Esercitazione – Esempio MDO completo (MDF, IDF, CO)

Sistema accoppiato Struttura + Termica con variabili locali per disciplina

1. Modello multidisciplinare

Variabili:

• globale:

$$x \in \mathbb{R}$$

• locali:

$$y_1 \ (Struttura)$$

$$y_2 \ (Termica)$$

• stati:

$$u_1$$

$$u_2$$

1.1 Discipline (coupling + locali)

Struttura:

$$u_1 = x^2 + 0.5\, u_2 + y_1$$

Termica:

$$u_2 = sin(x) + 0.3\, u_1 + y_2$$

Diagramma N2

	x	Struttura	Termica
x	●	X	X
Struttura		●	X
Termica		X	●

Forma matriciale

Riorganizzando:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-0.5} \\ \mathbf{-0.3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y_1 \\ \sin(x) + y_2 \end{bmatrix}$$

Scriviamo il residuo R(x,u)=0:

$$u_1 - x^2 - 0.5\, u_2 - y_1 = 0$$

$$u_2 - sin(x) - 0.3\, u_1 - y_2 = 0$$

1.2 Obiettivo (target)

$$J = (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 0.5)^2 + \beta\,(y_1^2 + y_2^2)$$

I valori 1 e 0.5 sono I valori di target da raggiungere in fase di ottimizzazione globale.

Il termine β assieme a y_i^2 rappresenta il termine di regolarizzazione infatti nei modelli MDO si introduce spesso questo termine per garantire che il problema sia ben posto. Tuttavia, quando le variabili locali rappresentano quantità fisiche con un costo reale (peso, energia, complessità), è preferibile includere direttamente tali costi nella funzione obiettivo invece di usare una regolarizzazione puramente numerica.

2. Architetture MDO

Esempio 01 – modello semplicemente accoppiato

In questo esempio mostriamo l'analisi accoppiata (fixed-point iteration)

Per un valore fissato di x y1 e y2, risolviamo (u1, u2) tramite iterazione di punto fisso:

$$u_1^{k+1} = x^2 + 0.5\, u_2^k + y_1$$

$$u_2^{k+1} = sin(x) + 0.3\, u_1^{k+1} + y_2$$

Criterio di arresto: $R(x, y, u) = \| u_1^{k+1} - u_1^k, u_2^{k+1} - u_2^k \|$< tol, oppure massimo numero di iterazioni.

Esempio 02: MDF – Multidisciplinary Feasible

Variabili decisionali: (x, y1, y2).

A ogni valutazione della funzione obiettivo si chiude il coupling (u1,u2) con iterazione interna.

$$min_{x,y1,y2}\ J$$

$$con\ \ R(x, y, u) = 0\ soddisfatto\ ad\ ogni\ iterazione$$

Esempio 3: IDF – Individual Discipline Feasible (penalty)

Si introducono variabili surrogate z1≈u1 e z2≈u2 e si impone la compatibilità con una penalty quadratica.

$$min_{x,y1,y2,z1,z2}\ (z_1 - 1)^2\ +\ (z_2 - 0.5)^2\ +\ \beta(y_1^2 + y_2^2)\ +\ w_p(c_1^2 + c_2^2)$$

Vincoli di compatibilità:

$$c_1\ =\ z_1\ -\ (x^2\ +\ 0.5\,z_2\ +\ y_1)$$

$$c_2\ =\ z_2\ -\ (sin(x)\ +\ 0.3\,z_1\ +\ y_2)$$

Esempio 4: CO – Collaborative Optimization

CO è una formulazione a due livelli: il Sistema assegna target; le Discipline (in parallelo) ottimizzano le variabili locali per inseguire i target. Il Sistema coordina finché i mismatch si chiudono.

Variabili di Sistema:

$$(x, t_1, t_2)$$

Variabili locali:

$$y_1\ (Struttura),\ y_2\ (Termica)$$

Problema di Sistema (livello alto, penalty sui mismatch):

$$min_{x,t_1,t_2}\ (t_1 - 1)^2\ +\ (t_2 - 0.5)^2\ +\ w(g_1^2 + g_2^2)$$

Sottoproblemi disciplinari (livello basso):

$$u_1\ =\ x^2\ +\ 0.5\,t_2\ +\ y_1$$

$$min_{y_1}\ (u_1\ -\ t_1)^2\ +\ \alpha\,y_1^2$$

$$u_2\ =\ sin(x)\ +\ 0.3\,t_1\ +\ y_2$$

$$min_{y_2}\ (u_2\ -\ t_2)^2\ +\ \alpha\,y_2^2$$

Mismatch (compatibilità) dopo ottimizzazione locale:

$$g_1 = u_1 - t_1$$

$$g_2 = u_2 - t_2$$