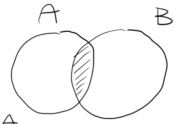
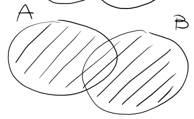
Lezione 3 (10/9/2025)

Insiemi

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



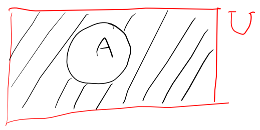
$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

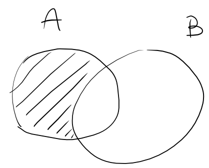


supponiamo che $A \subseteq U$

$\complement_U A = \{x : x \in U \text{ e } x \notin A\}$

$x \notin A \Updownarrow \neg(x \in A)$





$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

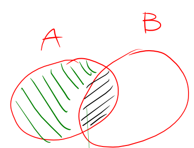
oss. $\complement_U A = U \setminus A$

Es. Provare che $A = A \cap B \iff B = A \cup B$

idea $\boxed{A = A \cap B \iff A \subseteq B}$

$\boxed{A = A \cap B \Rightarrow A \subseteq B}$

e $A \subseteq B \Rightarrow A = A \cap B$

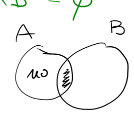


si può osservare che $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

e $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$

quindi se $A \cap B = A$ allora $A \setminus B = \emptyset$

$A \setminus B = \emptyset \iff A \subseteq B$



$A \cap B = A \Rightarrow A \setminus B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$

viceversa $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset \Rightarrow A = A \cap B$

$A = A \cap B \iff A \subseteq B \iff A \cup B = B$

Esercizio A, B, C insiemi e

$|A| = |B| = |C| = 5$

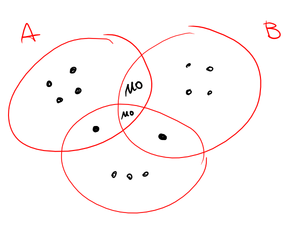
$A \cap B = \emptyset$

$|A \cap C| = |B \cap C| = 1$

quanto vale $|A \cup B \cup C|$?

$|A| = n$ significa A ha n elementi

svolgimento



13!

caso particolare del principio di "inclusione – esclusione".

con favorevoli

$|A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n|$

$= |A_1| + \cdots + |A_n| - (\quad 2 \quad)$

$+ (\quad 3) - (4 \quad) \quad ..$

$|A_1| = (n-1)!$

$|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$

$$|A_1 + \ldots + A_n| = \overset{|A_1|+|A_2|+ .. +|A_n|}{n(n-1)!} - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 1!$$

$$P = \frac{\text{con fav.}}{\text{con possibili}} = 1 - \frac{n! \pm \binom{n}{2}(n-1)! + \cdots (-1)^n \binom{n}{n} 1!}{n!}$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + .. + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$\lim P_n = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots$

Es. Provare che $\boxed{\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)}$

$\boxed{\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)}$

in generale non vale =

$\mathcal{P}(A \cap B) = \{$ sottoinsiemi di $A \cap B \}$

un sottoinsieme di $A \cap B$ è sottoinsieme di A? sì

se $E \in \mathcal{P}(A \cap B)$ allora $E \in \mathcal{P}(A)$

analogamente $E \in \mathcal{P}(A \cap B)$ allora $E \in \mathcal{P}(B)$

allora se $E \in \mathcal{P}(A \cap B)$ allora $E \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$$\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

sia $E \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$x \in A \cup B \iff x \in A$ oppure $x \in B$

in particolare $E \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow E \subseteq A$

$E \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow E \subseteq B$

$\Rightarrow E \subseteq A \cap B \Rightarrow E \in \mathcal{P}(A \cap B)$

sia $E \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

sia $\cancel{A} \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

significa $E \in \mathcal{P}(A)$ oppure $E \in \mathcal{P}(B)$

se $E \in \mathcal{P}(A)$ allora E è sott. di A

$$\Downarrow$$

E è sott. di $A \cup B$

se $E \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow$ E è sott. di $A \cup B$

quindi $E \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow E \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$\boxed{\cancel{}}$

caso particolare del principio di "inclusione – esclusione"

Teorema supponiamo di avere $A_1, A_2, \dots A_n$ insiemi

Allora

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| - \Big(\underbrace{|A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|}_{\text{int. di } 2}\Big)$$
$$+ \Big(\underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|}_{\text{int. di } 3}\Big) - (\text{int. di } 4)$$
$$+ (\text{int. di } 5)$$

e così via fino a n

vale per 2

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cap B| = 0, \quad |A \cap B \cap C| = 0$$

Problema dei "rencontres"

n coppie di fidanzati vanno al ballo, i ballerini scelgono a caso un compagno

qual è la probabilità che una coppia sia formata dai fidanzati? $\setminus P_n$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = 1 - \frac{1}{e} \qquad \boxed{e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

A_i = { le "accoppiate" in cui i fidanzati i-esimi ballano assieme }

$1 \le i \le n$

$A = \{a\}$ $\quad\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$B = \{b\}$ $\quad\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{b\}\}$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$
$$\neq$$

$A \cup B = \{a, b\}$ $\quad\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

Insieme prodotto cartesiano di 2 insiemi

siano A, B due insiemi

chiamiamo "coppia ordinata" con primo elemento in A e secondo elemento in B

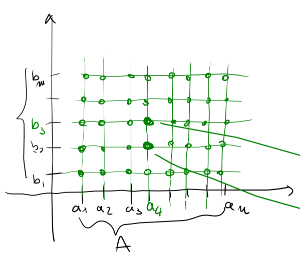
(a,b) un oggetto in cui
- il primo elemento è $a \in A$
- secondo elemento è $b \in B$

attenzione $(a,b) \neq \{a,b\}$

(infatti $\{a,b\} = \{b,a\}$)

in particolare $(a,b) = (a',b') \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

def $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ si dice prodotto cartesiano di A e B



(a_4, b_3)

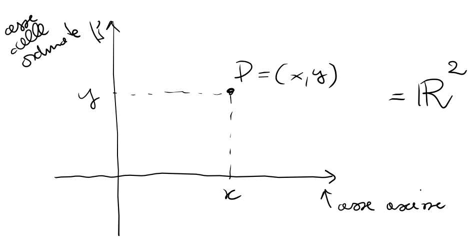
(a_4, b_2)

gli elementi di $A \times B$ sono i punti di incrocio delle rette per a_i e b_j

attenzione: non è detto che $A \neq B$

è interessante anche il caso $A \times A = A^2$

es. $A = \mathbb{R}$ numeri reali



$= \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Il prodotto $A \times B$ è l'ambiente in cui considerare i predicati di cui la prima variabile è in A e la seconda in B

cioè le relazioni tra A e B

Es. $A = \{$stud 1° anno CDS Fis + mat$\}$

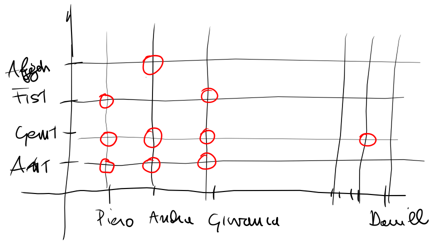
$B = \{$esami 1 anno CDS Fis + mat$\}$

$R(x,y)$ = al 10 agosto 2026 lo studente/ssa x ha superato (con esito positivo) l'esame y

Es. $A = \{$ stud 1° anno CDS Fis + mat $\}$

$B = \{$ esami 1 anno CDS Fis + mat $\}$

$R(x,y)$ = al 10 agosto 2026 lo studente/ssa x ha superato (con esito positivo) l'esame y



def. siano A, B insiemi, R relazione su A e B

$$G_R = \{(x,y) \in A \times B : R(x,y)\}$$

lo chiamo grafico della relazione

Consideriamo il caso di relazioni in cui $A = B$ e le chiamiamo relazioni su A

definizione. sia A un insieme e sia ρ relazione

(invece di scrivere $\rho(x,y)$ adesso scriviamo $x \rho y$)

"x è in relazione con y secondo la ρ"

1) se $\forall x \in A$, $x \rho x$ — ρ si dice riflessiva

2) se $\forall x, y \in A$ $x \rho y \Rightarrow y \rho x$ — ρ si dice simmetrica

3) se $\forall x, y \in A$ $x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$ — ρ antisimmetrica

4) se $\forall x, y, z \in A$ $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$ — ρ si dice transitiva

Es. $A = \{$ studenti/esse in quest'aula $\}$

$x \rho y$: significa "x conosce y"

¿ è riflessiva? sì (ogni studente conosce se stesso!)

¿ è simmetrica? (sì)

¿ è riflessiva? sì

(ogni studente conosce se stesso!)

¿ è simmetrica? (sì)

¿ è transitiva? **no**

numeri interi

Es. $A = \mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

$m \equiv_5 n$ "m è congruo a n modulo 5"

(relazione di congruenza modulo 5)

se $m - n$ è un multiplo di 5

cioè $m \equiv_5 n$ se $\exists k \in \mathbb{Z} : m - n = 5 \cdot k$

è riflessiva (verificarlo)

è simmetrica (")

¿ è transitiva?

$$\left.\begin{array}{l} m \equiv_5 n \\ n \equiv_5 z \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} m \equiv_5 z$$

$m \equiv_5 n \overset{def}{\Longleftrightarrow} m - n = k_1 \cdot 5 \quad (\exists k_1 \in \mathbb{Z})$

$n \equiv_5 z \overset{def}{\Longleftrightarrow} n - z = k_2 \cdot 5 \quad (\exists k_2 \in \mathbb{Z})$

$$m - z = (m - n) + (n - z) = k_1 \cdot 5 + k_2 5 \overset{!}{=} (k_1 + k_2) \cdot 5$$

$$\Downarrow$$

$m \equiv_5 z$ **OK**

$m \equiv_5 n$ significa $m - n = k \cdot 5$

$n - m = (-k) \cdot 5 \Rightarrow n \equiv_5 m$