

Geometria 3 – Topologia

V appello d'esame

Anno accademico 2024-2025

8/7/2025

Motivare adeguatamente le risposte. Per l'ammissione all'orale occorrono almeno 18 punti.
Tempo a disposizione: 3 ore.

- 1) (10 punti) Consideriamo il sottospazio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - 1)(y - x^2) = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

- a) (2 punti) X è compatto?
 - b) (2 punti) X è connesso per archi?
 - c) (2 punti) Quali sono le componenti connesse per archi di $\mathbb{R}^2 - X$?
 - d) (4 punti) Calcolare $\pi_1(X)$.
- 2) (6 punti) Dimostrare che non esiste una retrazione continua di $\mathbb{RP}^2$ su $\mathbb{RP}^1$.
- 3) (7 punti) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici. Supponiamo che X sia connesso. Dimostrare che Y è connesso.
- 4) (7 punti) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto. Dimostrare che U non si può immergere in $\mathbb{R}^2$.