

Geometria 3 – Topologia

VI appello d'esame

Anno accademico 2024-2025

8/9/2025

Motivare adeguatamente le risposte. Per l'ammissione all'orale occorrono almeno 18 punti.
Tempo a disposizione: 3 ore.

1) (10 punti) Consideriamo il sottospazio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - x)(y + x)(y - 1) = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

a) (2 punti) X è chiuso in $\mathbb{R}^2$?

b) (2 punti) X è connesso per archi?

c) (2 punti) Quali sono le componenti connesse per archi di $\mathbb{R}^2 - X$?

d) (4 punti) Calcolare $\pi_1(X)$.

2) (8 punti) Sia Y un sottospazio topologico connesso di uno spazio topologico X .

a) (5 punti) Dimostrare che $\text{Cl}_X Y$ è connesso.

b) (3 punti) Dimostrare che le componenti connesse di uno spazio topologico sono chiuse.

3) (6 punti) Dimostrare che esiste una retrazione per deformazione di $\mathbb{RP}^2 - \{a\}$ su $\mathbb{RP}^1$, dove $a \in \mathbb{RP}^2 - \mathbb{RP}^1$ è un punto.

4) (6 punti) Dimostrare il disco aperto $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.