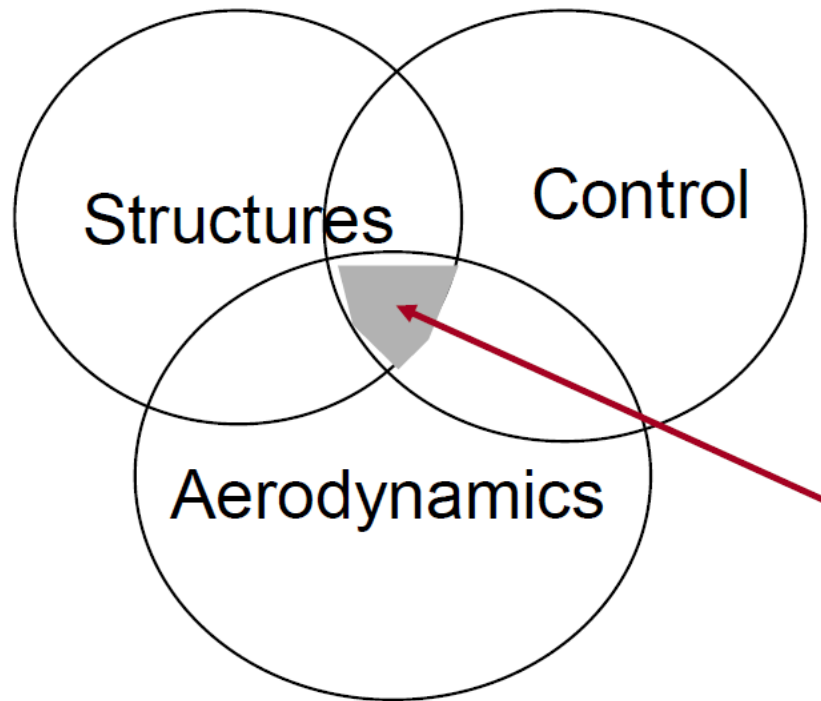
## Spacecraft:

Astrodynamics  
Thermodynamics  
Communications  
Payload & Sensor  
Structures  
Optics  
Guidance & Control

## Automobiles:

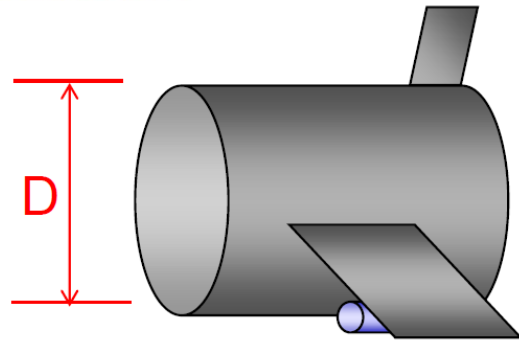
Engines  
Body/chassis  
Aerodynamics  
Electronics  
Hydraulics  
Industrial design  
others

# Elemento fondamentale: interazioni

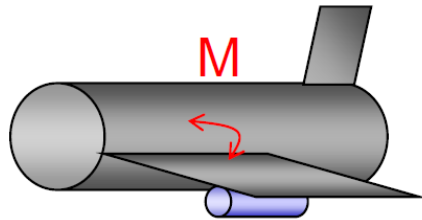


Emphasis in recent years has been on advances that can be achieved due to the interaction of two or more disciplines.

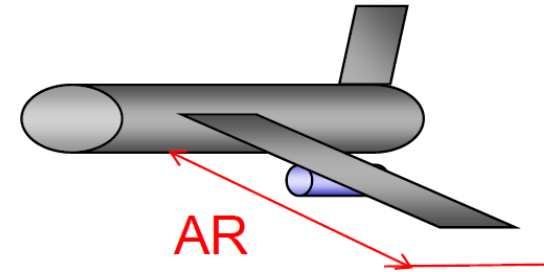
# Esempio



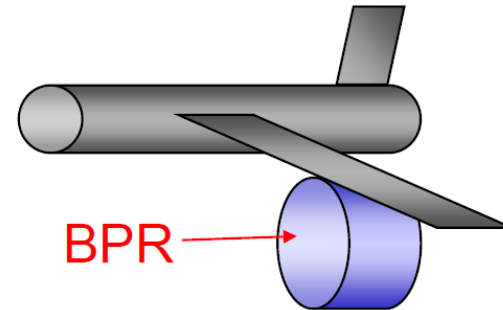
**Marketing:** maximize  
passenger volume  
→ Cabin diameter



**Structures:** minimize  
structural mass  
→ Wing-root moment



**Aero:** maximize  $L/D$   
→ Aspect Ratio

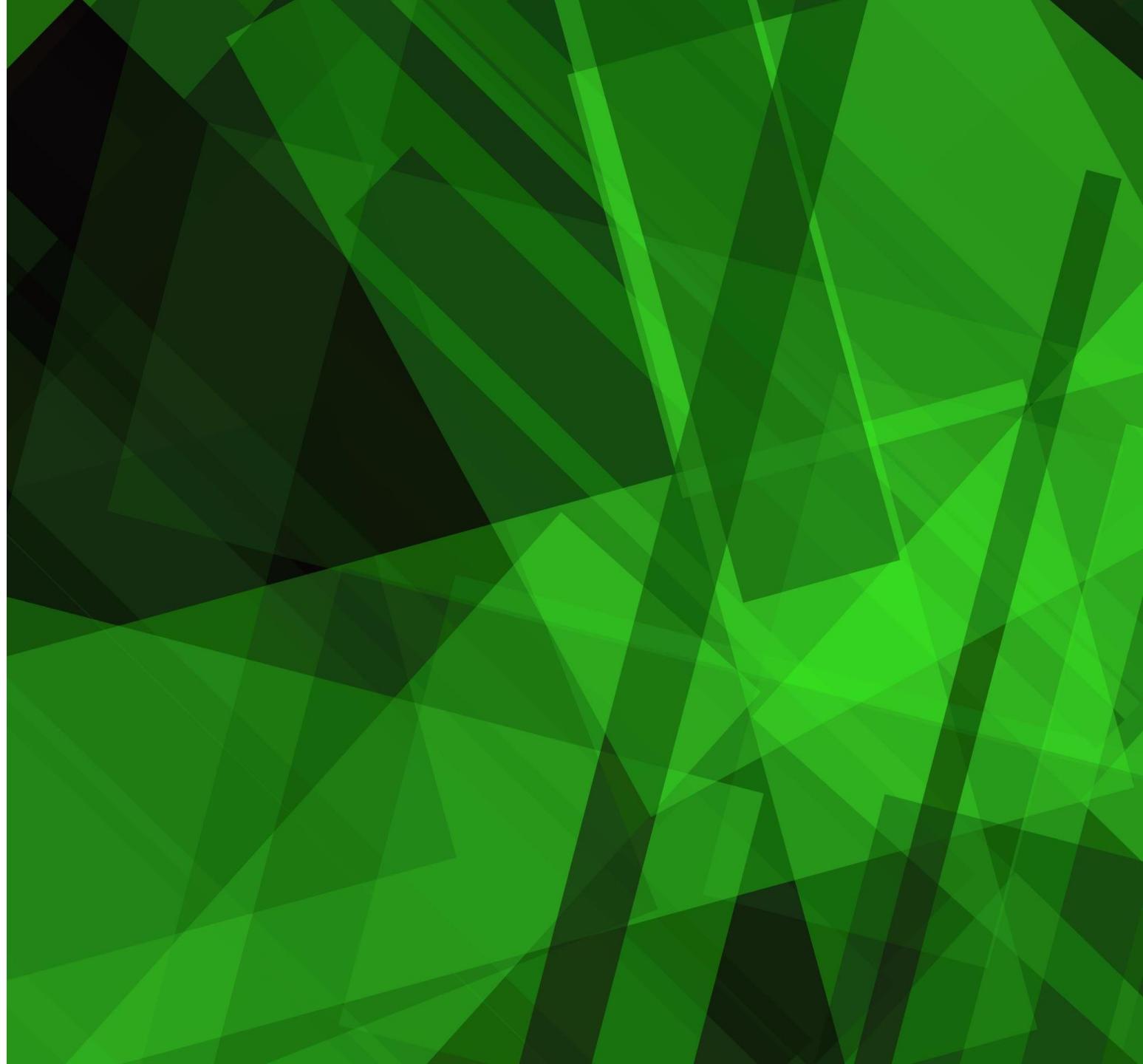


**Propulsion:** minimize  
specific fuel consumption  
(SFC) → Bypass Ratio



# Processso MDO

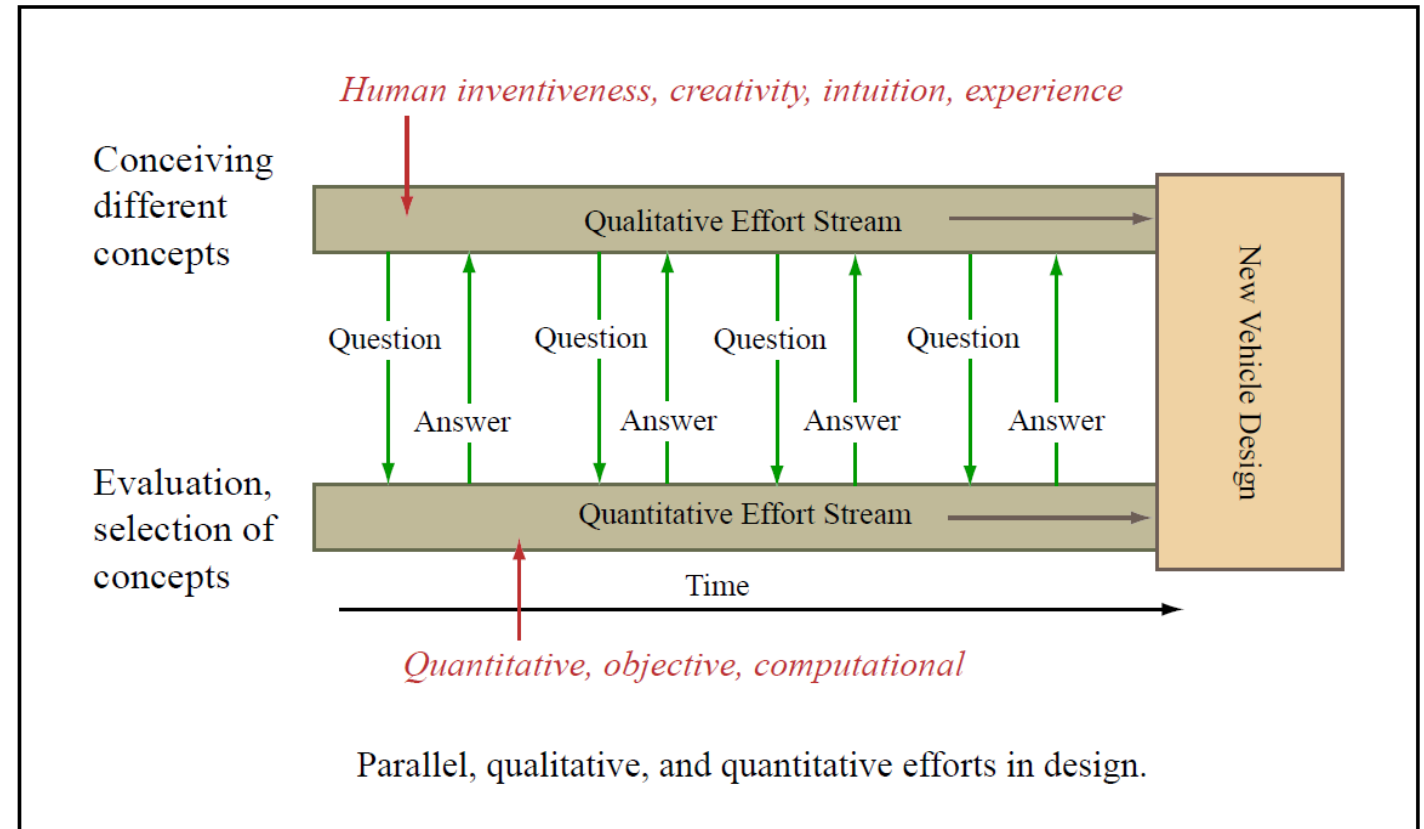
---





## Approccio quantitativo/qualitativo

- La mente umana è la forza trainante nel processo di progettazione. MDO è un modo per formalizzare lo strumento quantitativo per applicare i migliori compromessi.





Formulazione  
matematica:  
deve seguire il  
team di  
progettisti

---

$\min \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$   $\longrightarrow$  objective

s.t.  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0$   $\longrightarrow$  constraints

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$$

$x_{i, LB} \leq x_i \leq x_{i, UB}$   $\longrightarrow$  bounds

where  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1(\mathbf{x}) & \cdots & J_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \longrightarrow$  design vector

Essere certi che le variabili di design possano essere modificate

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{aspect ratio [-]} \\ \text{transmit power [W]} \\ \text{\# of apertures [-]} \\ \text{orbital altitude [km]} \\ \vdots \\ \text{control gain [V/V]} \end{bmatrix}$$

$x_i$  can be .....

Real:  $x_i \in \mathcal{R}$

Integer:  $x_i \in \mathcal{I}$

Binary:  $x_i \in \{0, 1\}$

Boolean:  $x_i \in \{\text{true}, \text{false}\}$



Design variables are “controlled” by the designers

Formulazione matematica:  
deve seguire il team di  
progettisti

- Minimize the **take-off weight of the aircraft** by changing **wing geometric parameters** while satisfying the given **range and payload requirements** at the given **cruise speed**.

design variables

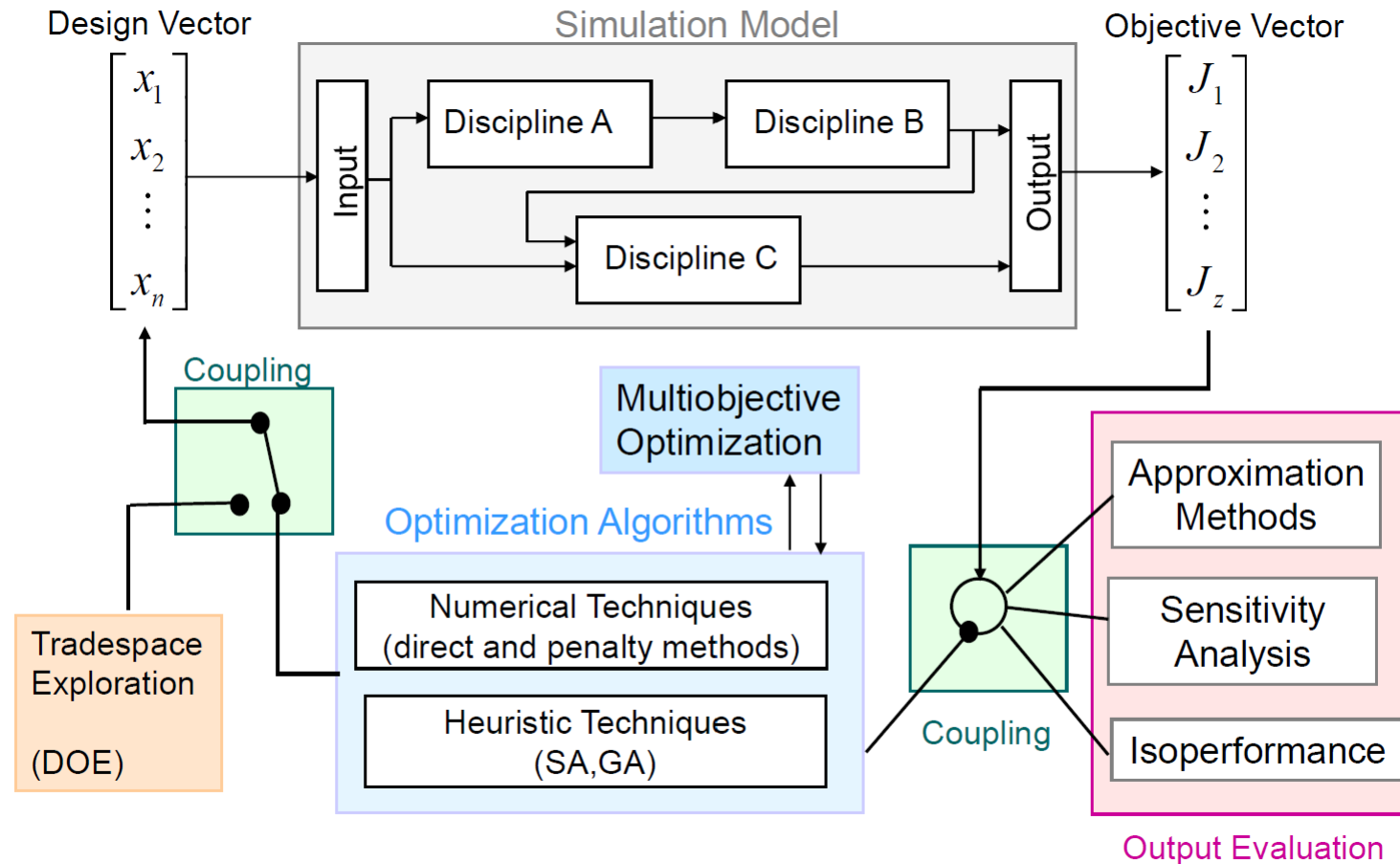
objective function

Minimize the **take-off weight of the aircraft** by changing **wing geometric parameters** while satisfying the given **range and payload requirements** at the given **cruise speed**.

constraints

parameter

# Impostazione flusso tecnologico





# Tipico processo MDO

Define overall system requirements

Define design vector  $\mathbf{x}$ , objective  $\mathbf{J}$  and constraints

System decomposition into modules

Modeling of physics via governing equations at the module level -module execution in isolation

Model integration into an overall system simulation

Benchmarking of model with respect to a known system from past experience, if available

Design space exploration (DoE) to find sensitive and important design variables  $x_i$

Formal optimization to find  $\min J(\mathbf{x})$

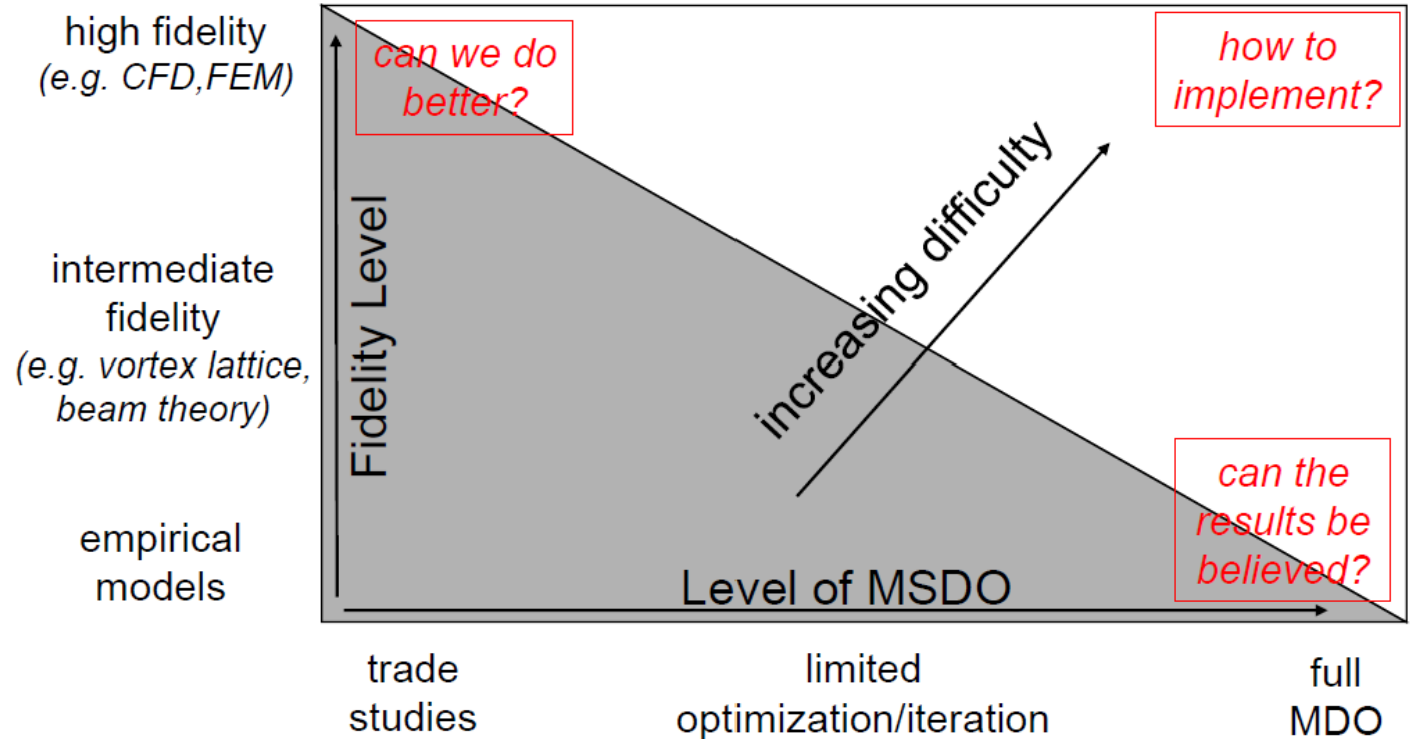
Post-optimality analysis to explore sensitivity and tradeoffs: sensitivity analysis, approximation methods, isoperformance, include uncertainty

# Sfide del MDO

- **Accuratezza/costo:** dei modelli verticali sulla singola disciplina. Bisogna trovare sempre il giusto equilibrio tra accuratezza e tempi di calcolo complessivi.
- **Complessità:** Le variabili di progettazione, i vincoli e le interazioni tra i diversi modelli/discipline devono essere gestiti con attenzione.
- **Comunicazione:** L'interfaccia utente è spesso molto ostile e può essere difficile modificare i parametri del problema.
- **Flessibilità:** È facile che uno strumento MDO diventi molto specializzato e valido solo per un particolare problema.

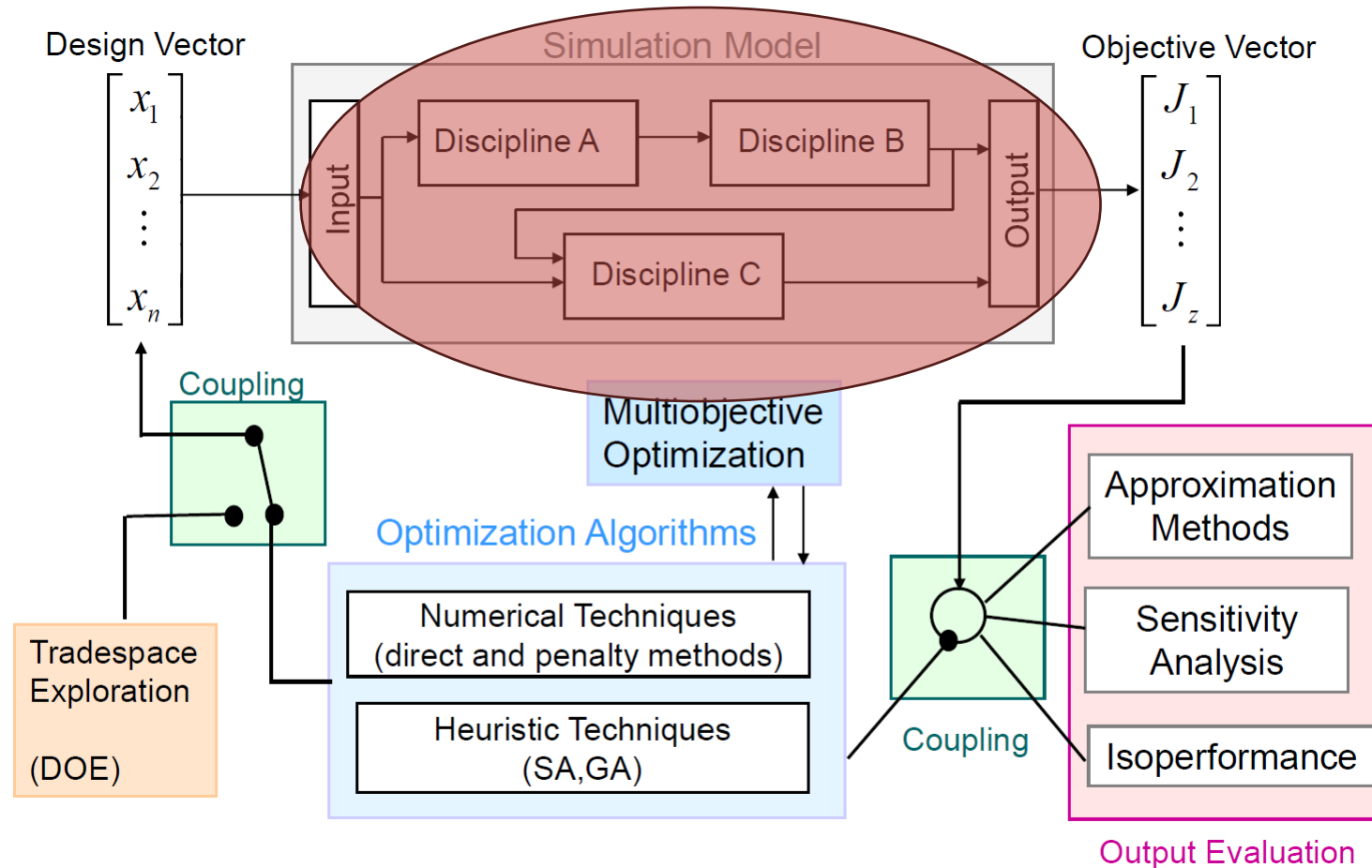
*Come evitare che le tecnologie MDO diventino strumenti complessi e altamente specializzati che vengano utilizzati da una singola persona (spesso lo sviluppatore!) per un singolo problema?*

# Accuratezza vs costo





# Iterazione tra i modelli/discipline



# Come decomporre un sistema?

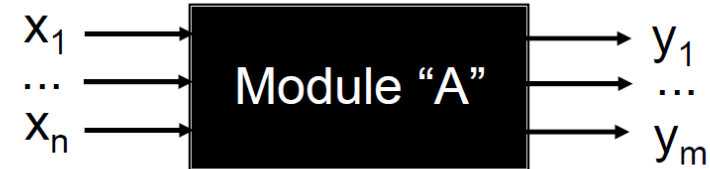
- Cosa fare quando il sistema è nuovo e non ci sono esperienze?
  - Innanzitutto definire le “black box” o moduli in base a: conoscenza storica, grado di accoppiamento delle equazioni governanti o disponibilità di software di analisi
  - Definire in modo chiaro gli input e gli output di ciascun modulo

# Modulo in MDO

---

What is a module in MSDO ?

A module in multidisciplinary system design optimization is a finite group of tightly coupled mathematical relationships who are under the responsibility of a particular individual or organization, and where some variables represent independent inputs while others are dependent outputs. The module frequently appears as a “black box” to other individuals or organizations .





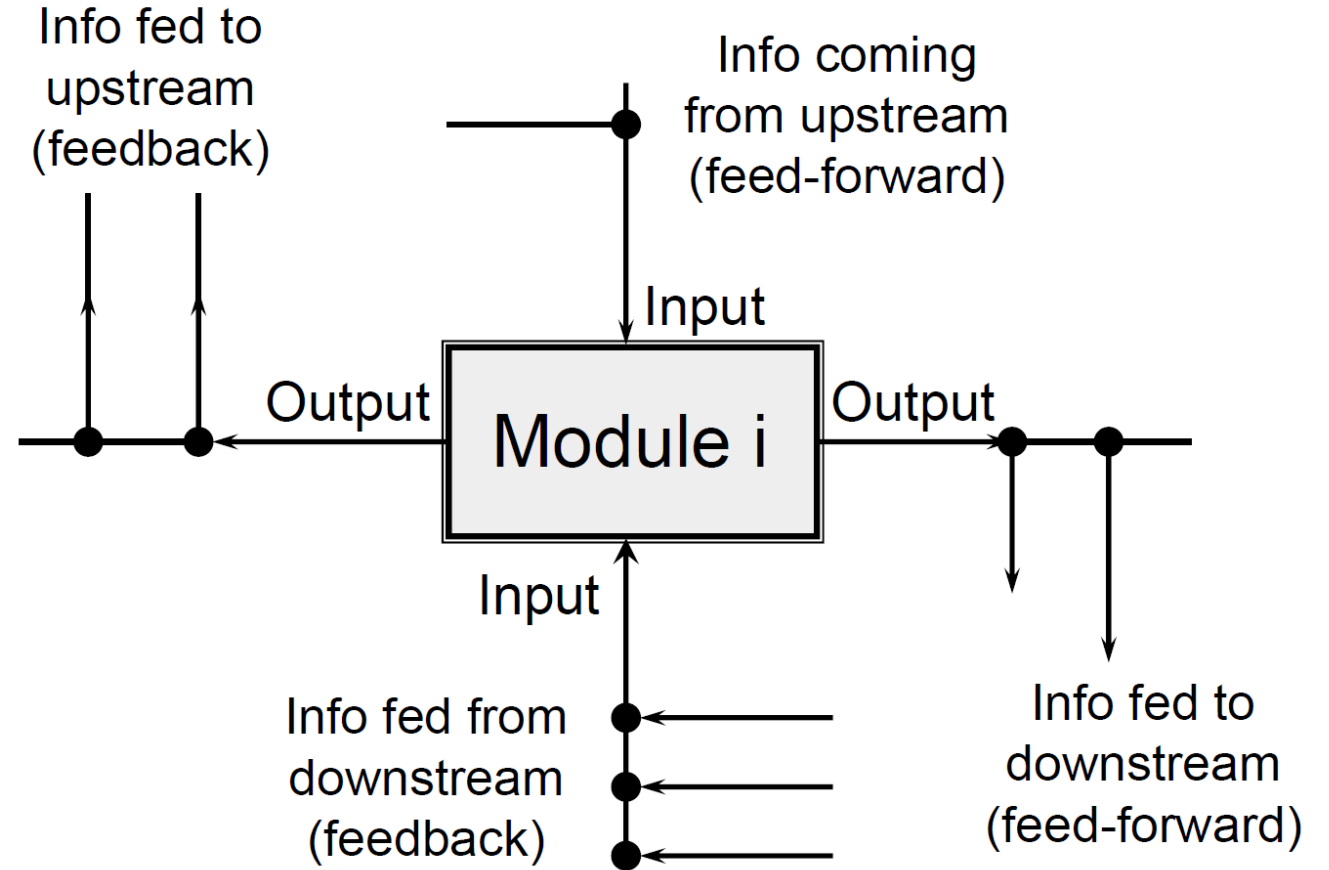
# Modulo in MDO

---

- A **module** within a simulation architecture may be **defined** as a piece of computer code which:
  - Performs a **compact** set of calculations.
  - Contains a **single** entry point and exit point.
  - May be tested in **isolation**.
- Attributes of a **good modular unit** within a simulation architecture include:
  - **High internal coupling within the module**
    - All sub-functions within the module contribute to form a **single primary function**.
  - **Low coupling between modules**
    - **Minimize** the number of variables that flow **between** modules.
  - **Minimization of feedback loops**
    - Data flow is processed **sequentially** from input to output.

# Input/output nei moduli

---

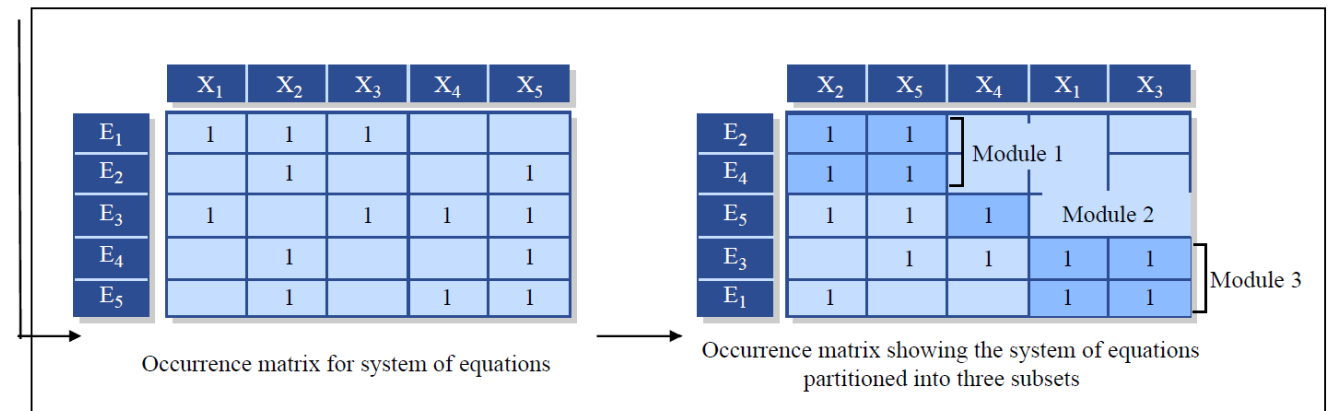


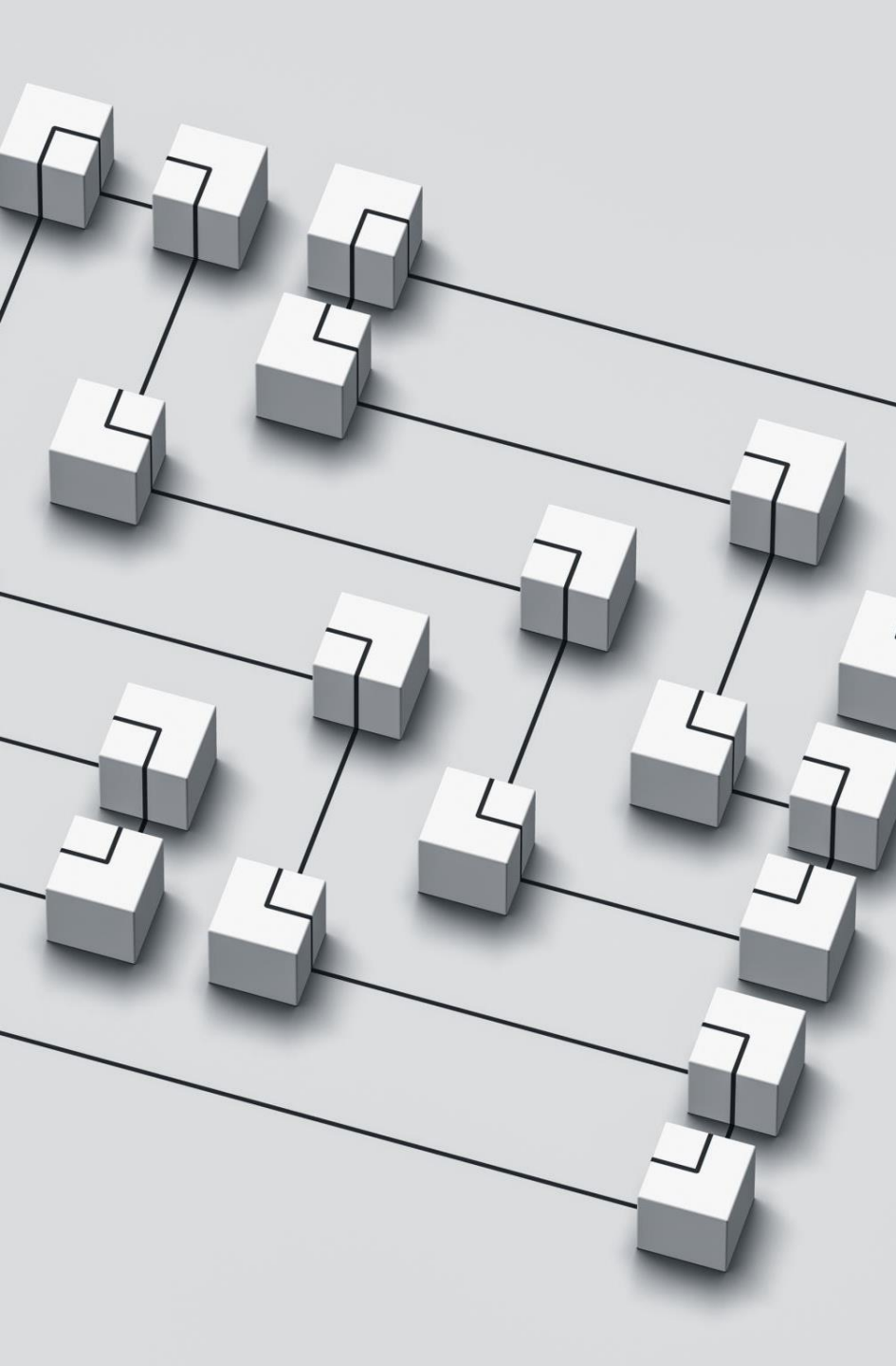
# Partizione delle equazioni: matrice di occorrenza

$$\begin{aligned} E1 & x_1x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \\ E2 & x_2 + 3x_5 - 9 = 0 \\ E3 & x_1 - x_4x_5 - x_3 + 10 = 0 \\ E4 & 9x_5 - 3x_2 + 7 = 0 \\ E5 & x_2x_5 - x_2x_4 + x_2 - 9 = 0 \end{aligned}$$

-5 variables  
-5 independent equations  
-no degrees of freedom

1. Solve  $x_2, x_5$  from  $E_2$  and  $E_4$
2. Solve  $x_4$  from  $E_5$
3. Solve  $x_1$  and  $x_3$  from  $E_3$  and  $E_1$

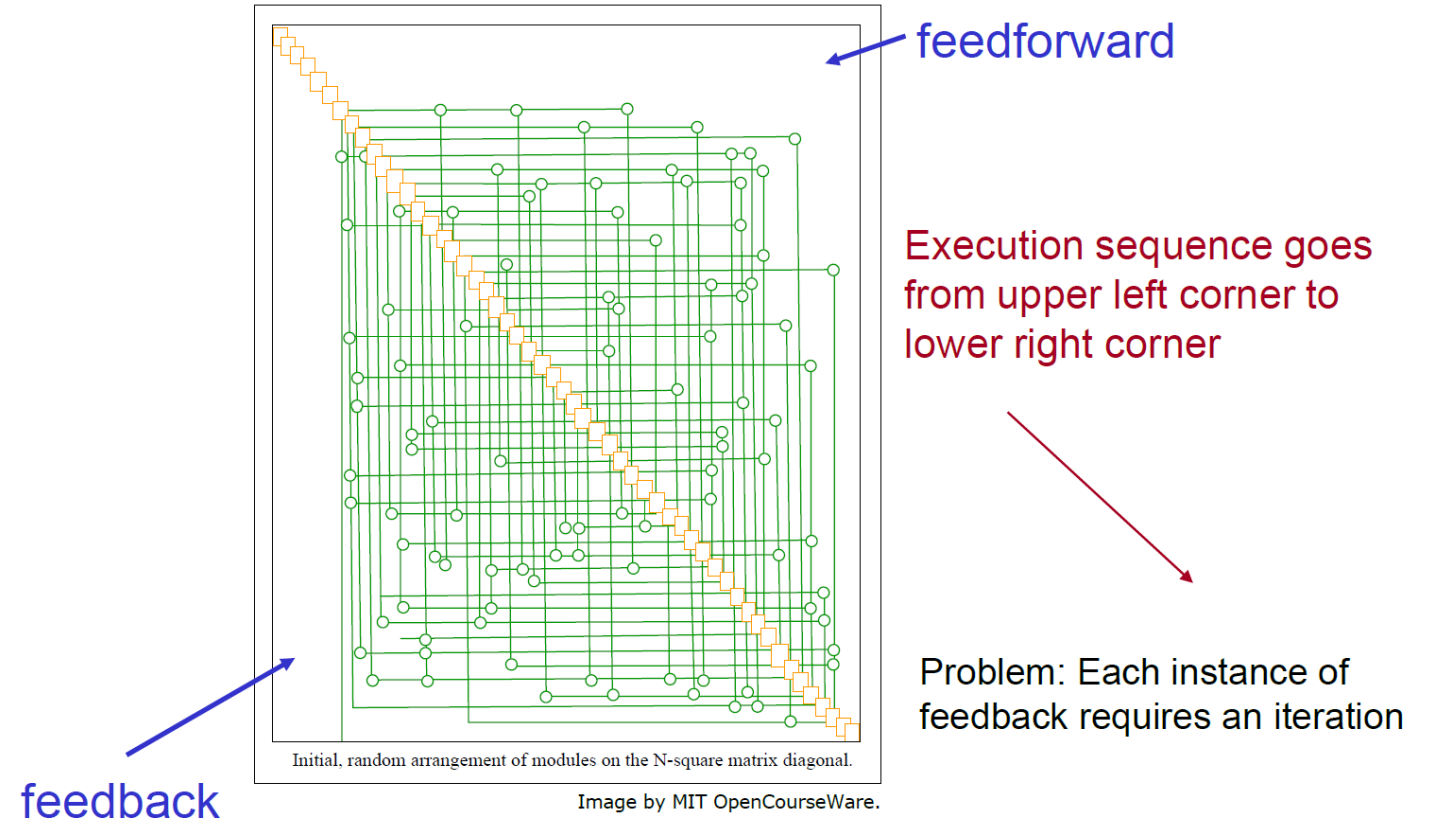




# II diagramma N2

- An NxN matrix used to develop and organize interface information.
- Each module within the simulation architecture is placed along the diagonal.
- Provides a visual representation of the flow of information through the simulation architecture.
- Helps to identify critical modules that have many inputs and outputs. The fidelity of critical modules should be thoroughly tested and verified.
- Explicitly defines all inputs and outputs for macro-modules and modules.
- Allows for “plug and play”
  - Independent testing
  - Alternative modules easily analyzed
  - Can increase overall model fidelity incrementally

# Diagramma N2





# Minimizzare la complessità

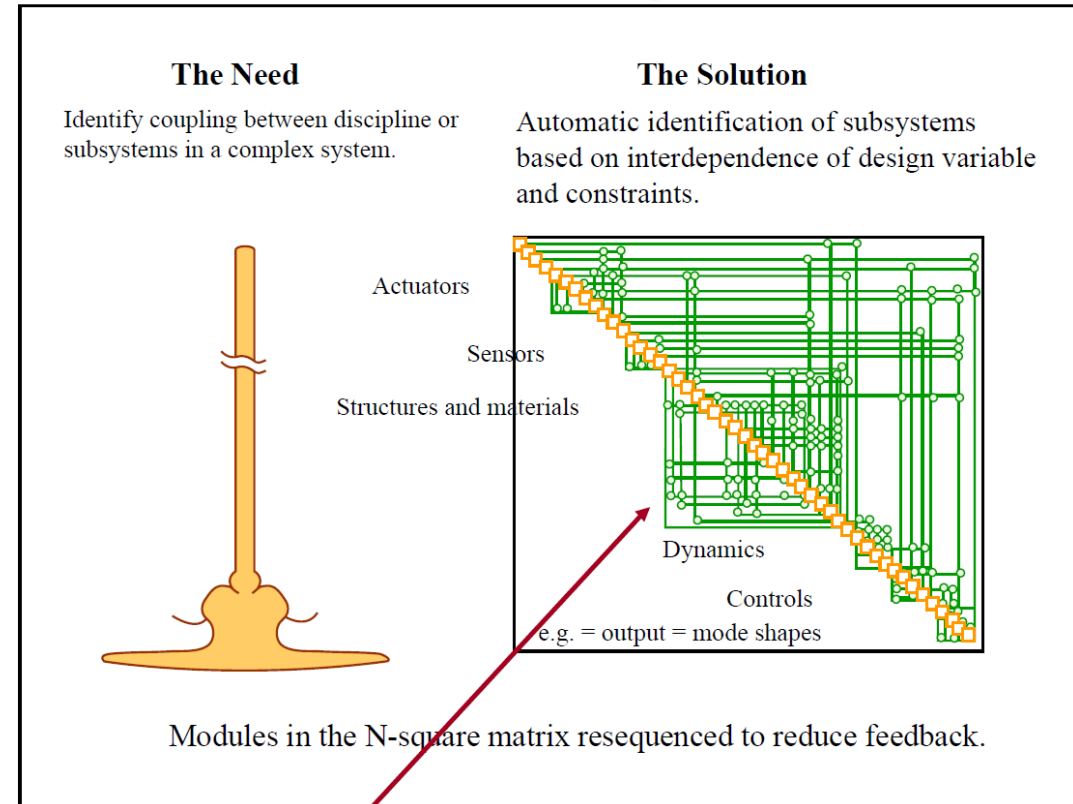
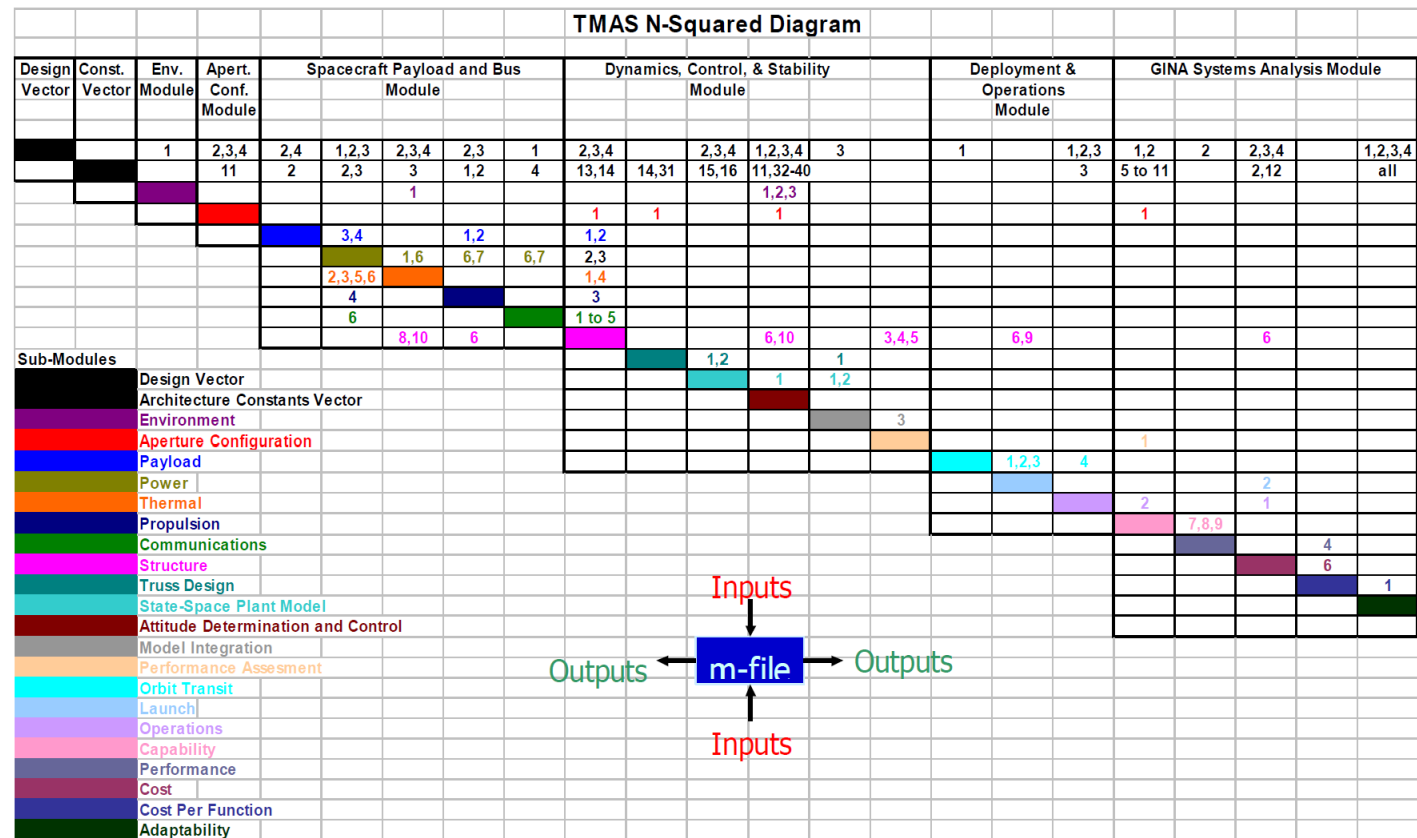


Image by MIT OpenCourseWare.

Systematic permutation groups and  
reduces number of feedback loops

# Esempio





## Approccio da seguire

---

La codifica dei moduli può essere eseguita in parallelo, una volta decisa la struttura di I/O

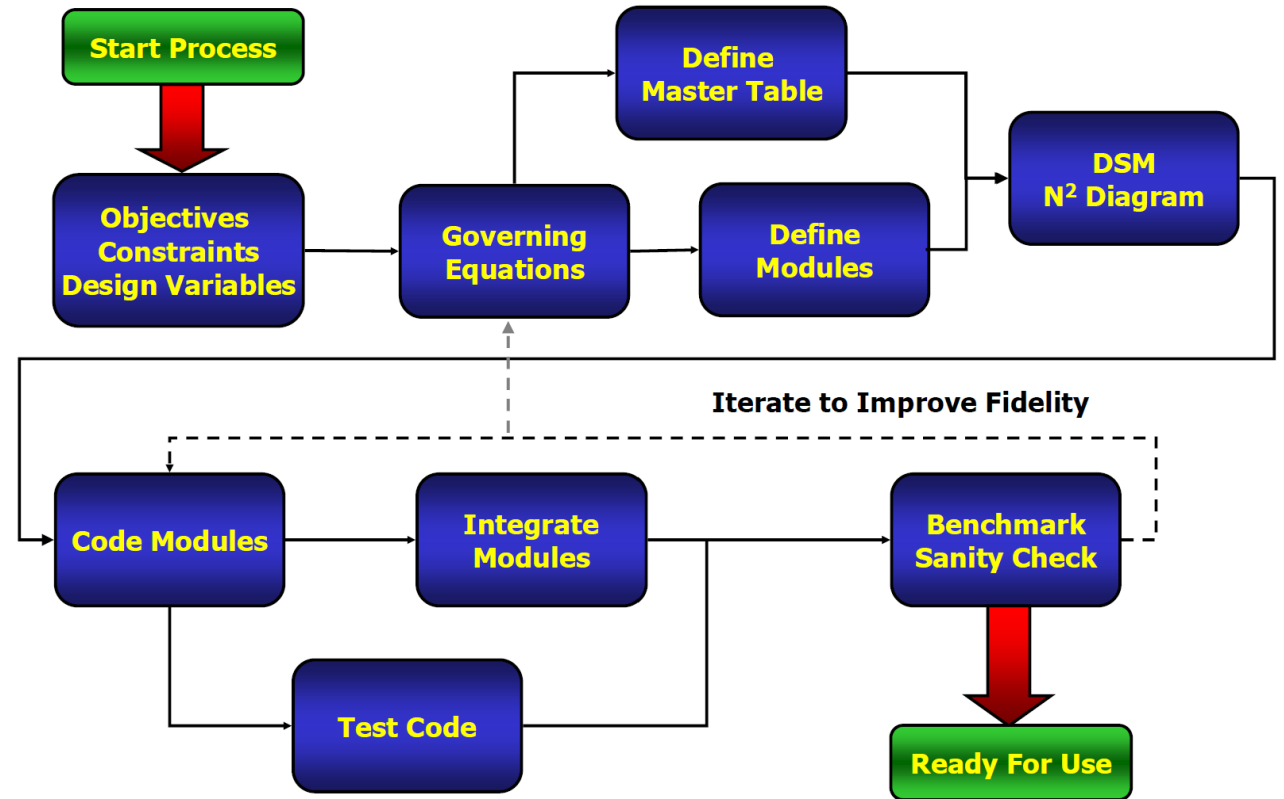
Utilizzare dati di input "fittizi" per esercitare i moduli in isolamento

Integrare i moduli passo dopo passo a partire dall'angolo in alto a sinistra nel diagramma N2

Eseguire un test di simulazione end-to-end prima del rilascio

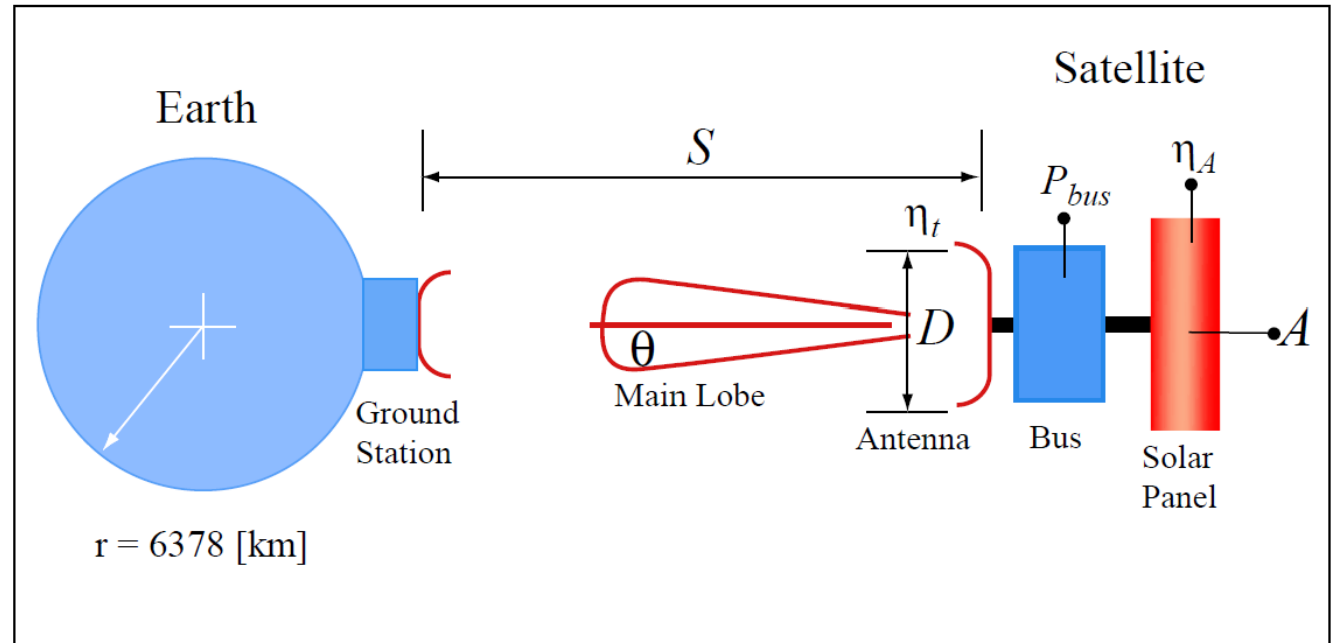
Benchmark ("validazione") della simulazione rispetto a casi noti (dati sperimentali)

# Iterazioni nella fase di programmazione procedure



## Esempio: Progettazione di un satellite geosincrono per telecomunicazioni

- **Problema di progettazione (Definire variabili, obiettivi, vincoli):**
- Come devono essere dimensionati l'antenna ( $D$ ) e il pannello solare ( $A$ ) per un dato periodo orbitale ( $p$ ) in modo tale da soddisfare un requisito di velocità di trasmissione dati ( $R=R_{req}$ ), riducendo al minimo il costo ( $C$ )?



# Equazioni costituenti

Objective:  $\min C$ , Constraint:  $R \geq R_{req}$

Communications:  $R = \alpha P_t \frac{D^2 \eta_t}{16 S^2}$  [bps]  
(link budget)

Power:  $P_t = A \eta_A W_o \cos \theta_{avg} - P_{bus}$  [W]  
(power budget)

Orbits:  $p = 1.66 \cdot 10^{-4} S + r_E^{3/2}$  [min]  
(orbital period)

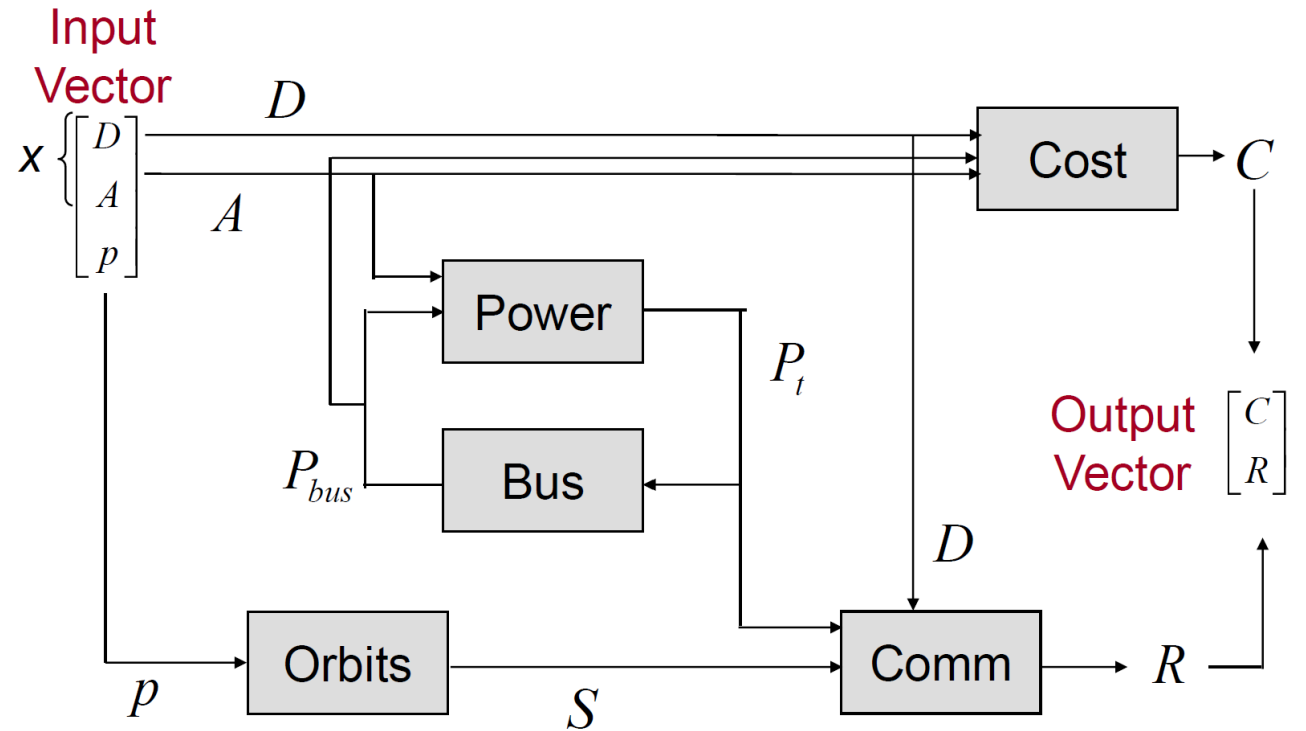
Cost:  $C = 2500 \cdot D^2 + 12000 \cdot A + 1 + 100 \cdot P_{bus}$  [\$]  
(cost budget)

Bus Engineering:  $P_{bus} = 10 \cdot \sqrt{P_t}$  [W]

# Tabella dati

|              |                         |                     |             |
|--------------|-------------------------|---------------------|-------------|
| $D$          | Antenna Diameter        | [m]                 | design var. |
| $A$          | Solar Panel Area        | [m <sup>2</sup> ]   | design var. |
| $p$          | Orbital Period          | [min]               | design var. |
| $R$          | Data Rate               | [bps]               | constraint  |
| $C$          | Cost                    | [\$]                | objective   |
| $P_t$        | Transmitter Power       | [W]                 | dependent   |
| $P_{bus}$    | Bus Power               | [W]                 | dependent   |
| $\theta_a$   | Sun incidence angle     | [deg]               | parameter   |
| $\eta_{a,t}$ | array/xmit efficiencies | [%]                 | parameter   |
| $S$          | Orbital altitude        | [km]                | dependent   |
| $\alpha$     | constant                | [-]                 | parameter   |
| $W_o$        | Solar constant          | [W/m <sup>2</sup> ] | parameter   |

# Diagramma moduli

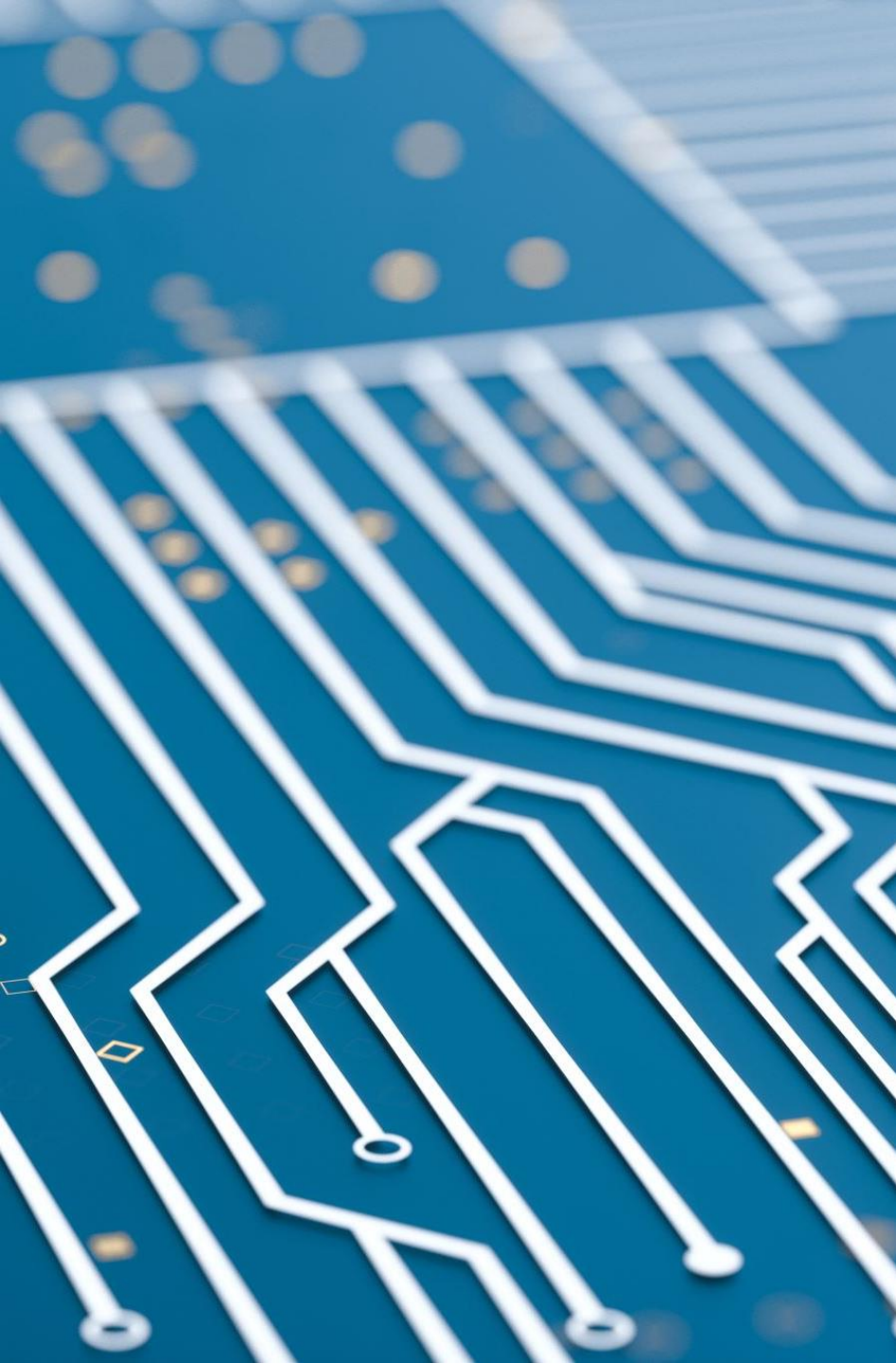




|    |        |      |       |     |      |     |
|----|--------|------|-------|-----|------|-----|
| In | p      | D    | A     |     | D,A  |     |
|    | Orbits | S    |       |     |      |     |
|    |        | Comm |       |     |      | R   |
|    |        | Pt   | Power | Pt  |      |     |
|    |        |      | Pbus  | Bus | Pbus |     |
|    |        |      |       |     | Cost | C   |
|    |        |      |       |     |      | Out |

iterative block

Diagramma  
N2



# Problematich computazionali

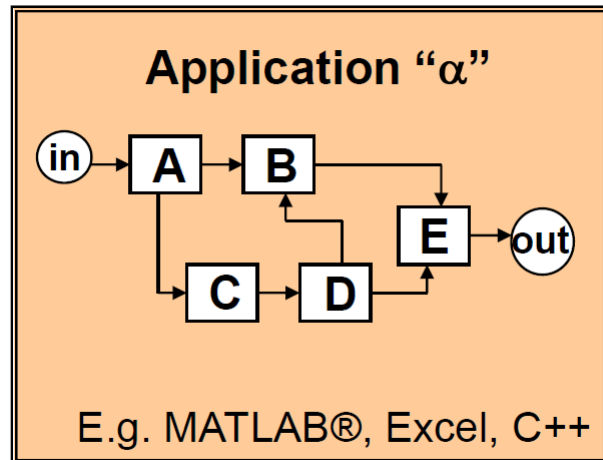
- Le tecnologie informatiche hanno cambiato l'ambiente della progettazione ingegneristica, consentendo l'MDO
- Hardware: Progressi in termini di velocità del processore, memoria e storage
- Software: Potenti programmi di analisi e simulazione disciplinare (ad es. Nastran, Fluent ...)
- Questo crea anche nuove difficoltà: la maggior parte delle attività coinvolge programmi autonomi e molti ingegneri trascorrono il 50-80% del loro tempo a organizzare i dati e a spostarli avanti e indietro tra le applicazioni

**I dati devono essere condivisi più facilmente tra le discipline**

# Problematiche computazionali

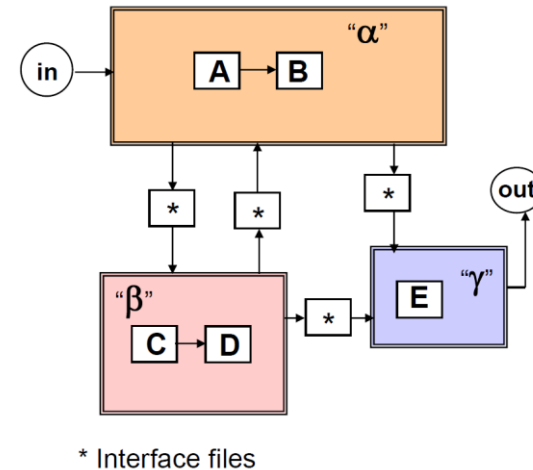
Caso 1:

All'interno di un'applicazione su lo stesso computer



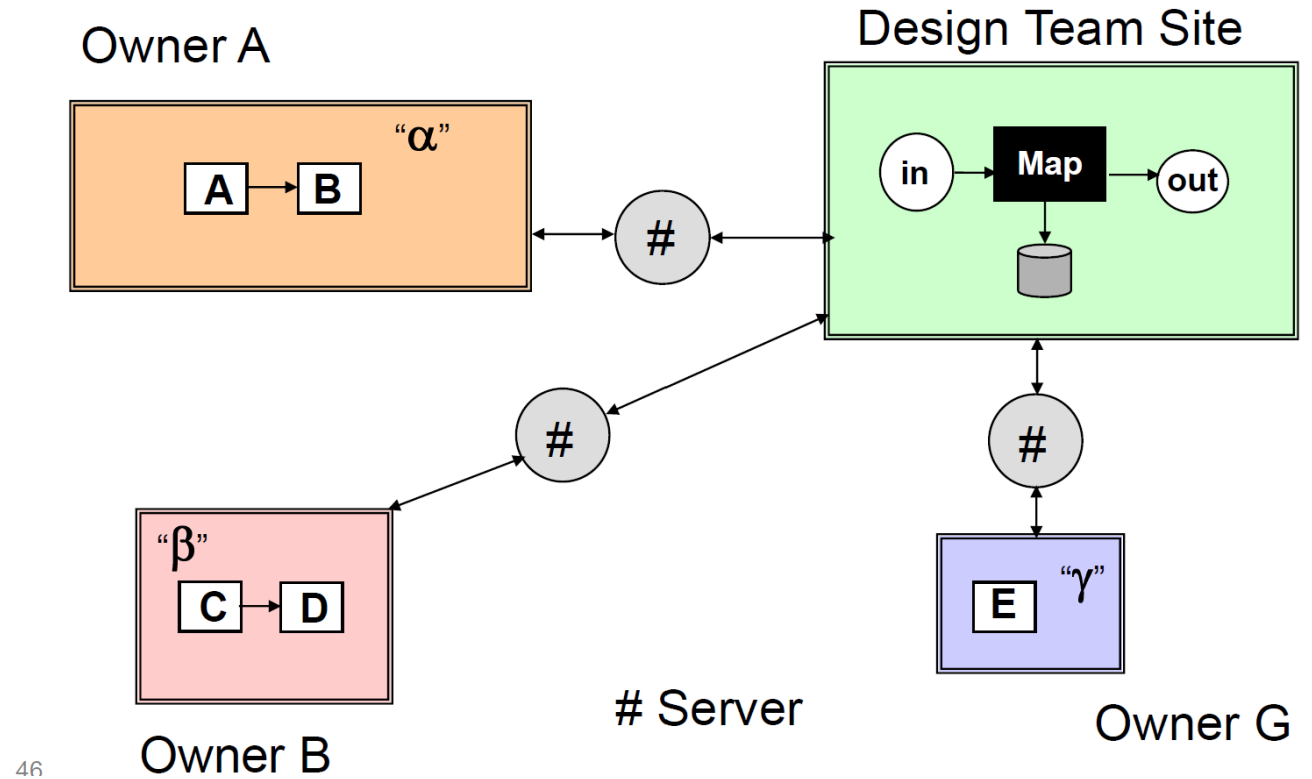
Caso 2:

Tra applicazioni diverse sullo stesso computer



# Implementazione e titolarità

Caso 3: in un ambiente LAN o  
WAN



# Standard Optimization Problem

Given

$$x \in \mathbb{R}^n$$

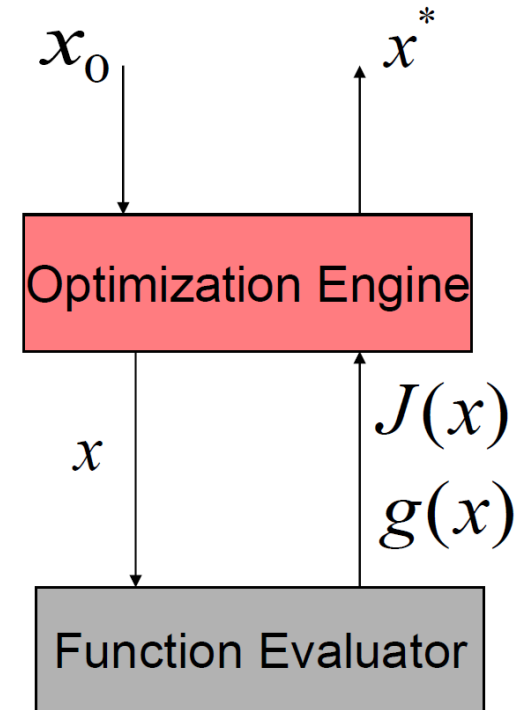
$$J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^z$$

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Solve the problem

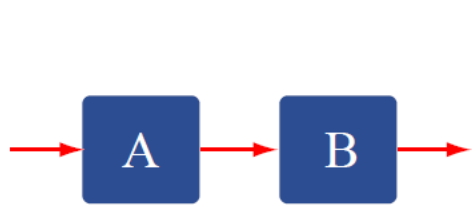
$$\min J(x)$$

$$\text{s.t. } g(x) \geq 0$$

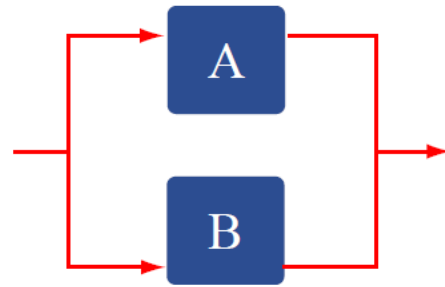
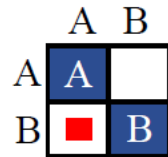


3 That is, find  $x^*$  s.t.  $J(x^*) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in \text{dom}(J) \cap \text{dom}(g)$

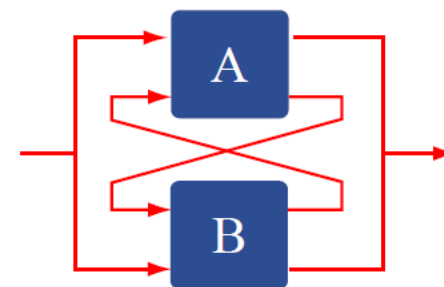
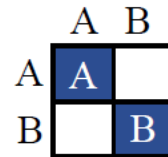
# Flusso informativo



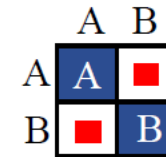
Dependent Tasks (Series)



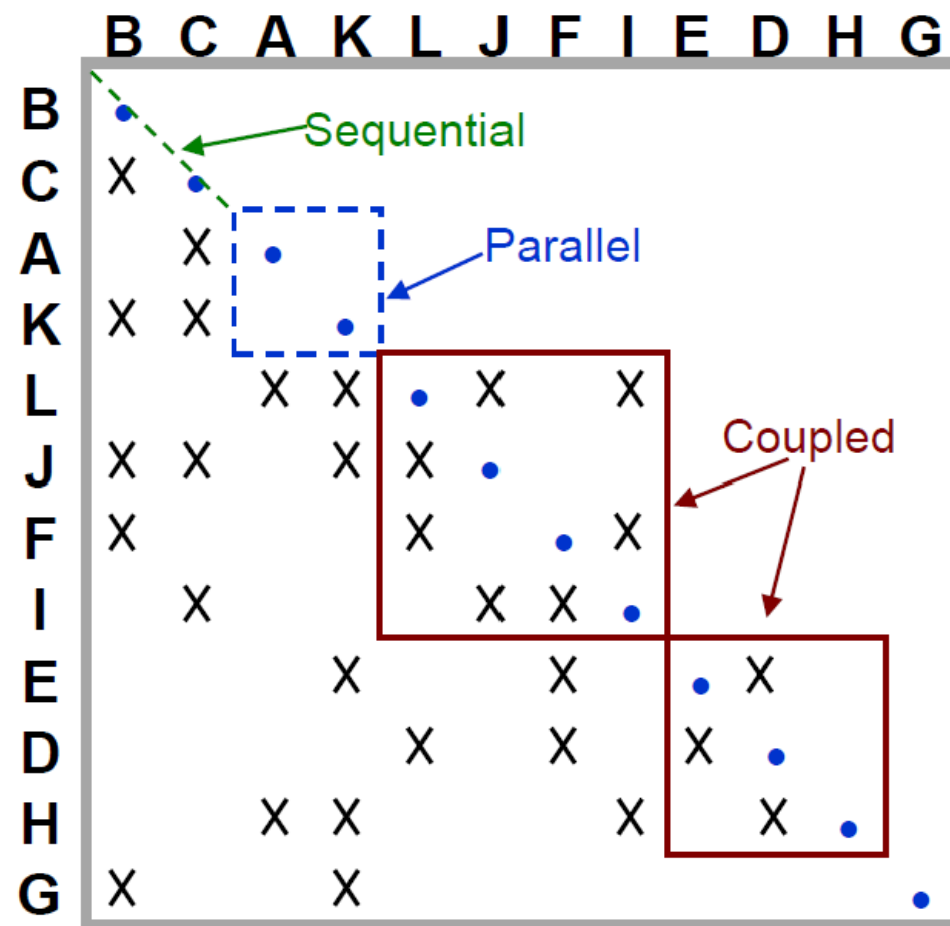
Independent Tasks (Parallel)



Interdependent Tasks (Coupled)

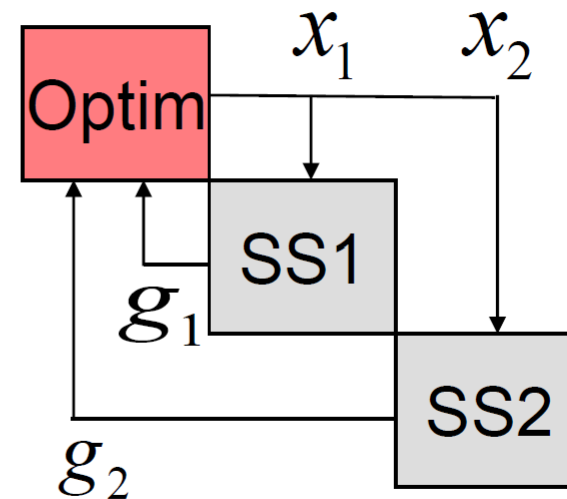
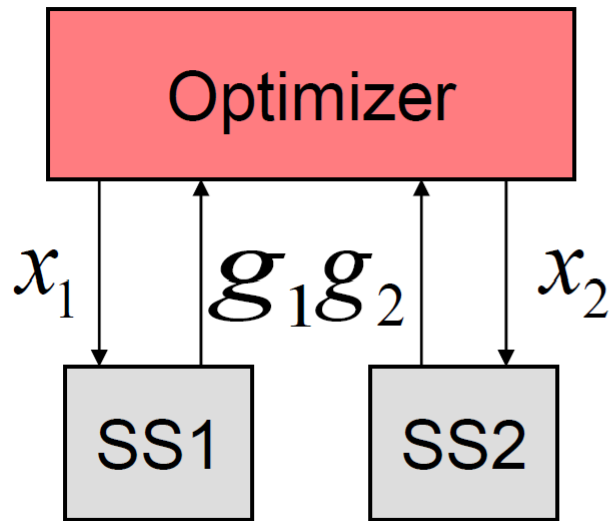


\_\_\_\_\_



# Advantages of Decoupling

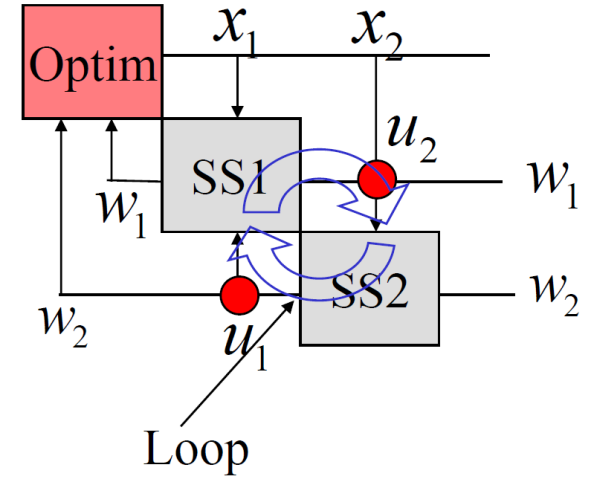
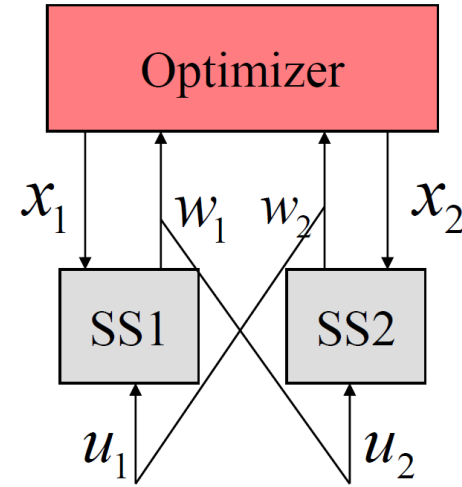
Semplificare G      $g(x) = (g_1(x_1), g_2(x_2))$



Quindi G1 e G2 possono essere valutate in parallelo



# Coupling



L'ipotesi dei vincoli disaccoppiati non è generale. I sottosistemi possono essere accoppiati e possono sorgere loop

# Variabili surrogate ("Tearing")

Il loop dell'informazione può essere interrotto introducendo variabili surrogate.

$$\min J(x_1, x_2)$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} w_1 &= g_1(x_1, g_2(x_2, w_1)) \geq 0 \\ w_2 &= g_2(x_2, g_1(x_1, w_2)) \geq 0 \end{aligned}$$



$$\min J(x_1, x_2)$$

s.t.

$$g_1(x_1, u_1) \geq 0$$

$$g_2(x_2, u_2) \geq 0$$

$$u_2 - g_1(x_1, u_1) = 0$$

$$u_1 - g_2(x_2, u_2) = 0$$

L'introduzione di variabili surrogate interrompe il ciclo di informazioni ma aumenta il numero di variabili decisionali.

# Esempio numerico

$$\begin{aligned} \min J_1 + J_2 \\ \text{s.t. } w_1 \geq 0 \\ w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{where } J_1 = x_1^2 + x_2^2$$

$$J_2 = (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2$$

$$w_1 = x_1^3 - x_2^3 + 2w_2$$

$$w_2 = x_3^3 - x_4^3 + 2w_1$$

decoupled



$$\min x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2$$

$$\text{s.t. } w_1 = x_1^3 - x_2^3 + 2x_5 \geq 0$$

$$w_2 = x_3^3 - x_4^3 + 2x_6 \geq 0$$

$$x_1^3 - x_2^3 + 2x_5 - x_6 = 0$$

$$x_3^3 - x_4^3 + 2x_6 - x_5 = 0$$



coupled

$$\min x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2$$

$$\text{s.t. } w_1 = g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$$

$$w_2 = g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$$

Solution:

$$x = (0, 0, 4, 3, 12 \frac{1}{3}, 24 \frac{2}{3})$$

MATLAB® 5.3

coupled: 356,423 FLOPS 4.844s

uncoupled: 281,379 FLOPS 0.453s

# Single-level and Multi-Level Frameworks

## **Single-level (Analisi distribuite)**

- Le singole discipline forniscono le analisi
- Tutta l'ottimizzazione viene fatta a livello di sistema centrale



Decomposizione  
non gerarchica

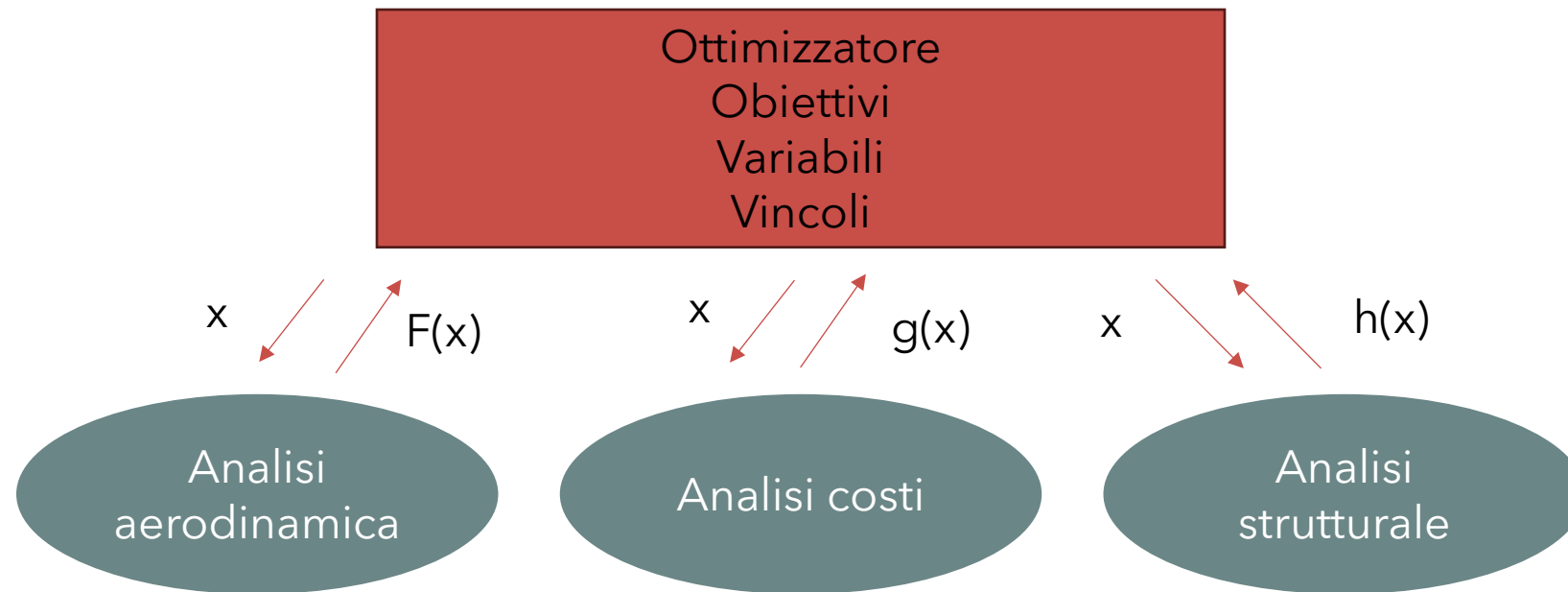
## **Multi-level (Design Distribuito)**

- Fornire modelli disciplinari con compiti di progettazione
- Le ottimizzazioni vengono eseguite a livello di modulo disciplinare e a livello di sistema centrale



Decomposizione  
gerarchica

# Single Level (analisi distribuita)



- Durante l'ottimizzazione, il codice di supervisione tiene traccia dei valori delle variabili di progettazione e dell'obiettivo
- I valori delle variabili di progetto vengono modificati in base all'algoritmo di ottimizzazione
- Ai modelli disciplinari viene chiesto di valutare vincoli/obiettivi

## Multi-level (Distributed Design)



I metodi di ottimizzazione multilivello distribuiscono il processo decisionale in tutto i sistemi



I modelli a livello di sottosistema sono dotati di attività di progettazione

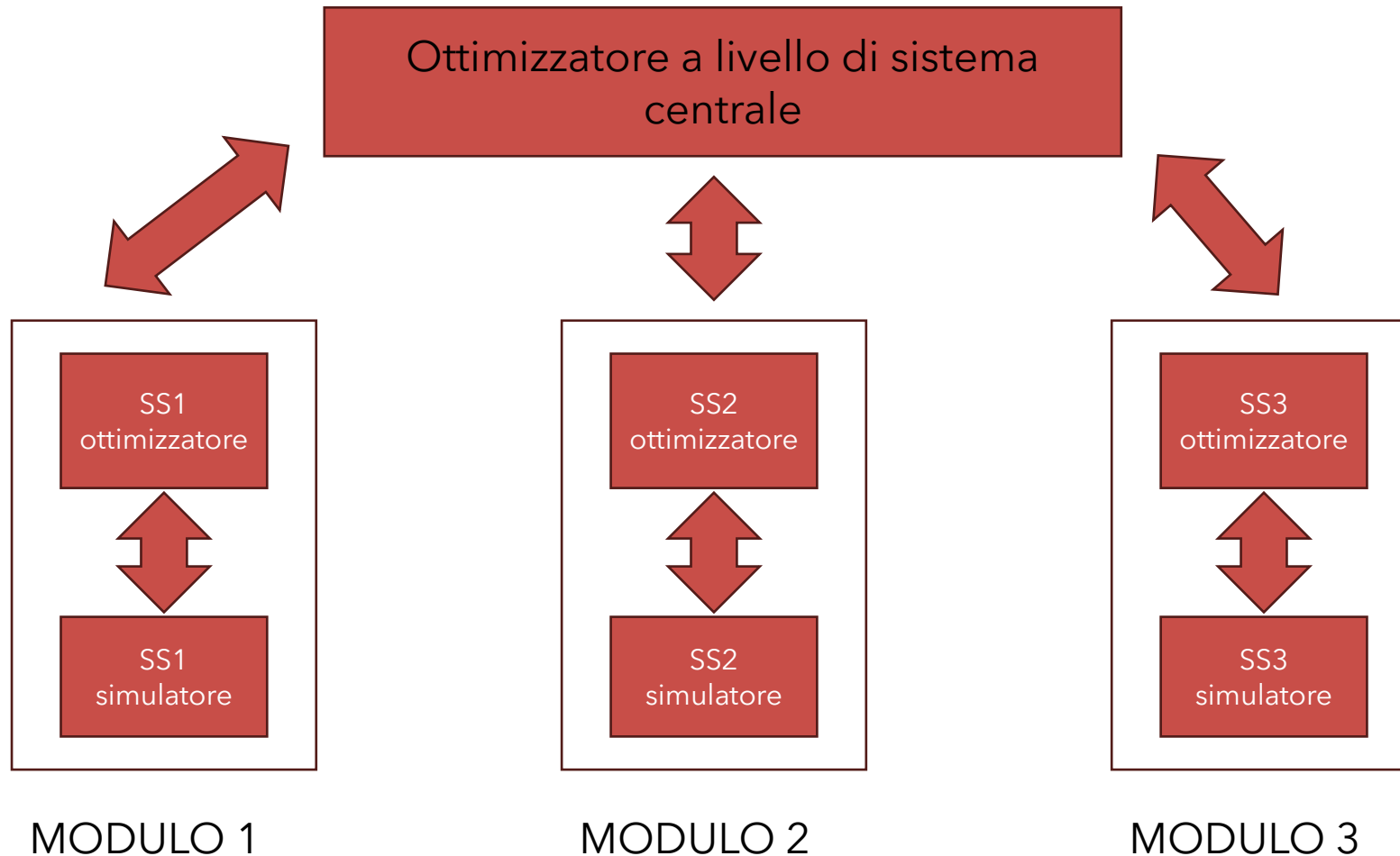


L'ottimizzazione viene eseguita a livello di sottosistema oltre che a livello di sistema



Fornire una certa autonomia ai gruppi di progettazione e ridurre i requisiti di comunicazione.

# Multi-level (Distributed Design)



# Ottimizzazione collaborativa (CO)

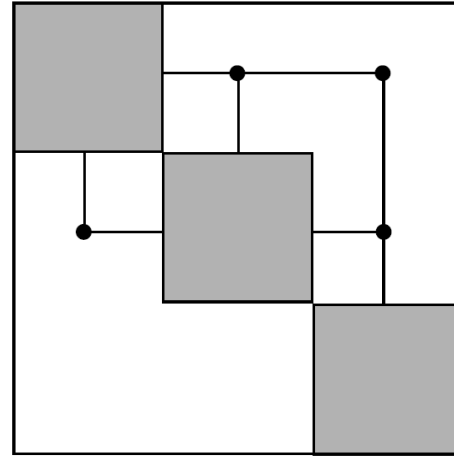
I team disciplinari soddisfano i vincoli locali mentre cercano di far corrispondere i valori target specificati da un coordinatore di sistema

Preserva la libertà di progettazione a livello disciplinare

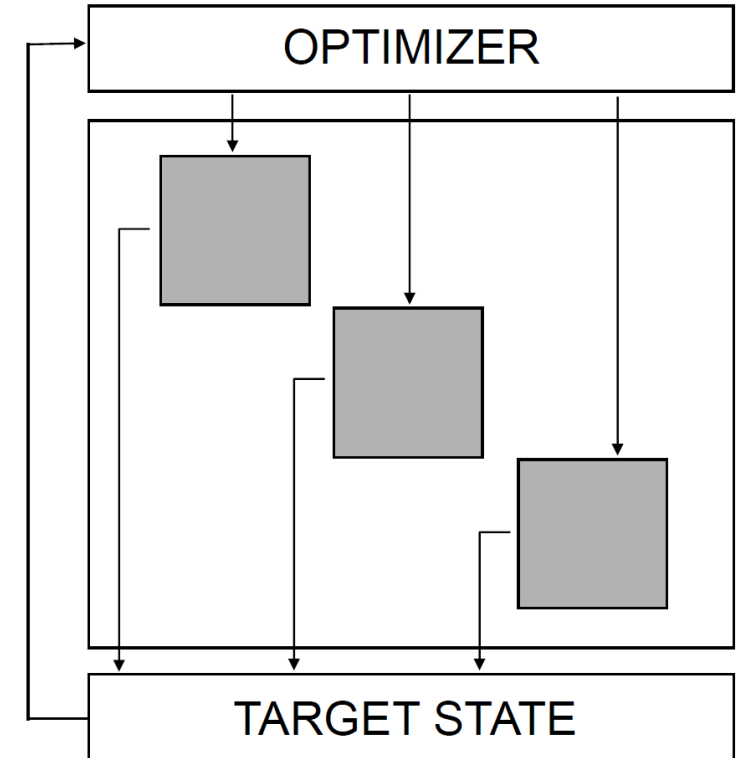
L'ottimizzazione CO viene tipicamente utilizzata per risolvere problemi multidisciplinari decomposti.



# Ottimizzazione collaborativa



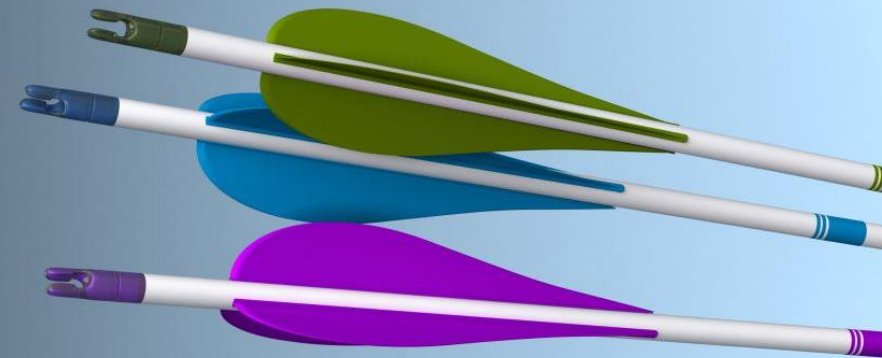
Coupled



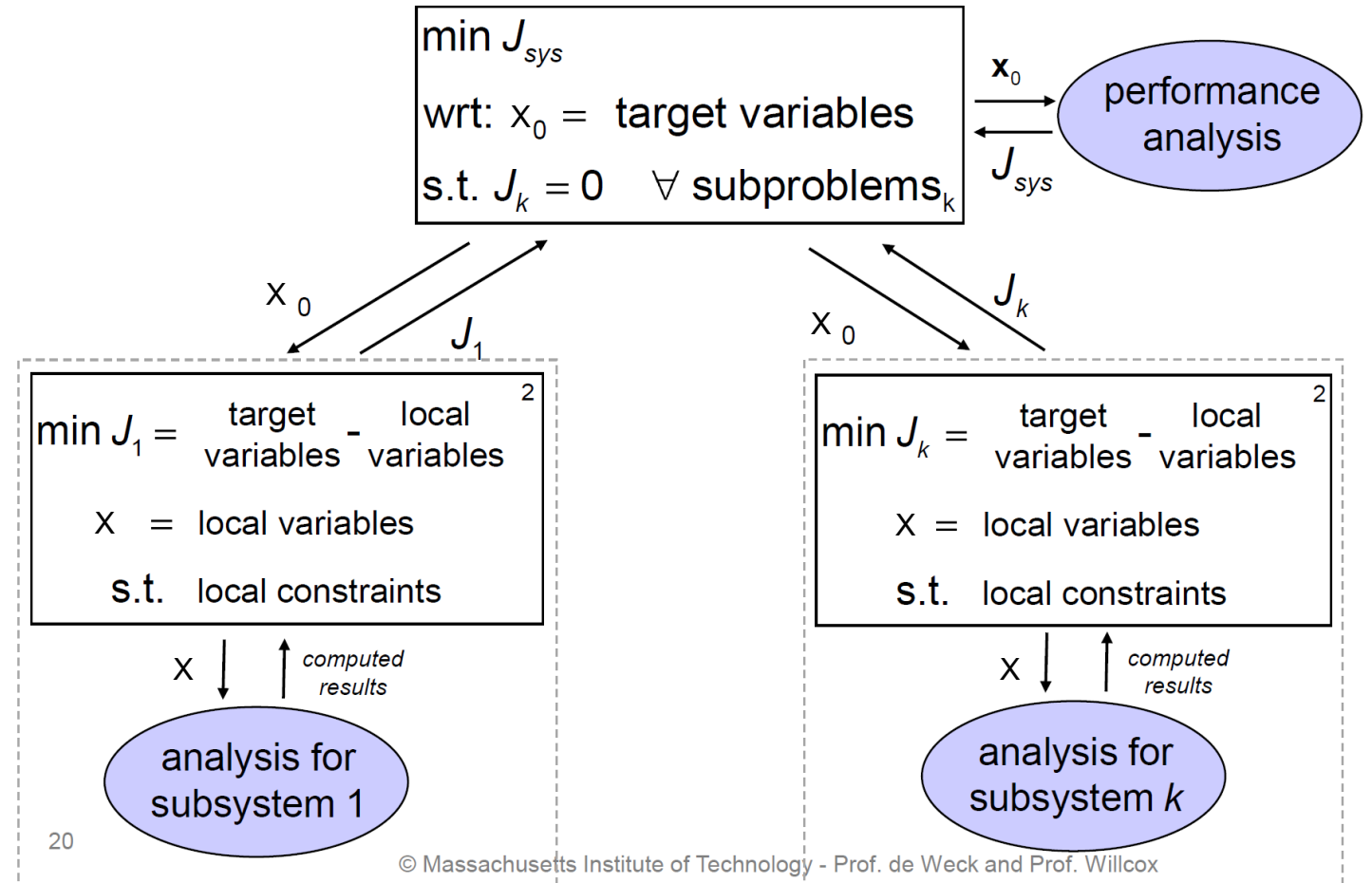
Uncoupled

# Ottimizzazione collaborativa

- Due livelli di ottimizzazione:
  - Un ottimizzatore a livello di sistema fornisce un set di target.
    - Questi obiettivi vengono scelti per ottimizzare la funzione obiettivo a livello di sub-sistema
  - Un ottimizzatore di sottosistema trova una progettazione che riduce al minimo la differenza tra gli stati correnti e i target.
    - Il sottosistema è soggetto a vincoli locali



# Schema operativo CO



## Sottosistema CO

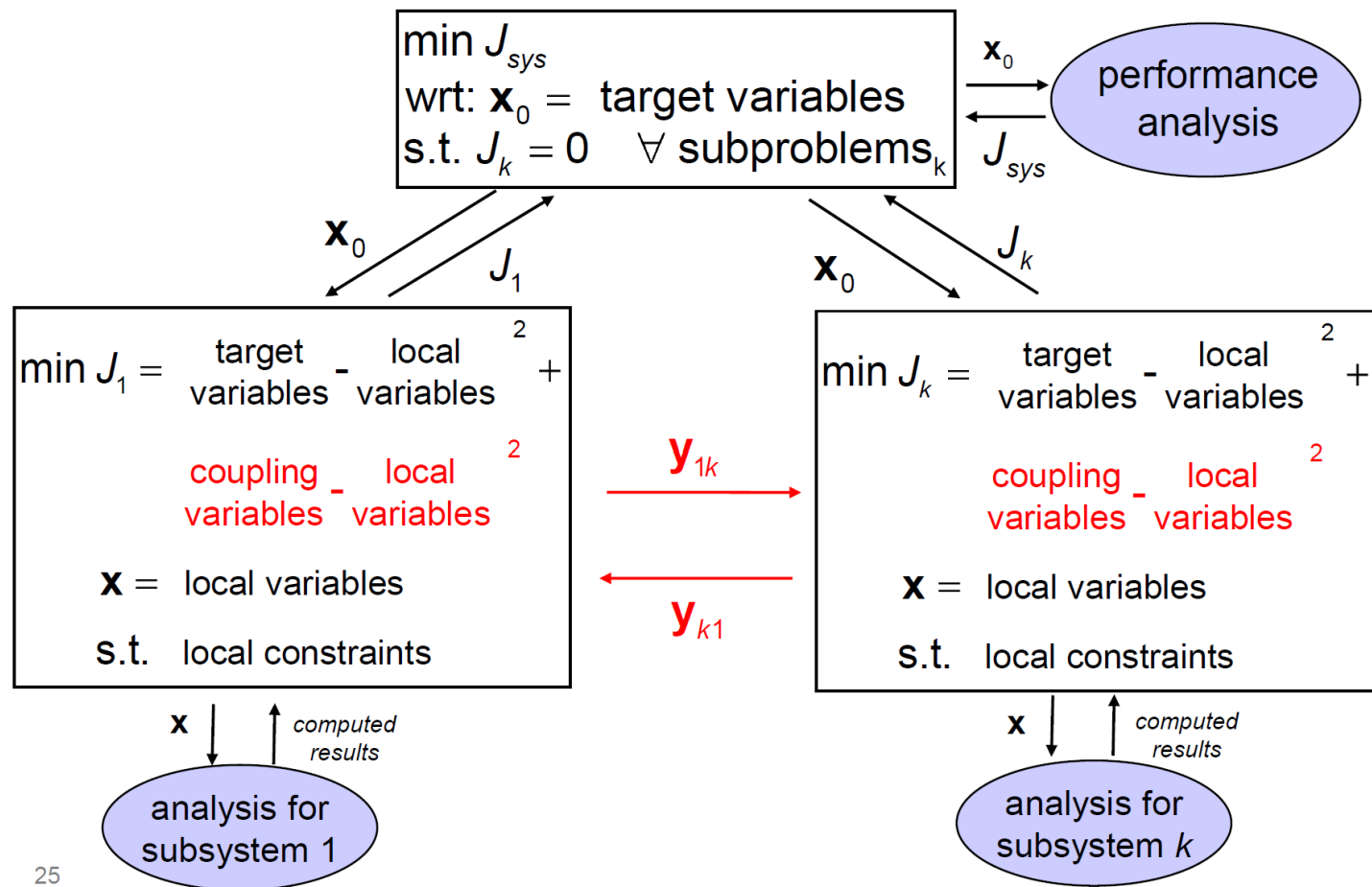
- L'ottimizzatore del sottosistema modifica le variabili locali per ottenere la progettazione migliore per la quale l'insieme di variabili locali e i risultati calcolati corrispondono il più possibile ai target di Sistema
- Devono essere rispettati anche i vincoli locali

$$\begin{aligned} \min J_1 &= \frac{\text{target variables}^2}{\text{local variables}} \\ X &= \text{local variables} \\ \text{s.t.} \quad &\text{local constraints} \end{aligned}$$

# Sistema principale CO

- L'ottimizzatore a livello di sistema modifica le variabili target per migliorare l'obiettivo e ridurre le differenze  $J_k$
- $J_k=0$  sono denominati vincoli di compatibilità
- I vincoli di compatibilità vengono portati a zero, ma possono essere violati durante l'ottimizzazione

$$\begin{array}{ll}\min & J_{sys} \\ \text{wrt:} & x_0 = \text{target variables} \\ \text{s.t.} & J_k = 0 \quad \forall \text{ subproblems}_k\end{array}$$

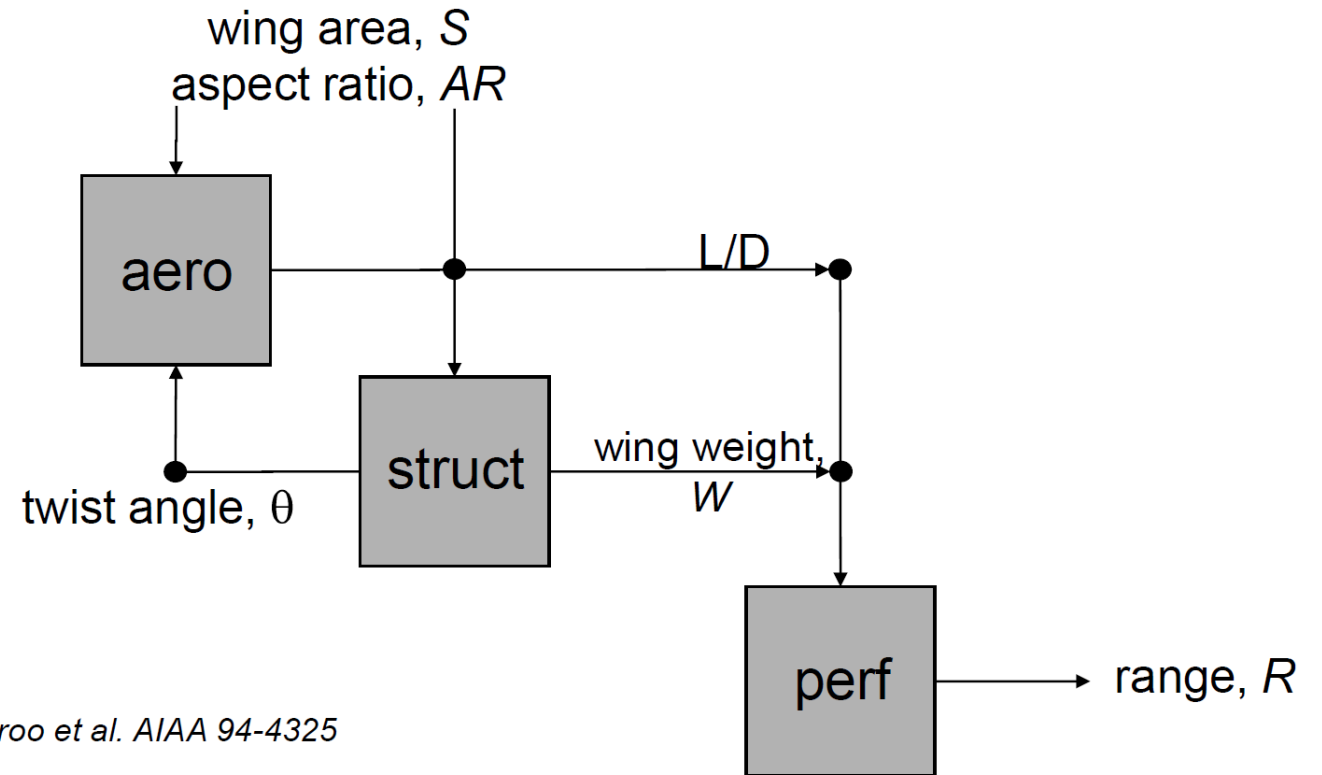


# CO schema

## Esempio CO: progettazione aereo Kroo et al. AIAA 94-4325

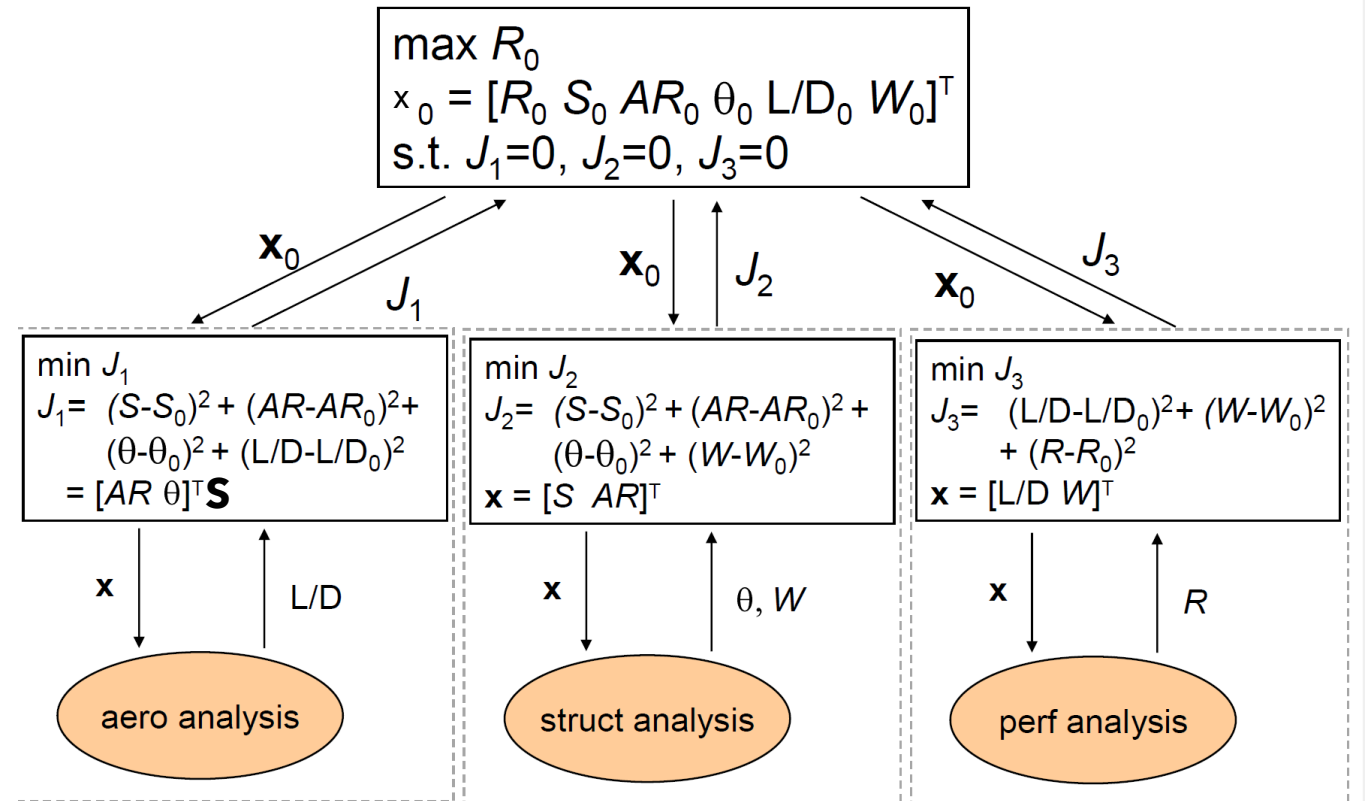
- **Design:**

Consider a simple aircraft design problem: maximize range for a given take-off weight by choosing wing area, aspect ratio, twist angle,  $L/D$ , and wing weight.



Kroo et al. AIAA 94-4325

# Esempio CO: progettazione aereo





# Multiobiettivo vs Multidisciplinare

## Multiobjective Optimization

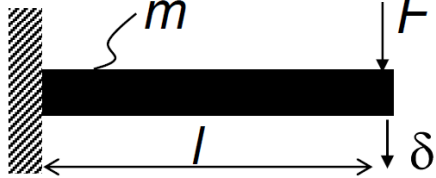
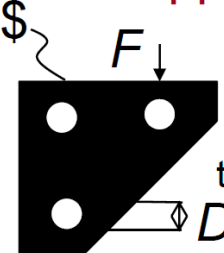
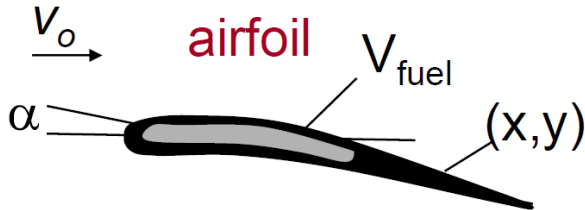
- Optimizing conflicting objectives
- e.g., Cost, Mass, Deformation
- Issues: Form Objective Function that represents designer preference! Methods used to date are largely primitive.

## Multidisciplinary Design Optimization

- Optimization involves several disciplines
- e.g. Structures, Control, Aero, Manufacturing
- Issues: Human and computational infrastructure, cultural, administrative, communication, software, computing time, methods

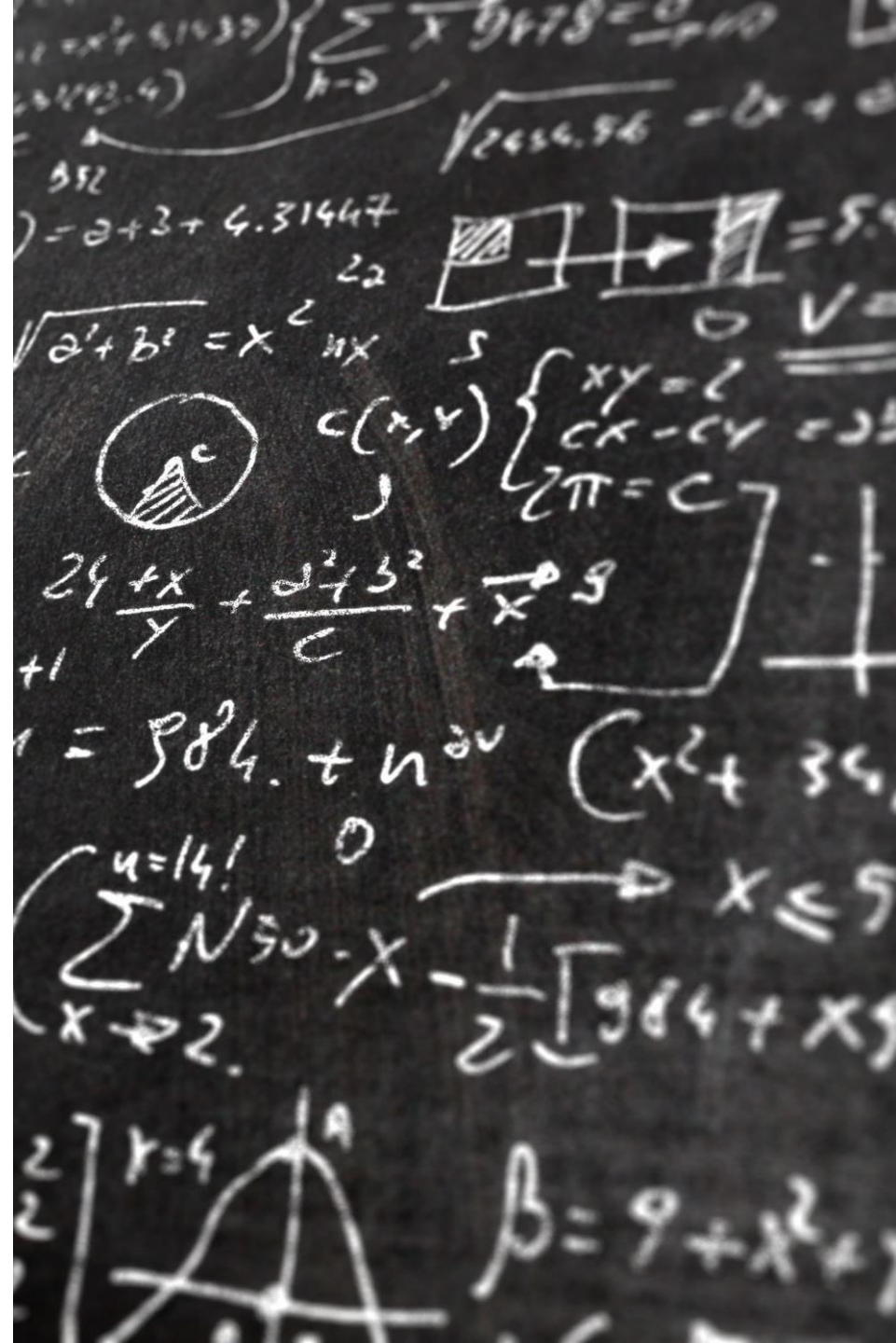
All optimization is (or should be) multiobjective

# Multiobiettivo vs Multidisciplinare

|                  |                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| single objective | single discipline<br><b>cantilever beam</b><br><br>Minimize displacement<br>s.t. mass and loading constraint                                    | multiple disciplines<br><b>support bracket</b><br><br>Minimize stamping costs (mfg) subject to loading and geometry constraint |
|                  | multiple obj.<br>single discipline<br><b>airfoil</b><br><br>Maximize $C_L/C_D$ <u>and</u> maximize wing fuel volume for specified $\alpha, v_o$ | multiple disciplines<br><b>commercial aircraft</b><br>Minimize SFC <u>and</u> maximize cruise speed s.t. fixed range and payload                                                                                  |

# Design of Experiments (DOE)

- Una raccolta di tecniche statistiche che forniscono un modo sistematico per campionare lo spazio di progettazione
- Utile quando si affronta un nuovo problema di cui si sa molto poco sullo spazio di progettazione.
- Studiare gli effetti di più variabili di input su uno o più parametri di output
- Spesso utilizzato prima di impostare un formale problema di ottimizzazione
  - Identificare i fattori chiave tra le potenziali variabili di progettazione
  - Identificare gli intervalli di variabili di progettazione appropriati
  - Identificare i valori ottenibili della funzione obiettivo
- Spesso DOE viene utilizzato nel contesto di Robust Design.



$y = g(x)$

Secant Lines

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$
$$= 2x$$

# DOE

- Variabili di progettazione = fattori
- Valori delle variabili di progetto = livelli
- Fattori di controllo = variabili che possiamo controllare ad es. spessore della palettatura
- **Fattori stocastici (noise factors)** = variabili sulle quali non abbiamo alcun controllo per esempio: variazione dello spessore della palettatura in fase di produzione
- Risultati = osservazioni (= funzioni obiettivo)



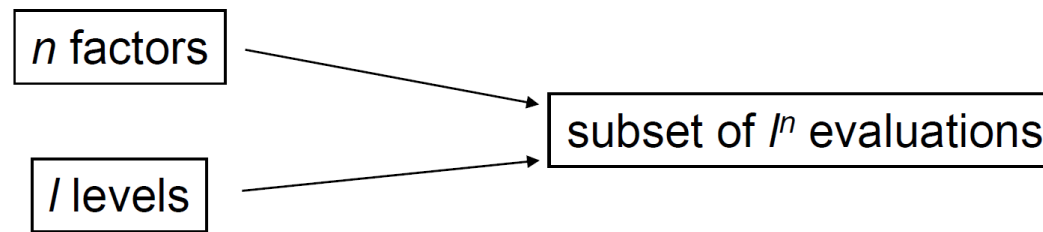
# DOE

Diverse metodologie:

- Random;
- Fattoriali;
- Latin Square;
- Adattativi

# Vettori Ortogonali (reduced factorial)

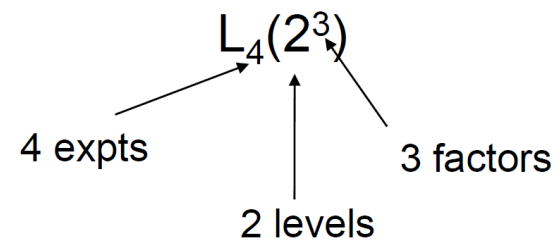
- Specifica i livelli per ciascun fattore;
- Utilizzare gli array per scegliere un sottoinsieme dell'esperimento fattoriale completo;
- Sottoinsieme selezionato per mantenere l'ortogonalità tra livelli di fattori e sottoinsieme di valutazioni;



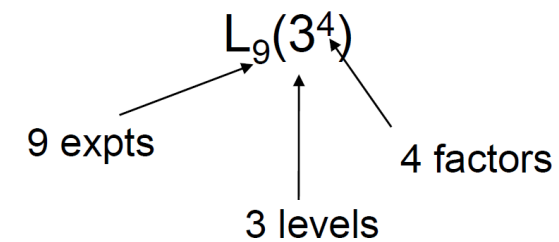
- Non cattura tutte le interazioni, ma è efficiente;
- L'esperimento è equilibrato.

# Vettori Ortogonal

| Expt No. | Factor |    |    |
|----------|--------|----|----|
|          | A      | B  | C  |
| 1        | A1     | B1 | C1 |
| 2        | A1     | B2 | C2 |
| 3        | A2     | B1 | C2 |
| 4        | A2     | B2 | C1 |



| Expt No. | Factor |    |    |    |
|----------|--------|----|----|----|
|          | A      | B  | C  | D  |
| 1        | A1     | B1 | C1 | D1 |
| 2        | A1     | B2 | C2 | D2 |
| 3        | A1     | B3 | C3 | D3 |
| 4        | A2     | B1 | C2 | D3 |
| 5        | A2     | B2 | C3 | D1 |
| 6        | A2     | B3 | C1 | D2 |
| 7        | A3     | B1 | C3 | D2 |
| 8        | A3     | B2 | C1 | D3 |
| 9        | A3     | B3 | C2 | D1 |





# Esempio DOE

| Expt No. | Aircraft | Seats (S) | Range (R) | Mfr (M) | Price (\$M) |
|----------|----------|-----------|-----------|---------|-------------|
| 1        | 717      | S1        | R1        | M1      | 24.0        |
| 2        | A318-100 | S1        | R1        | M2      | 29.3        |
| 3        | 737-700  | S1        | R2        | M1      | 33.0        |
| 4        | A319-100 | S1        | R2        | M2      | 35.0        |
| 5        | 737-900  | S2        | R1        | M1      | 43.7        |
| 6        | A321-200 | S2        | R1        | M2      | 48.0        |
| 7        | 737-800  | S2        | R2        | M1      | 39.1        |
| 8        | A320-200 | S2        | R2        | M2      | 38.0        |

100<S1<150      150<S2<200  
2000<R1<2800    2800<R2<3500  
M1=Boeing        M2=Airbus

Sources:  
Seats/Range data: Boeing Quick Looks  
Price data: Aircraft Value News  
Airline Monitor, May 2001 issue



# DOE Esempio

$$\begin{aligned}\text{mean of experiments with M1} &= 1/4*(24.0+33.0+43.7+39.1) \\ &= 34.95\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mean of experiments with M2} &= 1/4*(29.3+35.0+48.0+38.0) \\ &= 37.58\end{aligned}$$

$$\text{Main effect of Boeing (M1)} = 34.95 - 36.26 = -1.3$$

$$\text{Main effect of Airbus (M2)} = 37.58 - 36.26 = 1.3$$

$$\text{Main effect of manufacturer} = 37.58 - 34.95 = 2.6$$

# DOE: interazioni

Risponde alla domanda: l'effetto di un fattore dipende dal livello di un altro fattore?

Ad esempio: l'effetto del produttore dipende dal fatto che consideriamo aerei a corto o lungo raggio?

L'interazione tra produttore e raggio è definita come metà della differenza tra l'effetto medio del produttore con raggio 2 e l'effetto medio del produttore con raggio 1.

$$\text{mfr} \times \text{range interaction} = \frac{\text{avg mfr effect with range 2} - \text{avg mfr effect with range 1}}{2}$$

# DOE: interazioni

range R1 : expts 1,2,5,6

range R2 : expts 3,4,7,8

| Expt No. | Seats (S) | Range (R) | Mfr (M) | Price (\$M) |
|----------|-----------|-----------|---------|-------------|
| 1        | S1        | R1        | M1      | 24.0        |
| 2        | S1        | R1        | M2      | 29.3        |
| 3        | S1        | R2        | M1      | 33.0        |
| 4        | S1        | R2        | M2      | 35.0        |
| 5        | S2        | R1        | M1      | 43.7        |
| 6        | S2        | R1        | M2      | 48.0        |
| 7        | S2        | R2        | M1      | 39.1        |
| 8        | S2        | R2        | M2      | 38.0        |

$$\text{avg mfr effect with range 1} = \frac{(P_2 - P_1) + (P_6 - P_5)}{2} = \frac{(29.3 - 24.0) + (48.0 - 43.7)}{2} = 4.8$$

$$\text{avg mfr effect with range 2} = \frac{(P_4 - P_3) + (P_8 - P_7)}{2} = \frac{(35.0 - 33.0) + (38.0 - 39.1)}{2} = 0.45$$

$$\text{mfr} \times \text{range interaction} = \frac{0.45 - 4.8}{2} = -2.2$$

*Interpretation?*

# Visualizzazione spazi n-dimensionali

- Nel MDO è molto importante riuscire a controllare e valutare le relazioni/correlazioni complesse esistenti tra i parametri definiti:
  - Variabili;
  - Obiettivi;
  - Vincoli.

Spesso queste relazioni sono altamente non lineari e di complessa valutazione -- > DOE.

Tecnologie di visualizzazione dello spazio n-dimensionale posso certamente essere un utile strumento per comprendere relazioni complesse.

# Self Organizing Maps (SOM)

- Proposto da T. Kohonen negli anni '80;
- Prende spunto dalla capacità del cervello di organizzare in maniera topografica gli stimoli sensoriali: un determinato tipo di stimolo viene processato in zone specifiche.
- Gli algoritmi che tentano di riprodurre questa caratteristica vengono detti *auto-organizzanti*; le SOM ne sono l'esempio principale.
- Le SOM associano i dati da analizzare a specifiche unità di output disposte in maniera topologicamente ordinata in un piano; producono in questo modo una rappresentazione ordinata dei dati su una mappa.

# Algoritmo SOM

- 1)**  $\mathbf{X}^T = (X_1, X_2 \dots X_d)$ , campionamento dello spazio delle *features*.  
Crea una griglia con  $i$  nodi ( $i=1, \dots, k$ ) in 2D. A ciascun nodo viene assegnato un vettore  $d$ -dimensionale  $\mathbf{W}^{(i)T} = (W_1^{(i)} \ W_2^{(i)} \dots W_d^{(i)})$ ,  $\mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)}(t)$  (*codebook*), che cambia con la variabile temporale discreta  $t$ .
- 2)** Inizializza: valori casuali  $\mathbf{W}^{(i)}(0)$  per ciascun nodo  $i=1 \dots K$ .  
Definisce i parametri iniziali della *neighborhood function*  
 $\alpha(t)h(|r_i - r_c|/\sigma(t), t)$
- 3)** Itera: seleziona un vettore di input  $\mathbf{X}^T$

# Algoritmo SOM - Ciclo

**3.1)** Calcola distanze  $d(\mathbf{X}, \mathbf{W}^{(i)})$ , trova  $\mathbf{W}^{(c)}$  più simile a (più vicino a)  $\mathbf{X}$

**3.2)** Aggiorna i valori delle componenti di tutti i nodi nell'intorno  $O(r_c)$

**3.3)** Diminuisce il valore  $h_o(t)$  e restringe il raggio dei vicini  $\sigma(t)$ .

**3.4)** Se raggiunto il numero di cicli desiderato, termina

**4)** Calcola l'errore di quantizzazione  
(qualità della mappa ottenuta)

$$E_q(\mathbf{W}) = \left( \sum_{c=1}^m \varepsilon_c(\mathbf{W})^2 \right)^{1/2}$$

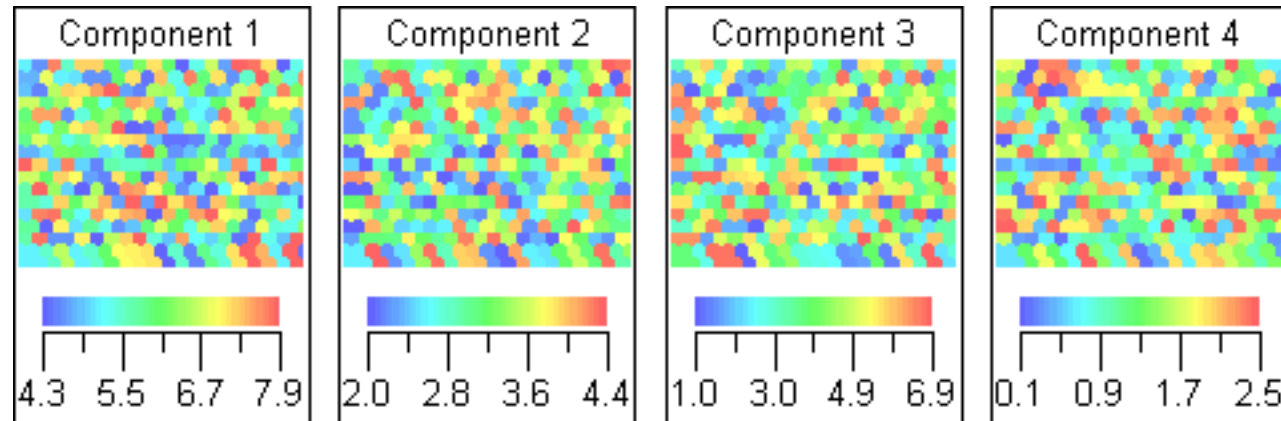
# Utilizzo delle SOM- Iris - Dati

| SepalL | SepalW | PetalL | PetalW | Tipo       |
|--------|--------|--------|--------|------------|
| 4.6    | 3.6    | 1.0    | 0.2    | Setosa     |
| 5.1    | 3.3    | 1.7    | 0.5    | Setosa     |
| 4.8    | 3.4    | 1.9    | 0.2    | Setosa     |
| 5.0    | 3.0    | 1.6    | 0.2    | Setosa     |
| 5.0    | 3.4    | 1.6    | 0.4    | Setosa     |
| 6.5    | 2.8    | 4.6    | 1.5    | Versicolor |
| 5.7    | 2.8    | 4.5    | 1.3    | Versicolor |
| 6.3    | 3.3    | 4.7    | 1.6    | Versicolor |
| 4.9    | 2.4    | 3.3    | 1.0    | Versicolor |
| 6.6    | 2.9    | 4.6    | 1.3    | Versicolor |
| 7.6    | 3.0    | 6.6    | 2.1    | Virginica  |
| 4.9    | 2.5    | 4.5    | 1.7    | Virginica  |
| 7.3    | 2.9    | 6.3    | 1.8    | Virginica  |
| 6.7    | 2.5    | 5.8    | 1.8    | Virginica  |
| 7.2    | 3.6    | 6.1    | 2.5    | Virginica  |
| 6.5    | 3.2    | 5.1    | 2.0    | Virginica  |

150 misurazioni di 4 variabili  
3 tipologie

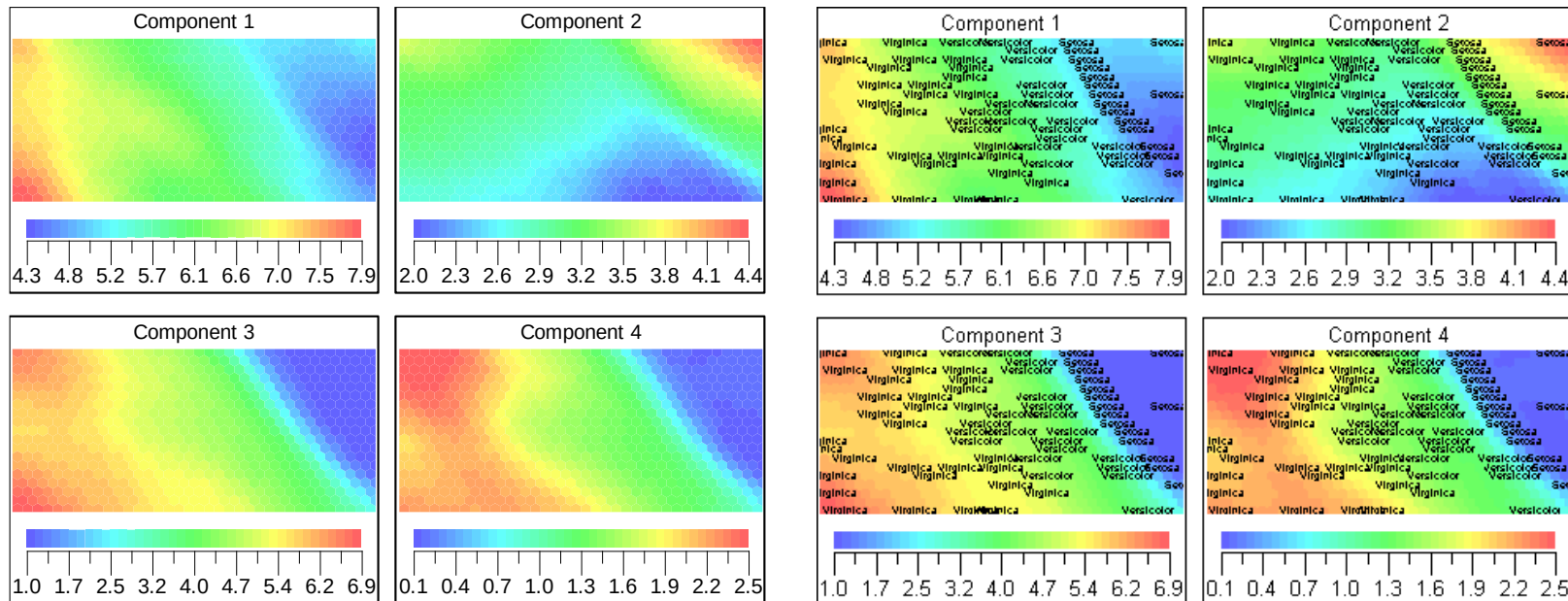


# Algoritmo SOM - Dinamica



Nella mappa è visibile la proiezione del processo di adattamento "elastico" dei *codebook* alla distribuzione dei dati. L'elasticità diminuisce nel tempo: a convergenza la mappa assume la configurazione definitiva

# Utilizzo delle SOM - Iris - Piani

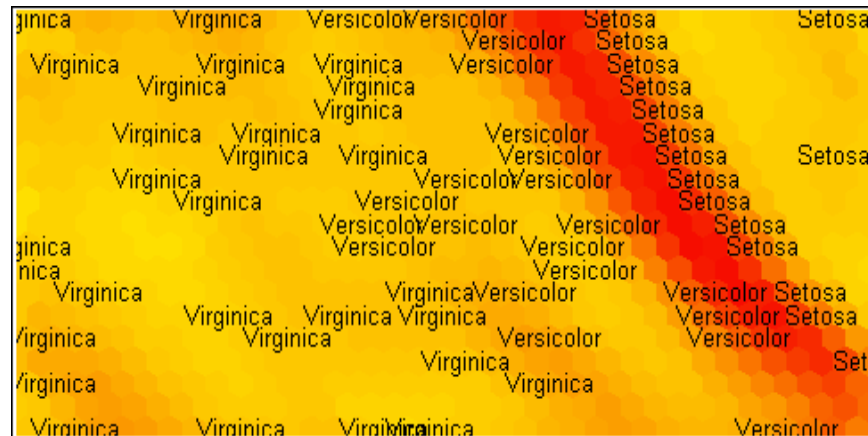


Correlazioni locali,  
dipendenze non lineari,  
ridondanze

Associazioni locali  
su singoli dati

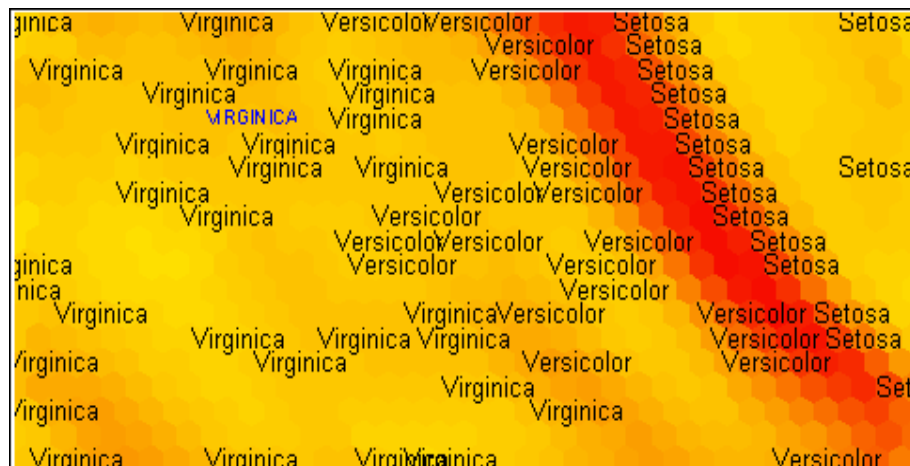
# Utilizzo delle SOM - Iris - Cluster

U-Matrix



*Clustering* non supervisionato: le SOM, senza nessun vicolo *a priori*, permettono di esplorare i dati in modo da poter individuare eventuali gruppi di dati molto simili tra loro (*cluster*)

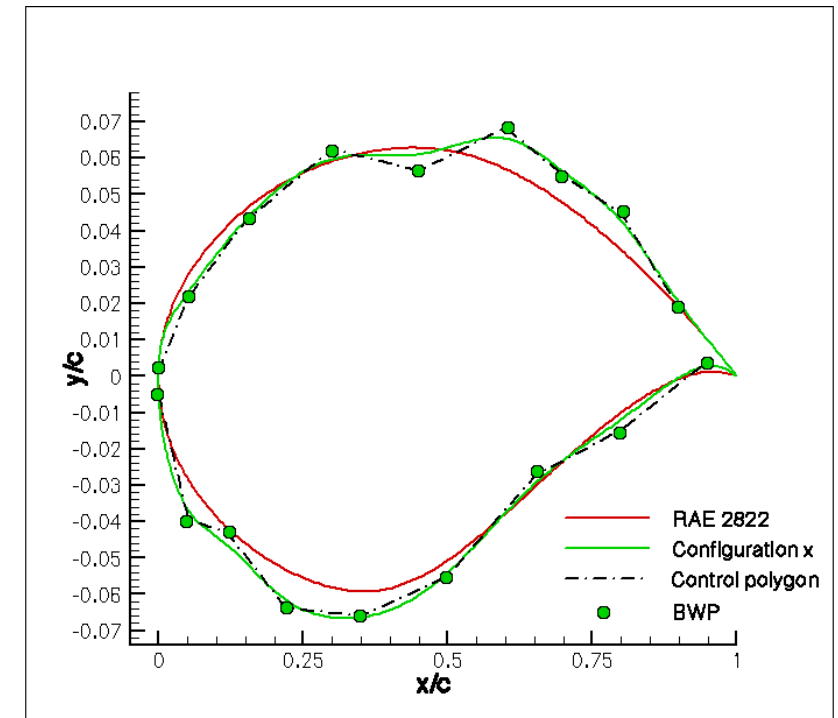
# Utilizzo delle SOM - Iris - Classificazione



*Se i dati analizzati sono un campione rappresentativo della distribuzione, è possibile utilizzare una SOM per una classificazione di esempi non conosciuti*

# Multi Objective Robust Design Optimization

- In the optimization process the achievable configurations have been determined by modifying an baseline configuration, the supercritical airfoil RAE 2822 designed by the Royal Aircraft Establishment
- Parameterisation of the airfoil by means 18 design variables (Bezièr weighting points).
- Navier-Stokes solver (MUFLO)
- turbulence model: Johnson Coakley equations



# Multi Objective Robust Design Optimization

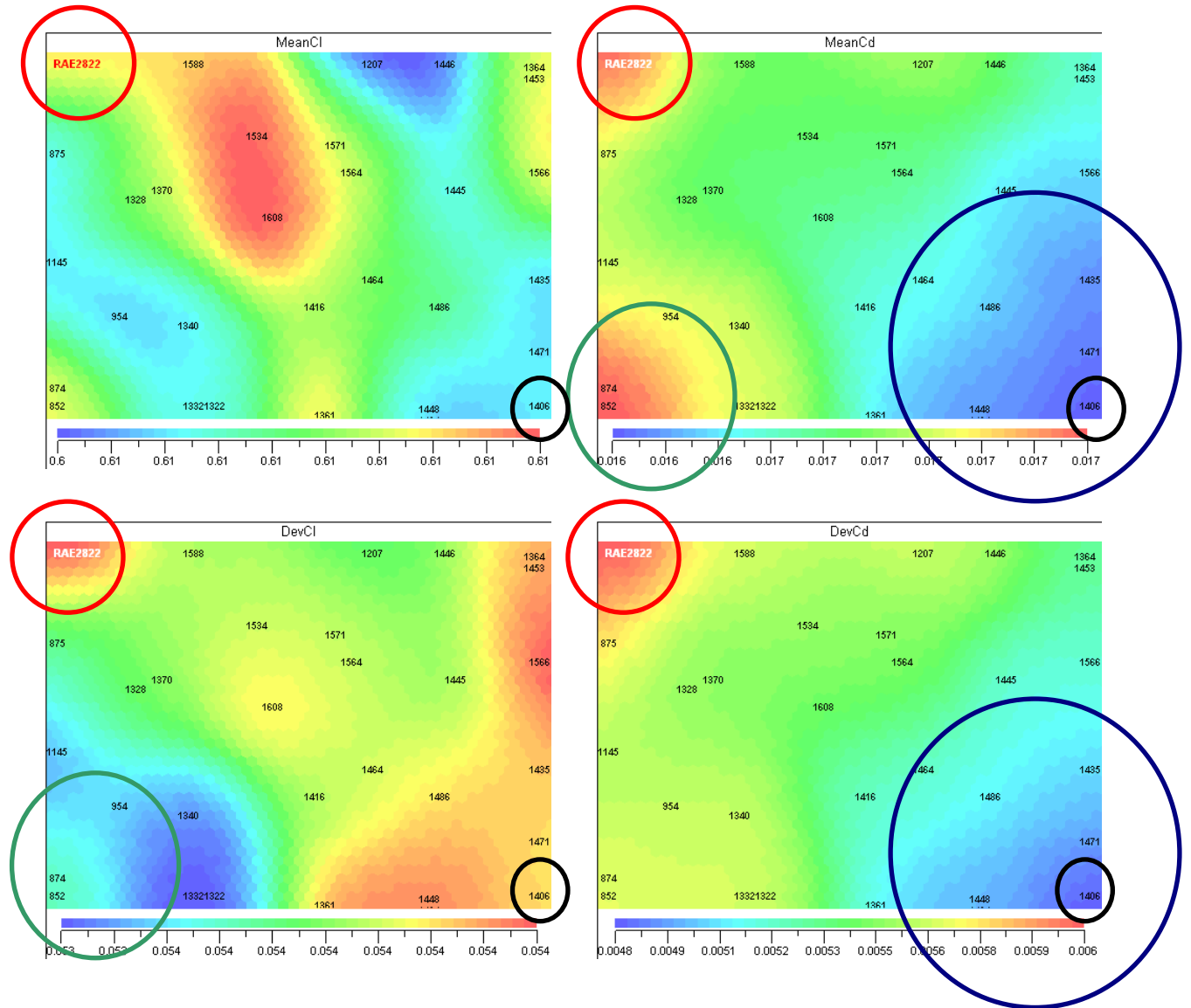
$$\begin{aligned} & \min_{\Delta M, \Delta \alpha} (E(c_d), \sigma^2(c_l), \sigma^2(c_d)) \quad \max_{\Delta M, \Delta \alpha} (E(c_l)) \\ & \text{with} \\ & E(c_l) \geq E(c_l)^{RAE2822} \quad \sigma^2(c_l) \leq \sigma^2(c_l)^{RAE2822} \\ & E(c_d) \leq E(c_d)^{RAE2822} \quad \sigma^2(c_d) \leq \sigma^2(c_d)^{RAE2822} \\ & |E(c_m)| \leq |E(c_m)^{RAE2822}| \quad \sigma^2(c_m) \leq \sigma^2(c_m)^{RAE2822} \\ & Thickness \geq Thickness^{RAE2822} \end{aligned}$$

The research dominion in the Multi Objective Robust Design Optimization will be  $M=0.73 \pm 0.05$  and (angle of attack)  $aoa=2^\circ \pm 0.5^\circ$ ;

Four objectives functions  
Seven Constraints

MOGA is exploited to find the solutions;

# SOM: correlazioni globali e locali



# Algoritmo Particle Swarm

- Un metodo di ottimizzazione euristica ispirato all'intelligenza collettiva di sciame di popolazioni biologiche (Stormi di uccelli, colonie di insetti)
- Come fa un gran numero di uccelli a produrre una coreografia di affollamento aggraziata e senza soluzione di continuità, mentre spesso, ma all'improvviso, cambia direzione, si disperde e si raggruppa?
  - Processi locali "decentralizzati".
  - Manipolazione delle distanze interindividuali (tenere il passo ed evitare collisioni)
- Ci sono dei vantaggi nel comportamento di sciame per un individuo in uno sciame?
  - Può trarre profitto dalle scoperte e dall'esperienza precedente di altri membri dello sciame nella ricerca di cibo, evitando i predatori, adattandosi all'ambiente, cioè la condivisione delle informazioni produce un vantaggio evolutivo.
- Gli esseri umani mostrano un'interazione sociale simile al comportamento di sciame in altre specie
  - Assolutamente, gli esseri umani imparano presto a imitare il movimento fisico; Man mano che crescono, imitano i loro coetanei a un livello più astratto, adattando le loro convinzioni e atteggiamenti per conformarsi agli standard sociali.



# Algoritmo Particle Swarm: algoritmo

Come nell'algoritmo genetico si parte da un insieme random di soluzioni (stormo).

Ogni soluzione è definita da tre caratteristiche:

- Variabili;
- Velocità (stesso concetto della «direzione» nei metodi del gradiente o nel crossover direzionale);
- Funzione obiettivo (assieme alla configurazione con il valore migliore nello stormo corrente e in tutti gli stormi precedenti).

# Algoritmo Particle Swarm: algoritmo

Nuova velocità

$$\text{New velocity } \mathbf{v}_{k+1}^i = \underbrace{w \mathbf{v}_k^i}_{\text{current motion}} + \underbrace{c_1 \text{rand} \frac{(\mathbf{p}^i - \mathbf{x}_k^i)}{\Delta t}}_{\text{particle memory influence}} + \underbrace{c_2 \text{rand} \frac{(\mathbf{p}_k^g - \mathbf{x}_k^i)}{\Delta t}}_{\text{swarm influence}}$$

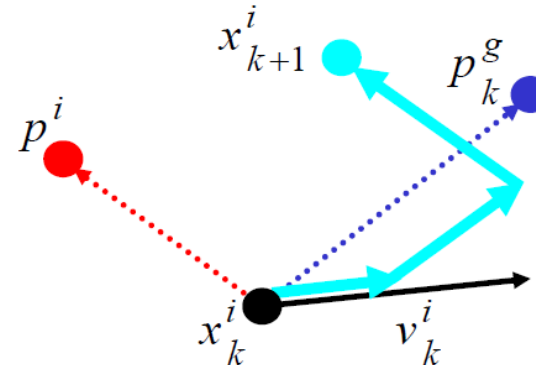
inertia factor  
0.4 to 1.4

self confidence  
1.5 to 2

swarm confidence  
2 to 2.5

Update della posizione  
(variabili)

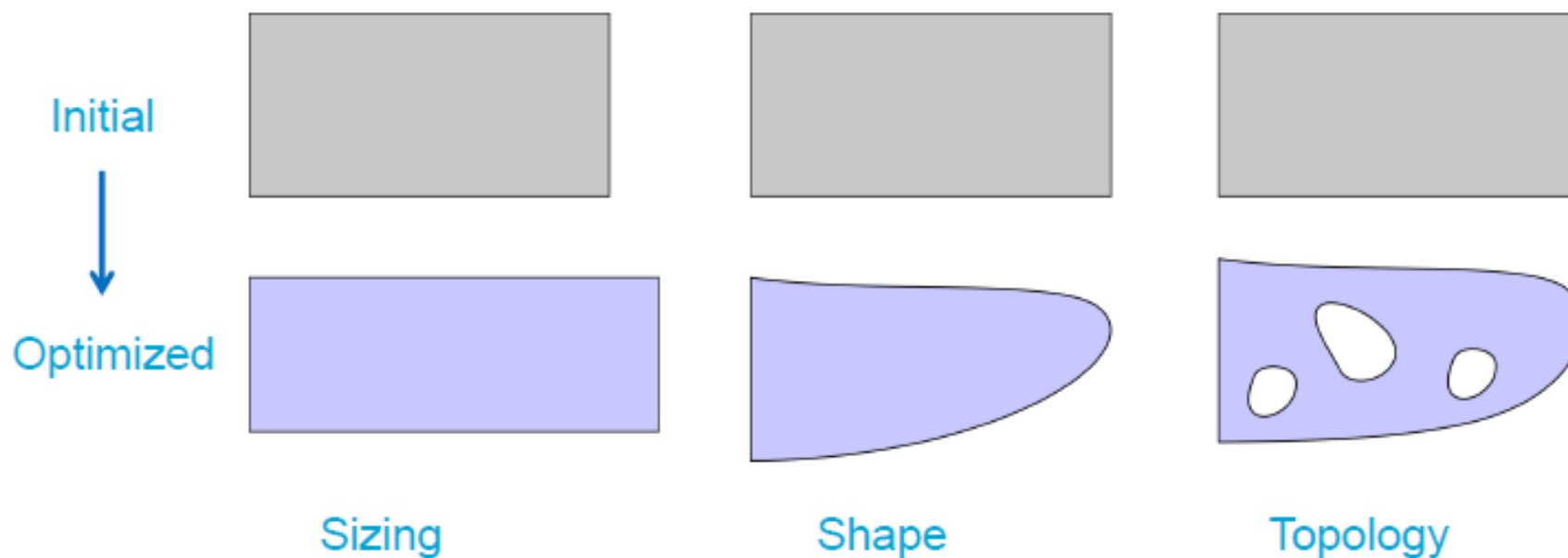
$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{x}_k^i + \mathbf{v}_{k+1}^i \Delta t$$



Utilizzo simile a GA  
Studi dimostrano  
comportamento migliore:

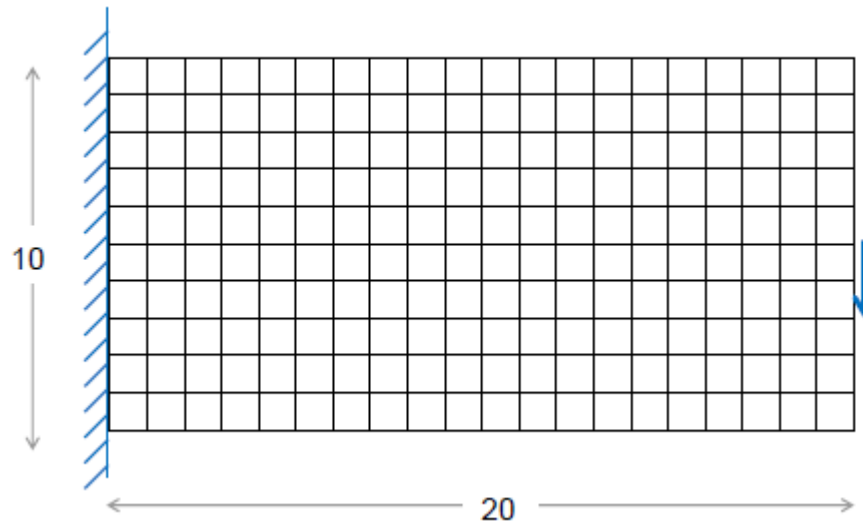
Hassan R., Cohanim B., de Weck O.L., Venter G., "A Comparison of Particle Swarm Optimization and the Genetic Algorithm", AIAA-2005-1897, 1st AIAA Multidisciplinary Design Optimization Specialist Conference, Austin, Texas, April 18-21, 2005

# Ottimizzazione topologica: superare il concetto di variabile?



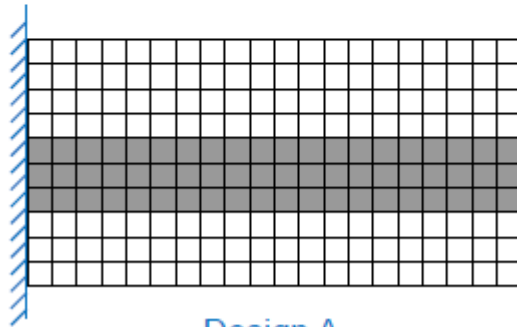
# Problema

Progetta la forma più rigida, posizionando 60 mattoncini Lego in una griglia di  $20 \times 10$

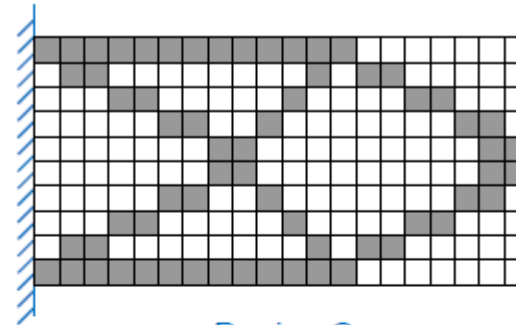


# Soluzione

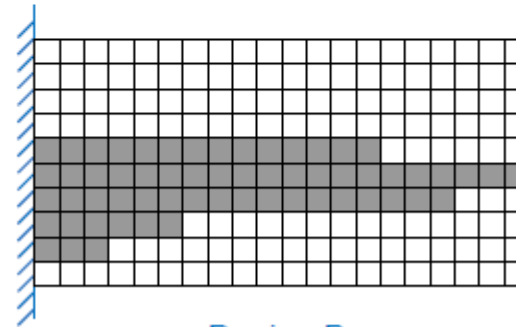
Possibili soluzioni  
 $C(200,60) = 7 \times 10^5$



Design A



Design C



Design B

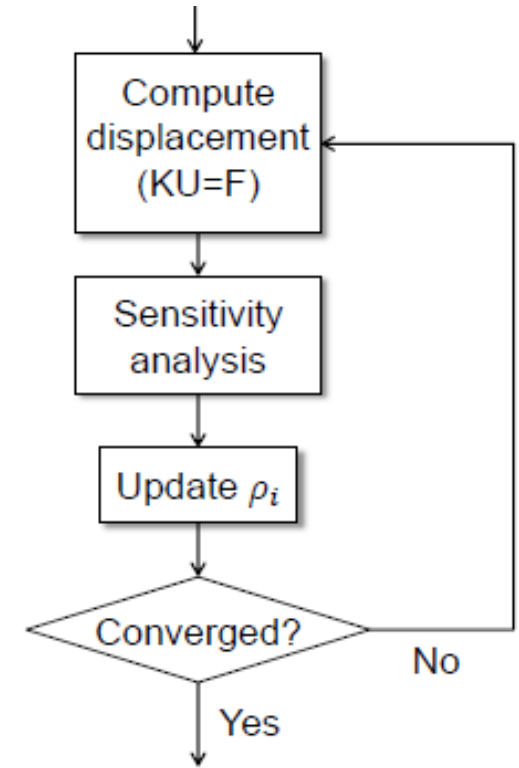
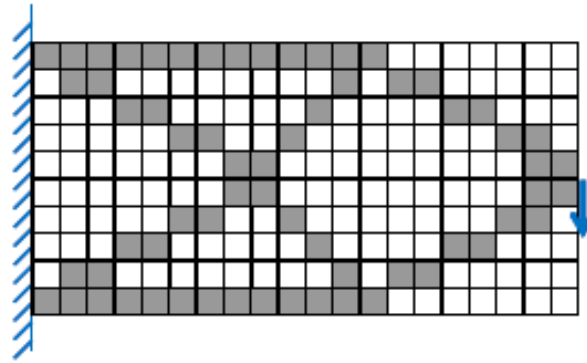
# Ottimizzazione topologica: caso discreto

Minimize:  $c = \frac{1}{2} U^T K U$

Subject to:  $KU = F$

$$\rho_i = \begin{cases} 1 & \text{(solid)} \\ 0 & \text{(void)} \end{cases}, \forall i$$

$$g = \sum_i \rho_i - V_0 \leq 0$$



# Ottimizzazione topologica: caso continuo

Minimize:  $c = \frac{1}{2} U^T K U$

Subject to:  $KU = F$

$$\rho_i = \begin{cases} 1 & \text{(solid)} \\ 0 & \text{(void)} \end{cases}, \forall i$$

$$g = \sum_i \rho_i - V_0 \leq 0$$

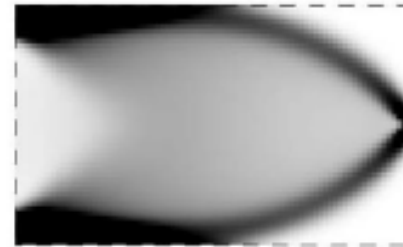
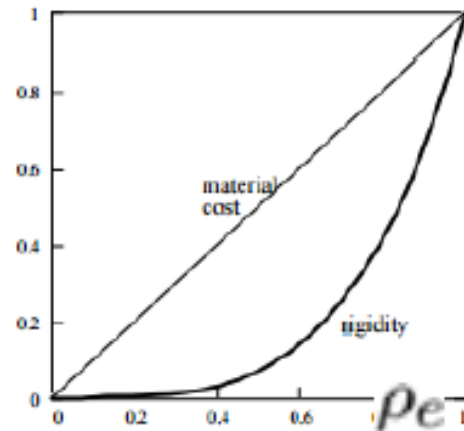


$$\rho_i \in [0, 1]$$

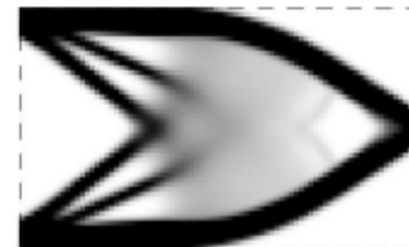
- Motivation: (Difficult) binary problem  $\rightarrow$  (easier) continuous problem

# Proprietà dei materiali

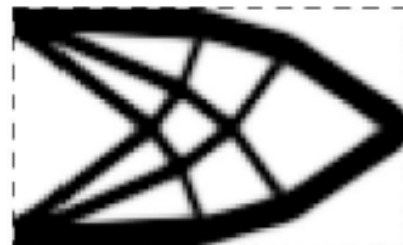
- Material properties: Young's modulus  $E$ , and Poisson's ratio  $\nu$
- SIMP interpolation (Solid Isotropic Material with Penalization)
  - $E_i = \rho_i^p \bar{E}$
  - $p \geq 1$ , typically  $p = 3$



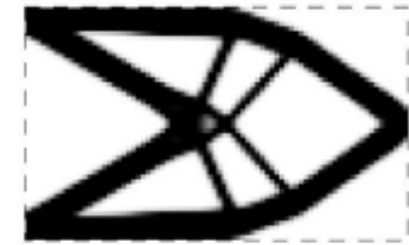
Voigt ( $p=1$ )



$p=1.5$



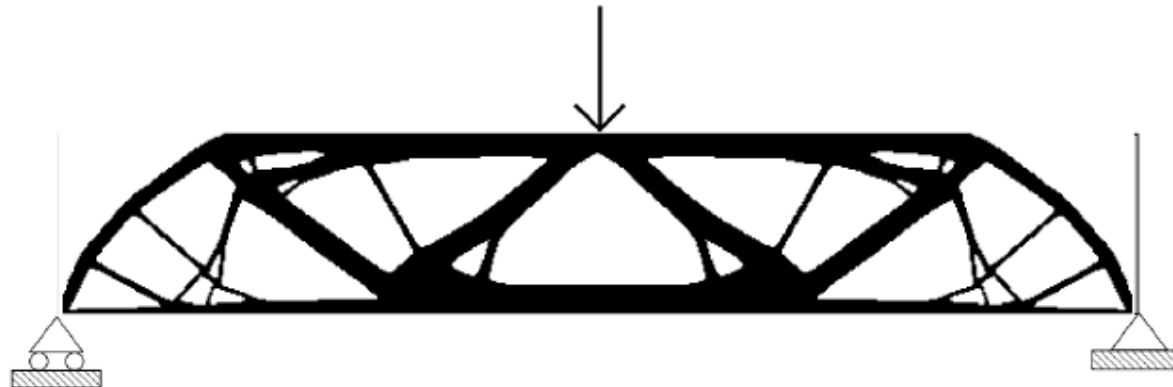
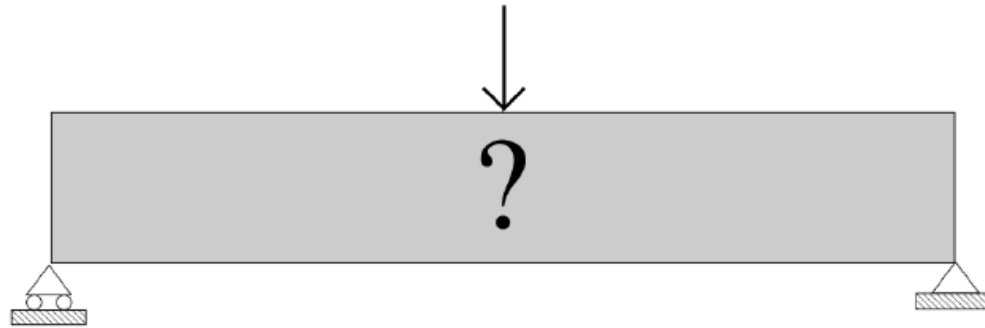
$p=2$



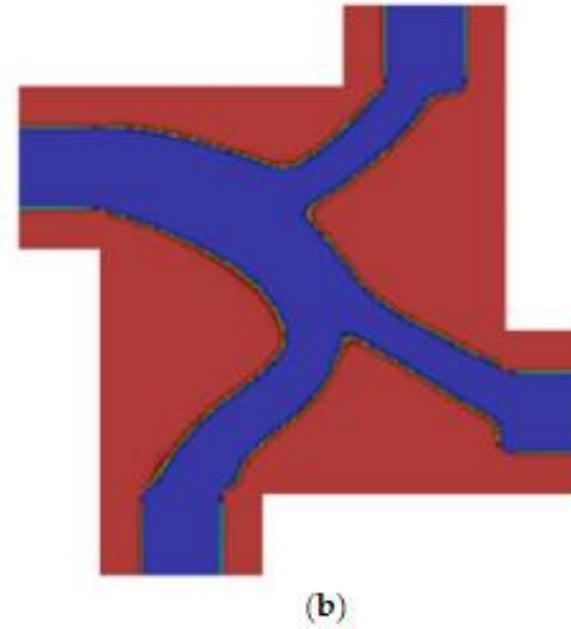
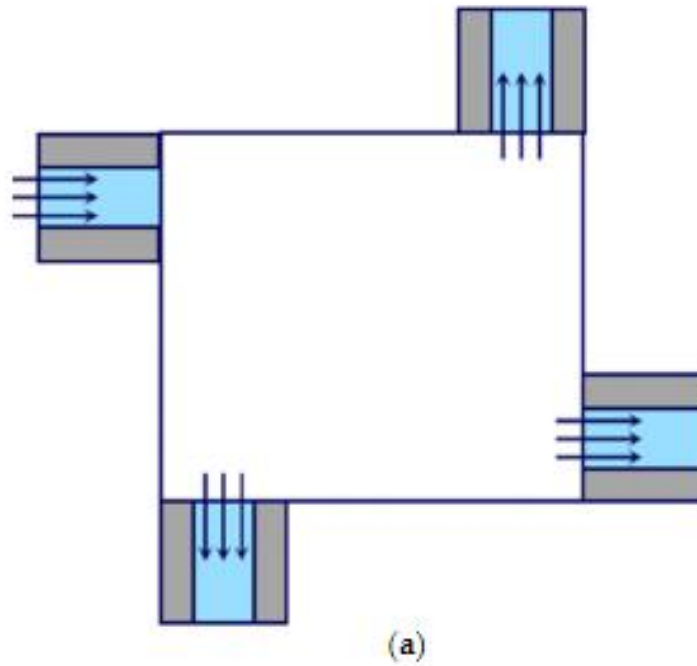
$p=3$



# Esempi: strutturali



# Esempi: fluidodinamica



# Algoritmi di ottimizzazione - approfondimenti - metodo dell'aggiunto

- Si consideri il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \text{s.t.} & \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \end{array}$$

dove  $\mathbf{x}$  sono le variabili di progetto e  $\mathbf{u}$  sono le variabili di stato.

I vincoli rappresentano l'equazione di stato. ad esempio il design dell'ala:  $\mathbf{x}$  sono variabili di forma,  $\mathbf{u}$  sono variabili di flusso,  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  rappresenta le equazioni di Navier Stokes.

Dobbiamo calcolare il gradiente di  $J$  verso  $\mathbf{x}$ :

$$\frac{dJ}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$$

Tipicamente la dimensione di  $\mathbf{u}$  è molto alta (migliaia/milioni).

# Algoritmi di ottimizzazione - approfondimenti - metodo dell'aggiunto

$$\frac{dJ}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$$

Per calcolare  $du/dx$ , bisogna differenziare l'equazione di stato

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}}$$

# Algoritmi di ottimizzazione - approfondimenti - metodo dell'aggiunto

$$\frac{dJ}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} - \underbrace{\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1}}_{\boldsymbol{\lambda}^T} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}}$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \left[ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \right]^T$$

$$1) \quad \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad \text{Aggiunto}$$

$$2) \quad \frac{dJ}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}}$$

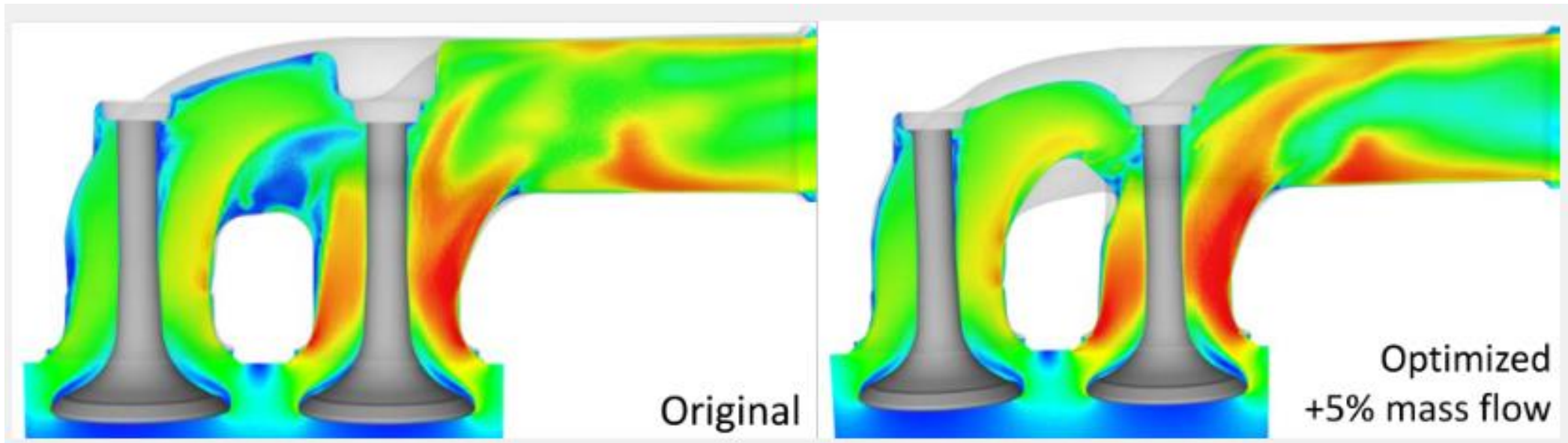
# Algoritmi di ottimizzazione - approfondimenti - metodo dell'aggiunto

Risolvere l'equazione dell'aggiunto, richiede tecnologie e risorse computazionali simili a quella dell'equazione di stato (NS)

$$\left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \right)^T$$

Metodi dell'aggiunto ampiamente utilizzati nell'ottimizzazione della forma aerodinamica, nel controllo ottimale del flusso, nelle applicazioni geofisiche, ecc

# Metodo dell'aggiunto: esempio

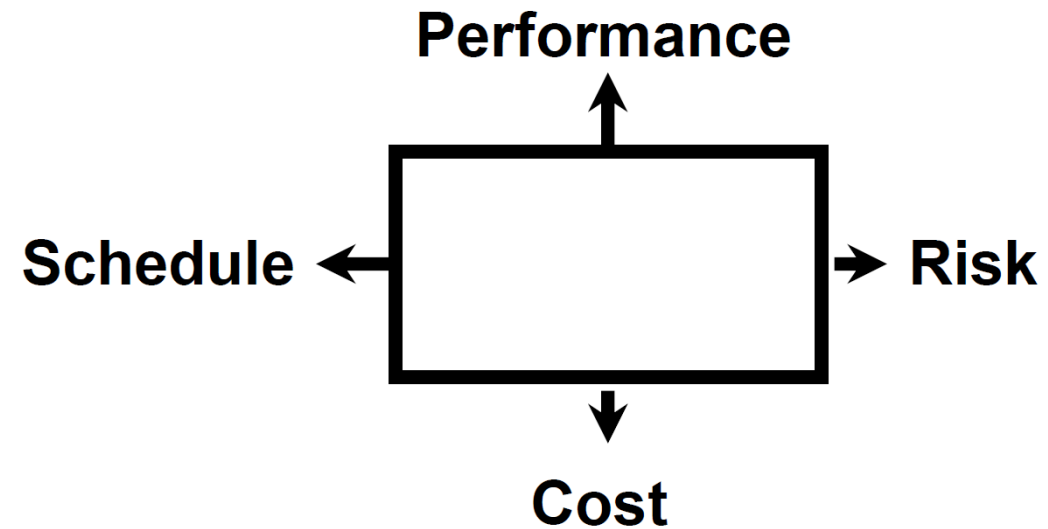


Utilizzato per accurati affinamenti locali

## 4 basic compromessi (Trade-offs) nello Product/System Sviluppo

---

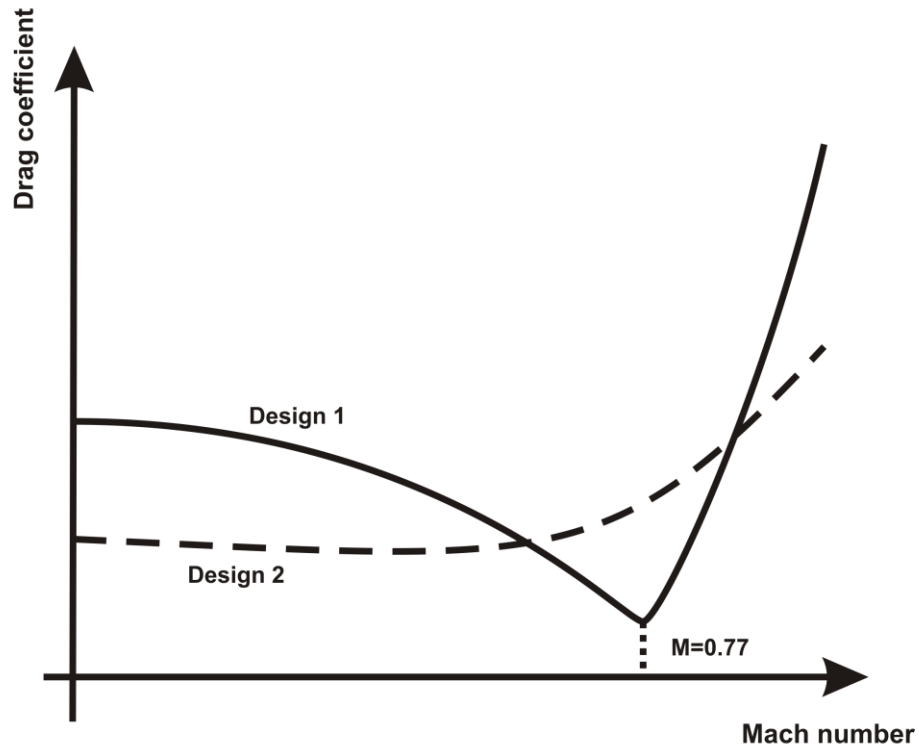
Uno dei compiti principali del progettista di sistema (insieme all'architetto di sistema) è quello di identificare le tensioni principali e risolverle



Ref: Maier and Rechtin,  
"The Art of Systems Architecting", 2000



# Robust Design / Chaos Collocation



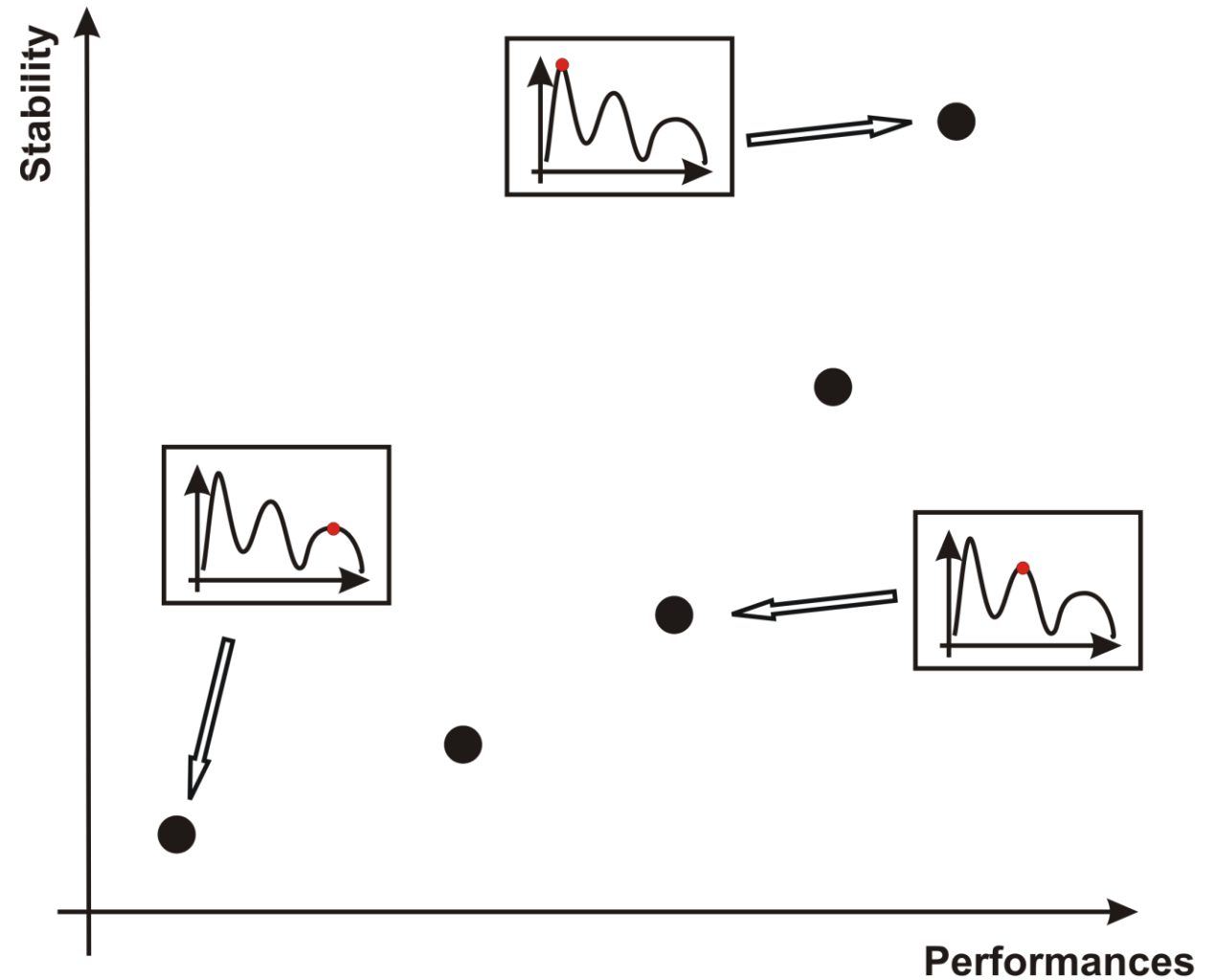
$$\min \rho = \int_{M_{\infty}} C_d(d, M_{\infty}) f(M_{\infty}) dM_{\infty}$$

# E' un problema nativamente multiobiettivo

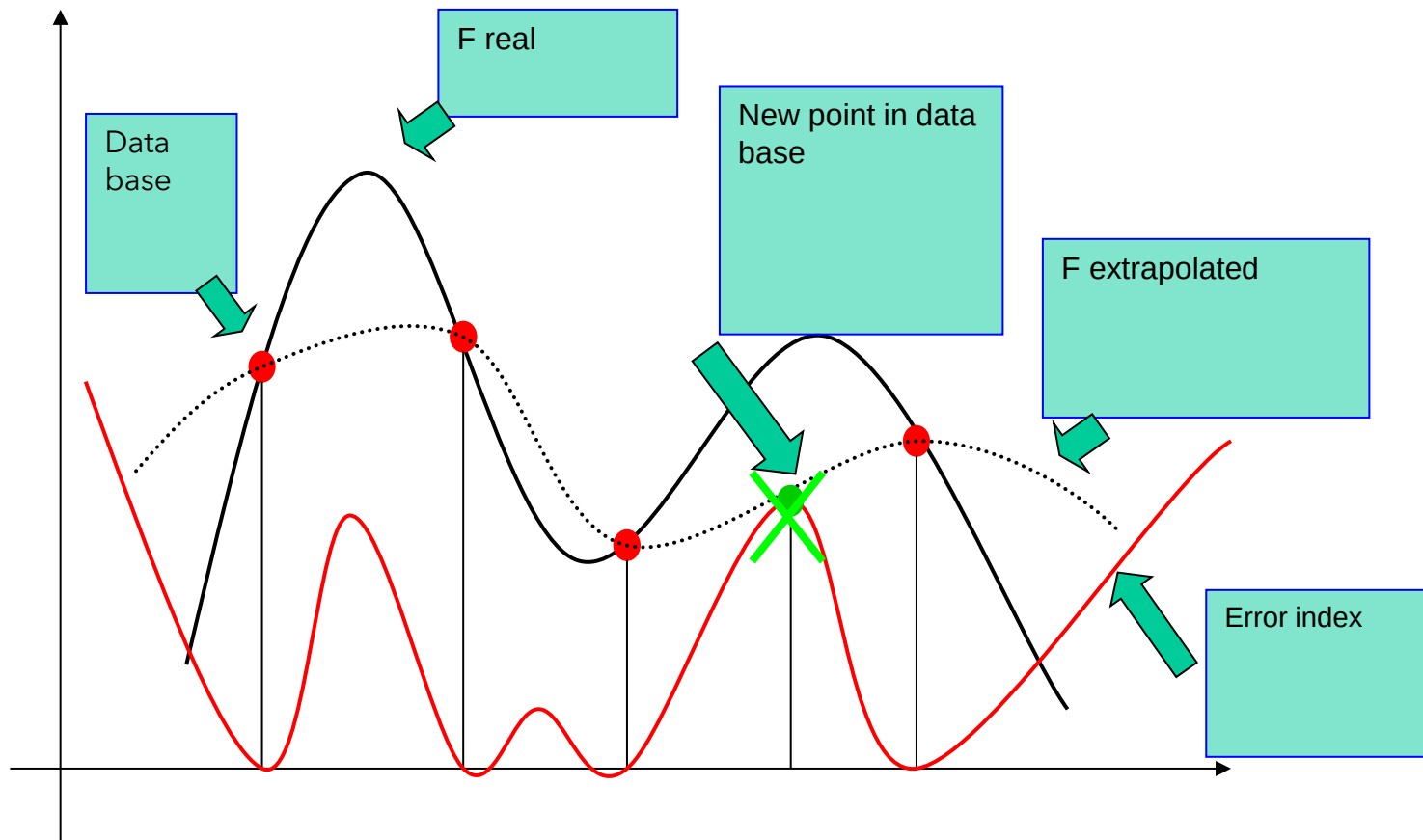
$$f : \mathcal{R}^n \Rightarrow \mathcal{R}^m$$

$$\max \quad E(f_i) = \int_{\mathcal{Q}} f_i(x, q) p(q) dq$$

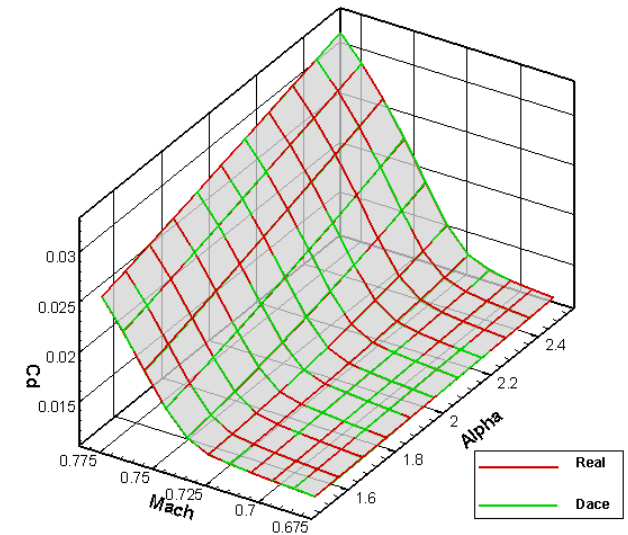
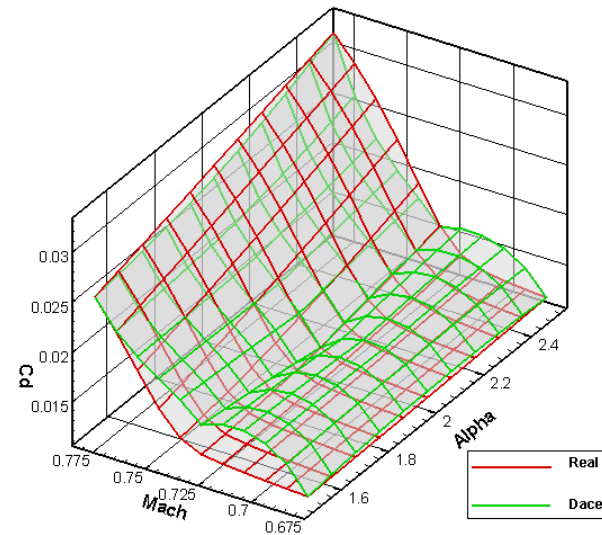
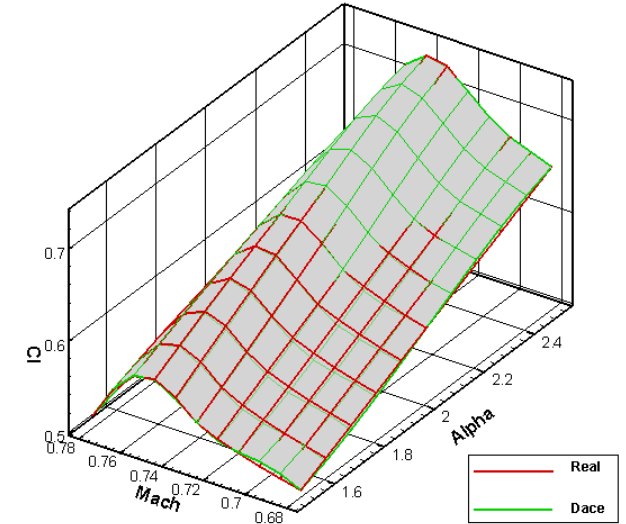
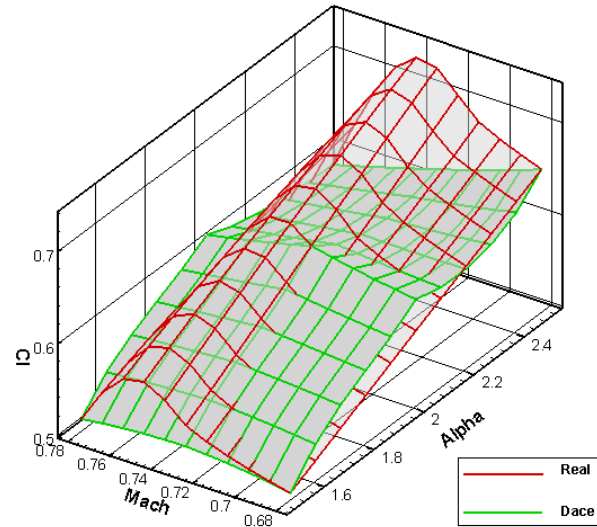
$$\min \quad \sigma^2(f_i) = \int_{\mathcal{Q}} [f_i(x, q) - E(f_i)]^2 p(q) dq$$



# Calcolo media varianza: Processi Gaussiani



# Esempio aeronautica: lift/drag



# Uncertainty quantification methods based on Generalized Polynomial Chaos

Let us consider the stochastic differential equation:

$$L(\mathbf{x}, t, \theta; \phi) = f(\mathbf{x}, t, \theta)$$

with  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d$  space

$t$  time

$\theta$  random parameters

$L$  differential operator

$f$  source term

$\phi$  solution

We refer to the solution in terms of spectral representation

$$\phi(\mathbf{x}, t, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(\mathbf{x}, t) \Psi_i(\xi(\theta))$$

For practical cases, the series has to be truncated to a finite number of terms, here denoted with  $N$ .

$$\phi(\mathbf{x}, t, \theta) = \sum_{i=0}^N \phi_i(\mathbf{x}, t) \Psi_i(\xi(\theta))$$

$$L\left(\mathbf{x}, t, \theta; \sum_{i=0}^N \phi_i(\mathbf{x}, t) \Psi_i(\xi(\theta))\right) \cong f(\mathbf{x}, t, \theta)$$

to solve this differential equation

Method of Weighted Residuals

# Uncertainty quantification methods based on Generalized Polynomial Chaos

By Galerkin projection :

$$\left\langle L\left(\mathbf{x}, t, \theta; \sum_{i=0}^N \phi_i(\mathbf{x}, t) \Psi_i(\xi(\theta))\right), \Psi_j \right\rangle = \langle f(\mathbf{x}, t, \theta), \Psi_j \rangle \quad j = 0, \dots, N$$

Chaos Polynomial  
intrusive form

By Collocation projection :

$$L(\mathbf{x}, t, \theta_j; \phi_j) = f(\mathbf{x}, t, \theta_j) \quad j = 0, \dots, N$$

Chaos Collocation  
non-intrusive form

## EXPECTED VALUE

$$E_{PC}(\phi) = \mu_\phi = \phi_0(\mathbf{x}, t)$$

## VARIANCE

$$Var_{PC}(\phi) = \sigma_\phi^2 = \sum_{i=1}^N \phi_i^2(\mathbf{x}, t) \langle \Psi_i^2 \rangle$$

# Uncertainty quantification methods based on Generalized Polynomial Chaos

## *Tensorial-expanded Chaos Collocation (TeCC)*

non-intrusive form

Tensorial-expanded Chaos Collocation method and Chaos Collocation method differ for

- the choice of expansion polynomials

$$\phi(\mathbf{x}, t, \theta) = \sum_{ijk=0}^N \phi_{ijk}(\mathbf{x}, t) \Psi_i(\xi_1) \Psi_j(\xi_2) \dots \Psi_k(\xi_n)$$

- the selection of collocation points

If  $n$  is the number of uncertain variables and  $p$  is the expansion polynomial order the collocation points are the full-factorial of roots of the one dimensional orthogonal polynomial of order  $p+1$  with  $n$  factors.

$$N + 1 = (p + 1)^n \quad \text{number of terms of spectral representation}$$

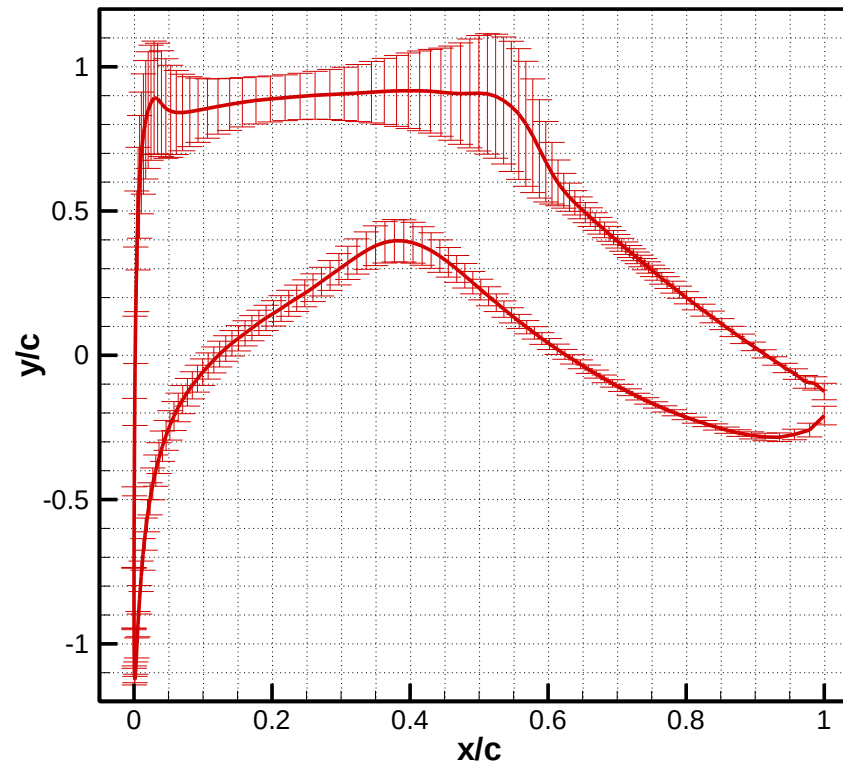
# Uncertainty quantification methods based on Generalized Polynomial Chaos

The choice of Polynomials depends from the probability distribution of the uncertainties parameters:

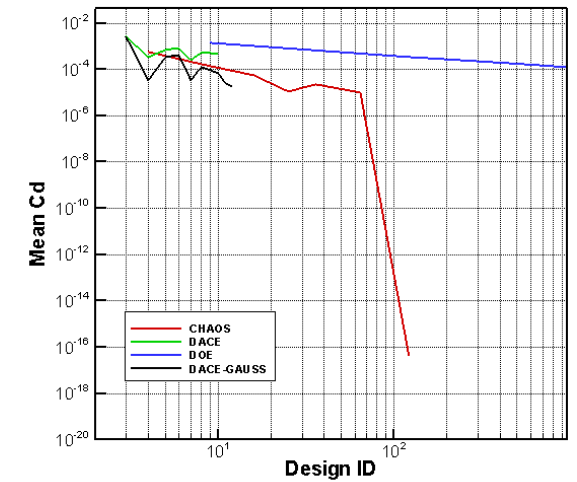
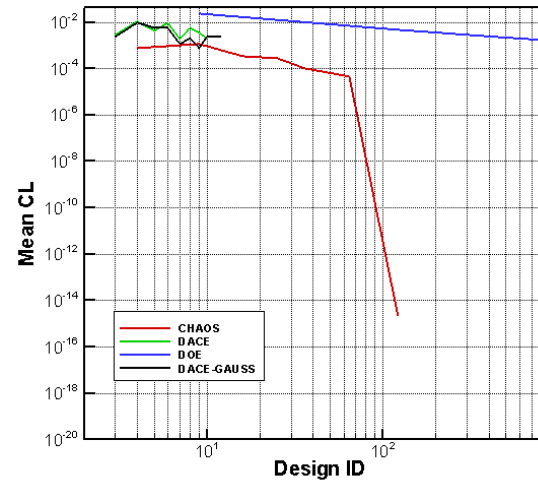
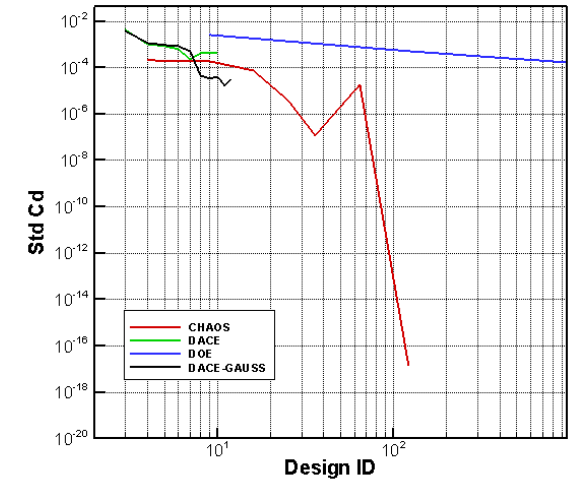
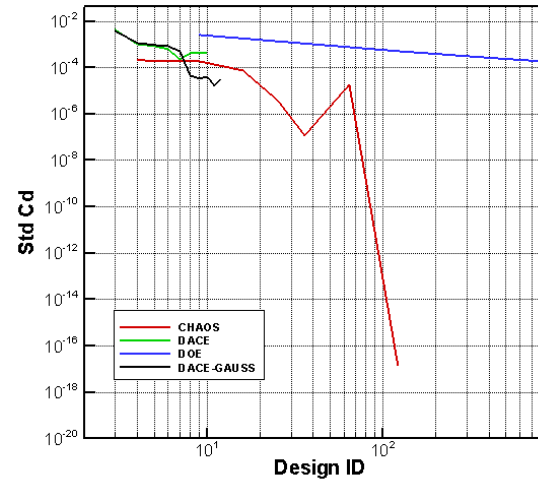
| Probability Distribution | Polynomials |
|--------------------------|-------------|
| Gaussian                 | Hermite     |
| Uniform                  | Legendre    |
| Beta                     | Laguerre    |
| Gamma                    | Jacobi      |



# Esempio aeronautico



# Esempio aeronautico



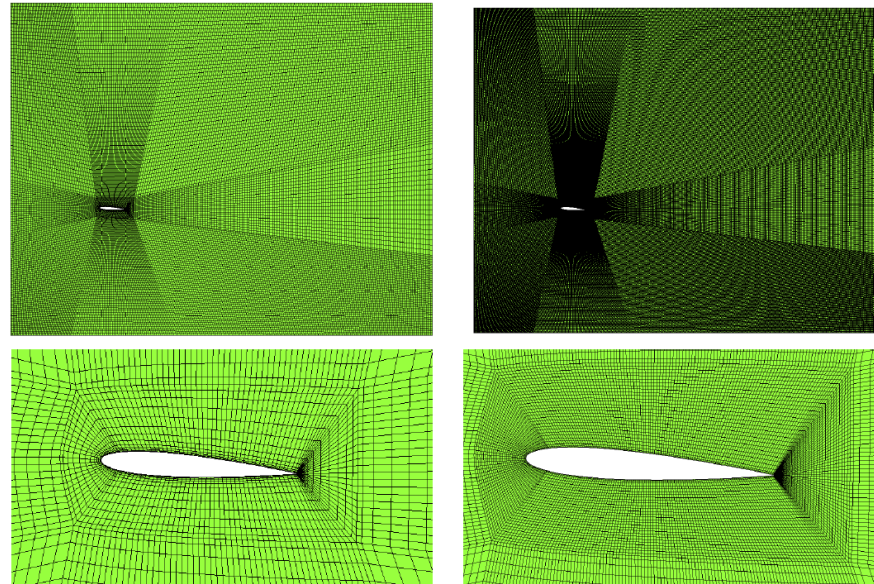
# Superfici di risposta: multi-fidelity

- Per migliorare i tempi di convergenza delle diverse fasi di ottimizzazione, l'utilizzo di superfici di risposta molte volte diventa necessario.
- L'idea è non utilizzare metodo matematici approssimanti, ma usare modelli fisici semplificati: multi-fidelity

# Superfici di risposta: multi-fidelity

Modelli fisici semplificati:

- Minor numeri nodi mesh;
- stazionario/non stazionario;
- Viscoso/non viscoso;
- Lineare/non lineare;
- etc



Solver RANS (turbulence model SST)

Structured mesh

- High fidelity: 150,000 elements
- Low fidelity: 30,000 elements

# Multi-fidelity: Co-Kriging

Cokriging è un modello surrogato multi-fidelity basato sulla teoria bayesiana.

È stato originariamente proposto per migliorare l'accuratezza di un approssimatore ad alta fedeltà utilizzando osservazioni supplementari di modelli a bassa fedeltà.

In sostanza, mira a sfruttare la correlazione incrociata tra due o più approssimatori basati su processo gaussiano attraverso uno schema stocastico auto-regressivo e produce una distribuzione a posteriori predittiva per l'output del modello ad alta fedeltà che codifica il contributo di livelli di fedeltà più bassi con incertezza quantificata.

To describe the recursive Cokriging approach, suppose we have available multiple models, say  $s$ -models  $(z_t(\mathbf{x}))_{t=1,\dots,s}$ , providing an estimate of the real-valued scalar field.

$$z_t: \mathcal{X} \in \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \rightarrow z_t(\mathbf{x}) \quad (2)$$

for  $t = 1, \dots, s$ , sorted by increasing order of fidelity, being  $z_1(\mathbf{x})$  the model with the lowest level of fidelity, and modeled by Gaussian processes  $(Z_t(\mathbf{x}))_{t=1,\dots,s}$ . Such Gaussian processes are related to each other by the autoregressive model:

$$\begin{cases} Z_t(\mathbf{x}) = \rho_{t-1}(\mathbf{x})\tilde{Z}_{t-1}(\mathbf{x}) + \delta_t(\mathbf{x}) \\ \tilde{Z}_{t-1}(\mathbf{x}) \perp \delta_t(\mathbf{x}) \\ \rho_{t-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{t-1}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}_{\rho_{t-1}} \end{cases} \quad (3)$$

where  $\tilde{Z}_{t-1}(\mathbf{x})$  is a Gaussian process with distribution  $(Z_{t-1}(\mathbf{x})|\mathbf{z}_{t-1}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \boldsymbol{\beta}_{\rho_{t-1}}, \boldsymbol{\theta}_{t-1})$ ,  $\delta_t(\mathbf{x}) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{f}_t^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}_t, k_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \boldsymbol{\theta}_t))$  and  $Z_1(\mathbf{x}) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{f}_1^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}_1, k_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \boldsymbol{\theta}_1))$ .  $k_t$  is the covariance function depending on hyper-parameters  $\boldsymbol{\theta}_t$ ,  $\boldsymbol{\beta}_t$  and  $\boldsymbol{\beta}_{\rho_{t-1}}$  are vectors of unknown coefficients,  $\mathbf{f}_t(\mathbf{x})$  and  $\mathbf{g}_{t-1}(\mathbf{x})$  are chosen functions.

It can be shown that  $(Z_t(\mathbf{x})|\mathbf{z}_t, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\beta}_{\rho_t}, \boldsymbol{\theta}_t)$ , that is the posterior distribution of  $Z_t(\mathbf{x})$ , conditional on the observations and parameters of all lower-fidelity models, is Gaussian with mean and variance given by:

$$\hat{m}_{Z_t}(\mathbf{x}) = \rho_{t-1}(\mathbf{x})\hat{m}_{Z_{t-1}}(\mathbf{x}) + A_t(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$\hat{s}_{Z_t}^2(\mathbf{x}) = \rho_{t-1}^2(\mathbf{x})\hat{s}_{Z_{t-1}}^2(\mathbf{x}) + B_t(\mathbf{x}) \quad (5)$$

where  $A_t(\mathbf{x})$  and  $B_t(\mathbf{x})$  are functions that can be explicitly computed based on univariate GPR results at fidelity levels  $t$  and  $t - 1$  (Kennedy, 2000).

# Multi-fidelity: Co-Kriging

From:

Design Optimization based on Metamodels combining Multi-fidelity simulations

Alberto Clarich\*, Luca Battaglia\*, Lucia Parussini§, Haysam Telib°, Angela Scardigli°,

\*ESTECO Spa

§Università degli Studi di Trieste

°Optimad SrL

ITALY

NATO

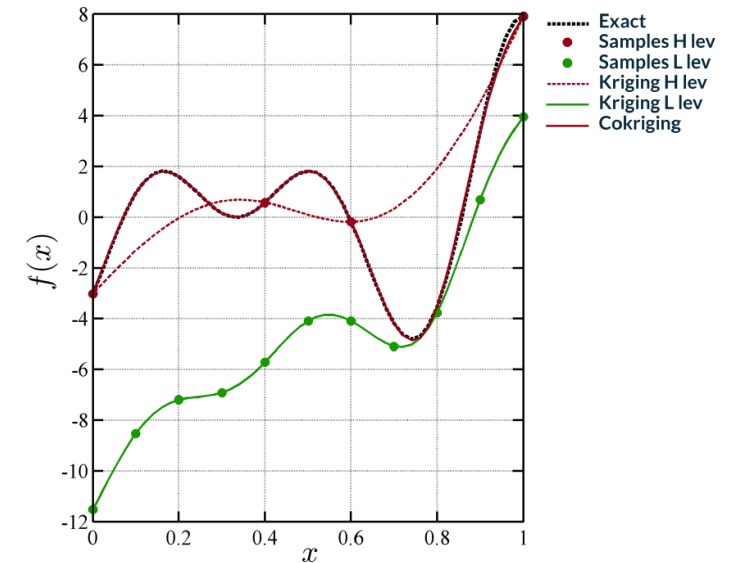
AVT-354

# Multi-fidelity: Co-Kriging

## Co-Kriging: methodology

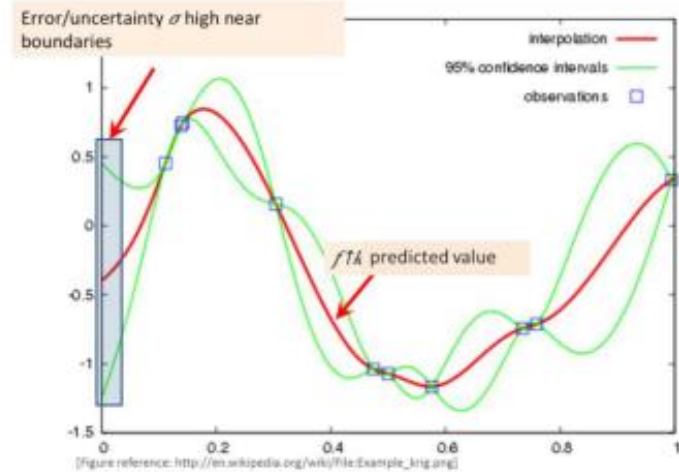
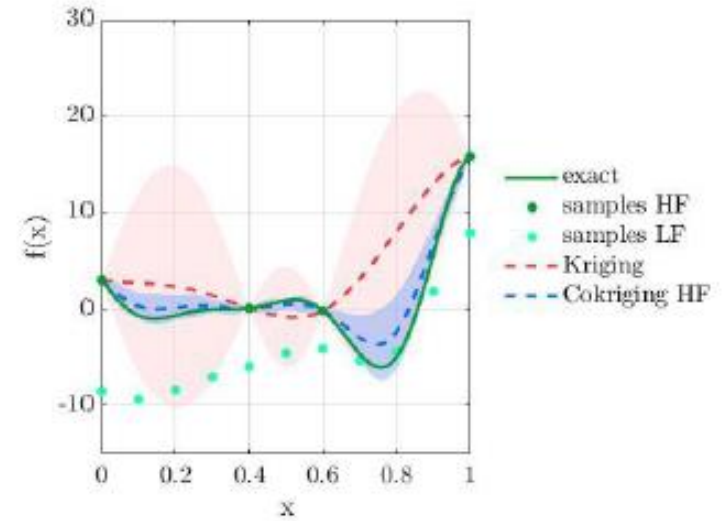
The cokriging is a **gaussian process regression** which exploits multi-fidelity responses.

Low-fidelity CFD results **improve the accuracy** of the High-fidelity model



The approach we propose here is to **feed the Co-Kriging** with the **original LF** sampling and the **HF sampling** that has been obtained by the **Dataset Reducer DOE**

# Multi-fidelity: Co-Kriging







# Target performances: perché?

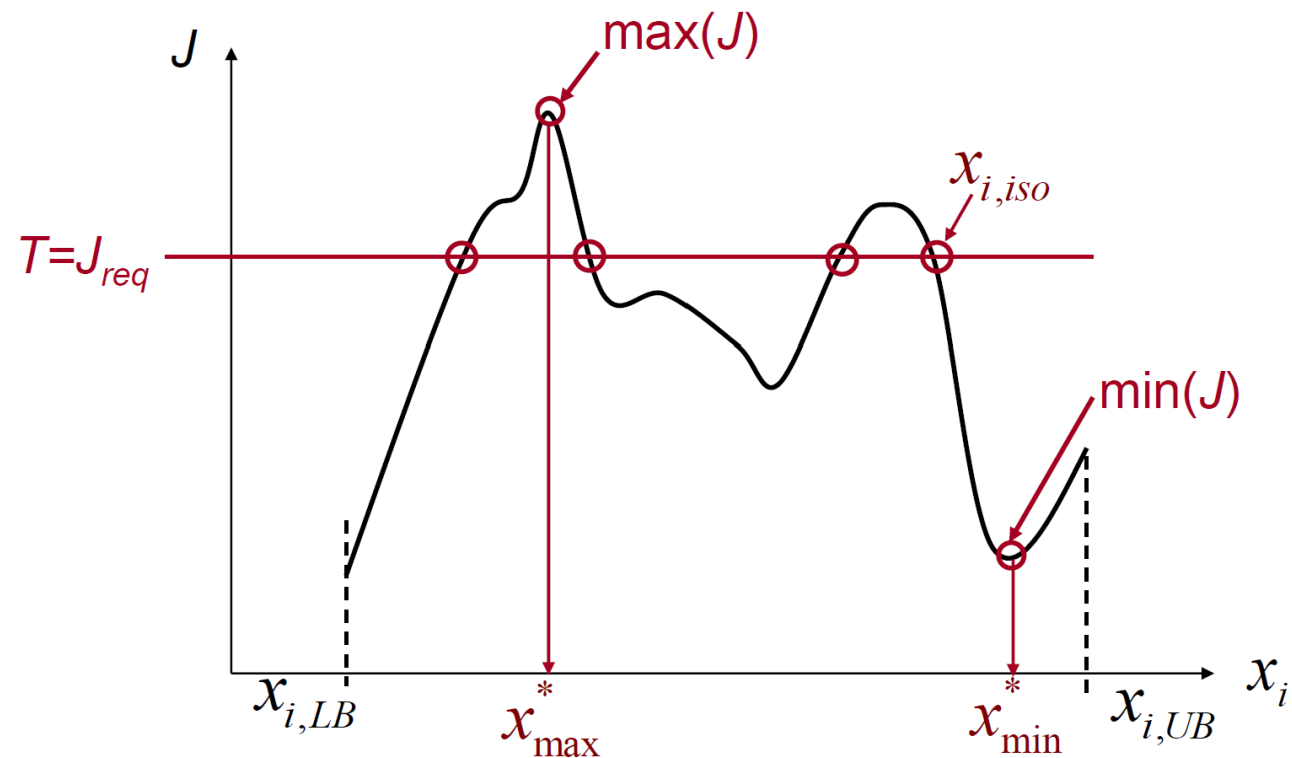
---

L'esperienza degli anni '60 ha dimostrato che per gli aerei militari il costo dell'incremento finale delle prestazioni di solito è eccessivo in termini di altre caratteristiche e che l'intero sistema deve essere ottimizzato, non solo le singole prestazioni

- *Ref: Current State of the Art of Multidisciplinary Design Optimization (MDO TC) -AIAA White Paper, Jan 15, 1991*

L'industria non sempre progetta per raggiungere prestazioni ottimali, ma molte volte in base agli obiettivi specificati da un documento di requisiti o contratto, quindi ottimizzare il design per una serie di OBIETTIVI.

Raggiungere  
(o superare) i  
target



# Obiettivo target

Goal Seeking: è essenzialmente lo stesso che trovare l'insieme di punti  $x$  che soddisferà il seguente vincolo di uguaglianza sull'obiettivo:

$$\text{Find all } \mathbf{x} \text{ such that } \left| \frac{J(\mathbf{x}) - J_{req}}{J_{req}} \right| \leq \varepsilon$$

Example  
Target  
Vector:

$$J_{req}(x) = \begin{bmatrix} m_{sat} \\ R_{data} \\ C_{sc} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1000kg \\ 1.5Mbps \\ 15M\$ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Target mass} \\ \leftarrow \text{Target data rate} \\ \leftarrow \text{Target Cost} \end{array}$$

# Post Processing: analisi di sensibilità

L'analisi di sensibilità è una componente importante dell post-processing

E' uno strumento chiave per comprendere quali variabili di progettazione, vincoli e parametri sono fattori importanti per la soluzione ottimale

Quanto è sensibile la soluzione "ottimale" alle variazioni o alle perturbazioni delle variabili di progetto  $x$ ?

Quanto è sensibile la soluzione ottimale  $x$  alle variazioni dei vincoli  $g(x)$ ,  $h(x)$  e dei parametri fissi  $p$ ?

# Progettazione aeronautica: analisi di sensibilità

Domande per la progettazione aeronautica:

- Come cambia la mia soluzione se:
- Cambia l'altitudine di crociera?
- Cambia la velocità di crociera?
- Cambia la distanza target?
- Si modifica le proprietà del materiale?
- Si allenta il vincolo sul carico utile?

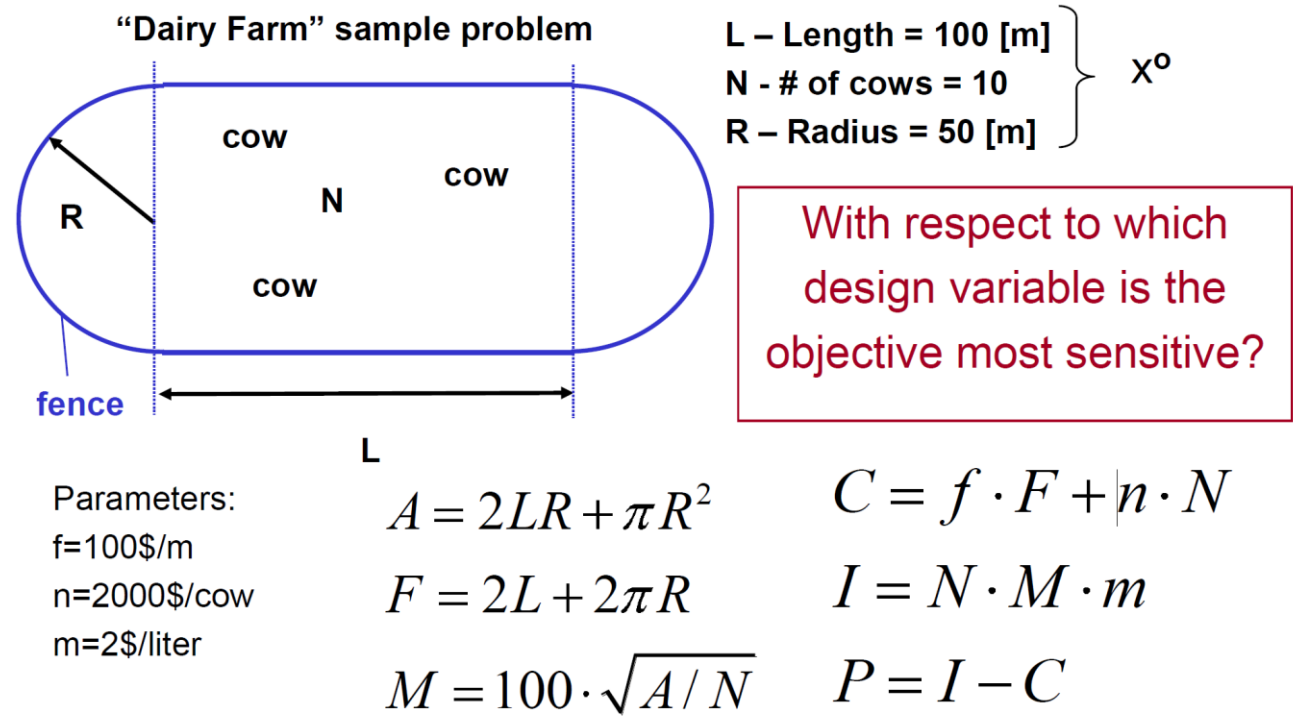
# Indicatori normalizzati

Essendo dati e parametri di dimensione diverse è fondamentale predisporre una normalizzazione dei risultati per renderli comparabili

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}^0}$$

$$\frac{\Delta J / J}{\Delta x_i / x_i} = \frac{x_{i,0}}{J(\mathbf{x}^0)} \cdot \left. \frac{\partial J}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}^0}$$

# Esempio



# Esempio

- Compute objective at  $\mathbf{x}^o$   $J(\mathbf{x}^o) = 13092$

- Then compute raw sensitivities

$$\nabla J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial L} \\ \frac{\partial P}{\partial N} \\ \frac{\partial P}{\partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.6 \\ 2225.4 \\ 588.4 \end{bmatrix}$$

- Normalize

$$\nabla \bar{J} = \frac{\mathbf{x}^o}{J(\mathbf{x}^o)} \nabla J = \begin{bmatrix} \frac{100}{13092} \cdot 36.6 \\ \frac{10}{13092} \cdot 2225.4 \\ \frac{50}{13092} \cdot 588.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.28 \\ 1.7 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

- Show graphically with tornado chart

