

Esercitazioni di “Geometria”

Foglio 8

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

03 dicembre 2024

“La pratica è la verifica della teoria”

Esercizio 1. Date le seguenti applicazioni lineari di spazi vettoriali

$$f_1: (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow (2t - x + z, 3x - 2y + t, t - x + y - z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$f_2: (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow (t - x, y - z, t - x + y - z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$f_3: (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow (2t - x, y + 3z + x, x - 3y + 2t) \in \mathbb{R}^3,$$

$$f_4: (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow (3x - 4z + 2t, x - 4t + 3y, y - z + t) \in \mathbb{R}^3,$$

$$f_5: (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow (2y - z, z + 4x, 3x - 2t) \in \mathbb{R}^3,$$

$$f_6: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (2y + z - x, 2x - z + y, -2z - x - y, 4y - 2x + z) \in \mathbb{R}^4,$$

$$f_7: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (3z - 3x, 2x - 2y, y + z, 2x + z) \in \mathbb{R}^4,$$

$$f_8: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (x - y + z, y - z + x, z - x + y, -x - y - z) \in \mathbb{R}^4,$$

$$f_9: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f_{10}: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f_{11}: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3;$$

- a) calcolare il nucleo e l'immagine di f_k , le dimensioni e una base per ciascuno;
- b) determinare una rappresentazione cartesiana e parametrica dei precedenti sottospazi vettoriali;

c) determinare se e quali funzioni sono iniettive, suriettive o biettive.

Si rammenta che $k \in \{1, \dots, 11\}$.

Domanda: le precedenti risposte dipendono dal campo dei numeri reali?

Esercizio 2. In $\mathbb{C}^2$, si considerino la base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$, la base $\{(1, i), (1, -i)\}$ e l'endomorfismo lineare f tale che:

$$f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2, f(\underline{e}_2) = -\underline{e}_1.$$

Siano $\mathfrak{R}_{can}$ e $\mathfrak{R}_H$ i riferimenti vettoriali (ovviamente) associati ad esse

- a) Calcolare la matrice A rappresentante f rispetto a $\mathfrak{R}_{can}$.
- b) Calcolare la matrice A_{can}^H rappresentante f rispetto a $\mathfrak{R}_{can}$ ed a $\mathfrak{R}_H$.
- c) Calcolare la matrice A_H^{can} rappresentante f rispetto a $\mathfrak{R}_H$ ed a $\mathfrak{R}_{can}$.

Come sono coniugate tra di loro le precedenti matrici?

Esercizio 3. Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale complesso di dimensione 3 e $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ una sua base.

- a) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} - \underline{v} + \underline{w}\}$ è una base di $\mathbb{V}$;
- b) dimostrare che esiste un unico automorfismo lineare di $\mathbb{V}$ tale che:

$$f(\underline{u}) = \underline{v}, f(\underline{v}) = \underline{w}, f(\underline{w}) = \underline{u} - \underline{v} + \underline{w}.$$

- c) Rappresentare f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 4. Senza cambiare le notazioni dall'esercizio precedente, si determini un endomorfismo lineare g di $\mathbb{V}$ tale che:

$$\ker(g) = \langle \underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \rangle, \operatorname{Im}(g) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle.$$

Rappresentare g rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 5. Siano $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ ed f il suo endomorfismo lineare rappresentato (canonicamente) dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3-4i \end{pmatrix}$.

- a) Dimostrare che $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 1)\}$ sono basi di $\mathbb{C}^3$;
- b) determinare le rappresentazioni di f rispetto alle precedenti basi.

Esercizio 6. Data la seguente funzione

$$\sigma_{-1}: f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow f(x-1) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

- a) Dimostrare che σ_{-1} è un endomorfismo lineare di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;
- b) dimostrare che $\mathcal{B} = \{1, -1+x, 1-x^2, 1+x^3\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;
- c) rappresentare σ_{-1} rispetto alle basi canoniche e $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Esercizio 7. Studiare la diagonalizzabilità dei precedenti endomorfismi lineari.

Esercizio 8. Data la seguente matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) calcolare i suoi autovalori, specificando le loro molteplicità algebriche;
- b) calcolare gli autospazi relativi agli autovalori, calcolandone le dimensioni e una base per ciascuno di essi;
- c) tale matrice è diagonalizzabile?, se sì:
 - c.1) scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da soli autovettori di A ;
 - c.2) scrivere una matrice diagonale D simile ad A ;
 - c.3) la su scritta base è ortogonale?
- d) **Facoltativo:** se la matrice A fosse diagonalizzabile, calcolare una matrice diagonalizzante P e la sua inversa P^{-1} .
- e) Identificando A con un endomorfismo lineare f di $\mathbb{R}^3$, f è iniettiva?, è biiettiva?

Esercizio 9. Rispondere alle domande del precedente esercizio, utilizzando le seguenti matrici quadrate:

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -k & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ con } k \in \{4, -4\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

All'occorrenza, studiare la diagonalizzabilità delle precedenti matrici sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.