Le Matrici

$$\begin{bmatrix} L & E & \cdot \\ M & A & T \\ R & I & C \\ I & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Def [Matrice su un campo $\mathbb{K}$]. Scegliamo un campo [$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ p primo] e chiamiamolo $\mathbb{K}$.

abbiamo visto questi

Una matrice A su un campo $\mathbb{K}$ è una tabella riempita con elementi di $\mathbb{K}$, si scrive $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$

RIGHE × COLONNE

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 3 & \pi & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 & e \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$$

4 COLONNE

M STA PER MATRICI

3 RIGHE

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

D: Ma quando vedo $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ come faccio a ricordarmi quali sono le RIGHE e quali le COLONNE?

R: SEMPRE PRIMA LE RIGHE! È COME SCRIVERE, SCRIVIAMO PER RIGHE

Le Matrici hanno notazioni con MOLTI INDICI!
Ma questo non ci deve spaventare, sono solo delle ETICHETTE per ricordarci di che RIGA e di quale COLONNA stiamo parlando!

Notazioni e significati:

$M_{n\times m}(K) \ni A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ ← QUESTO si legge: La matrice A, che ha n RIGHE ed m COLONNE, è costituita dagli elementi a_{ij} ← INDICE delle COLONNE; INDICE delle RIGHE

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3/2 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow a_{11} = 5,\ a_{13} = 0,\ a_{23} = -7, \dots$

SI LEGGE: ELEMENTO DI POSTO (1,3)

$A_{(i)}$ ← QUESTO si legge: la i-ESIMA RIGA di A. Es: $A_{(2)} = (1\ \ -3\ \ -7)$

$A^{(j)}$ ← QUESTO si legge: la j-ESIMA COLONNA di A Es: $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3 \end{pmatrix}$

^tA ← QUESTO si legge: la TRASPOSTA di A, cioè la matrice che scambia le righe con le colonne e le colonne con le righe, definita dall' equazione

$$\left({}^t a_{ij}\right)_{i,j} := \left(a_{ji}\right)_{j,i}$$

che si legge: l' elemento (i,j) della matrice trasposta è uguale all' elemento (j,i) della matrice originaria

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3/2 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3/2 & -3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

⚠ NOTARE COME IL NUMERO DI RIGHE E COLONNE VIENE SCAMBIATO

D: In programmazione, ma anche in algebra lineare, i vettori vengono spesso rappresentati come MATRICI

$v \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ oppure $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$

$$v = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

UN VETTORE RIGA

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

UN VETTORE COLONNA

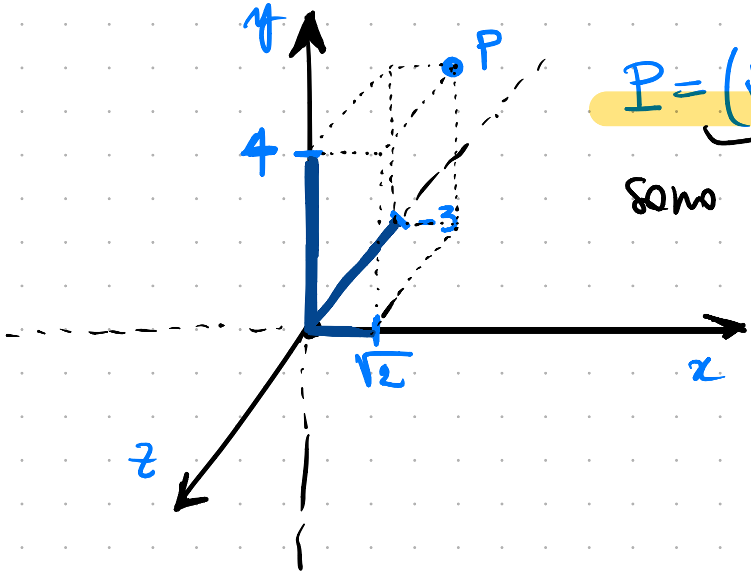
[POSSIAMO PENSARE CHE $w = {}^t v$!]

Ma allora che differenza c'è tra questi vettori e i vettori geometrici rappresentati da frecce?

Risposta breve: Nessuna! Perché in K^n

"i punti sono vettori geometrici, e i vettori geometrici sono punti"

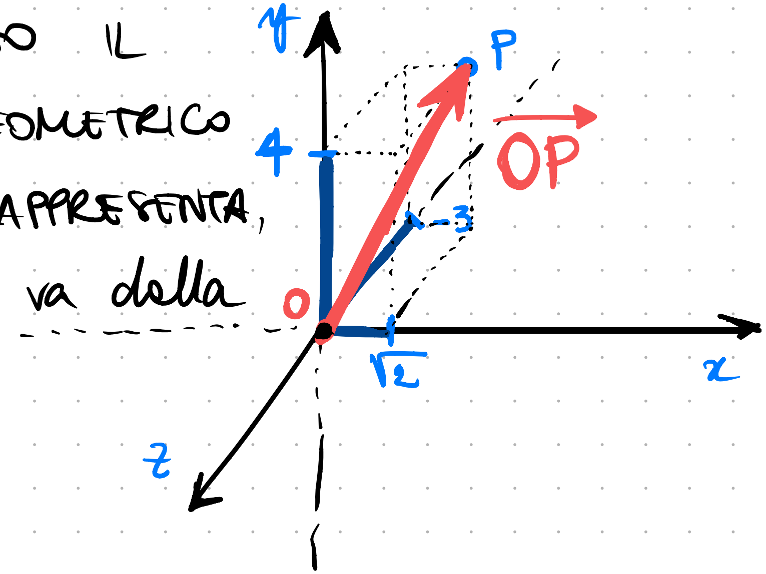
Esempio: Scegliamo $K=\mathbb{R}$ e mettiamoci nello spazio $\mathbb{R}^3$, lo spazio in cui viviamo.



$$P = \underbrace{(\sqrt{2} \quad 4 \quad -3)}_{\text{sono le sue coordinate } (x \ y \ z)} \in \mathbb{R}^3$$

$\updownarrow$ CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

IN ROSSO IL VETTORE GEOMETRICO CHE LO RAPPRESENTA, cioè quello che va dalla ORIGINE A P.



In altre parole

$$v = \overrightarrow{OP}$$

Ovviamente vale anche il viceversa: ad un vettore geometrico $\overrightarrow{OP}$ associamo il vettore $(x \ y \ z)$ delle coordinate di P

Oss: questo è più generale del solo $\mathbb{R}^3$, possiamo ora scegliere QUALSIASI CAMPO $\mathbf{K}$, QUALSIASI $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ e dire che

$$v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in K^n, \quad \in M_{1 \times n}(K)$$

[OGNI $x_i \in K$]

è un VETTORE, anche se il suo VETTORE GEOMETRICO è DIFFICILE da RAPPRESENTARE! [Magari perché $n > 3$, oppure perché $K = \mathbb{C}$ oppure $\mathbf{K} = \mathbb{Z}_p$ con p primo]

Il Prodotto scalare tra due vettori

NON SOLO, MA DUE VETTORI NELLO STESSO SPAZIO SI POSSONO ANCHE FACILMENTE MOLTIPLICARE PER DARE UN NUMERO [i.e. UNO SCALARE del CAMPO]

Def [PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI]

Si definisce il prodotto scalare:

$$v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \qquad w = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n)$$

$$\bullet : K^n \times K^n \longrightarrow K$$

NON È K^n! È PROPRIO K, CIOÈ TROVIAMO UNO SCALARE, PER QUESTO SI CHIAMA PRODOTTO SCALARE

$$(v, w) \longmapsto v \cdot w := v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

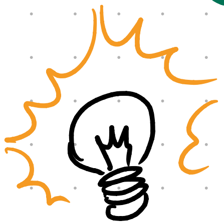
NOTAZIONE MATEMATICA COMPATTA PER LA SOMMA

Esempio: $\underset{\mathbb{R}^3}{v} = (2 \ 0 \ 1)$, $\underset{\mathbb{R}^3}{w} = (5 \ 1 \ -3) \Rightarrow v \cdot w = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 10 + 0 - 3 = 7 \in \mathbb{R}$

IL RISULTATO APPARTIENE AD $\mathbb{R}$, NON A $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow v \cdot w = 7$$

Il prodotto fra due matrici



È POSSIBILE USARE IL PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI PER DEFINIRE UN PRODOTTO TRA MATRICI!

IL PRODOTTO RIGA PER COLONNA:

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

Esempio:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{B} \in M_{3\times 2}(\mathbb{Q})} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \cdot B^{(1)} & A_{(1)} \cdot B^{(2)} \\ A_{(2)} \cdot B^{(1)} & A_{(2)} \cdot B^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 - 3\cdot 3 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \\ 0\cdot(-1) + 2\cdot 2 + (-1)(-3) & 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$$

Se invece scambiamo l'ordine della moltiplicazione:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \cdot B^{(1)} & A_{(1)} \cdot B^{(2)} & A_{(1)} \cdot B^{(3)} \\ A_{(2)} \cdot B^{(1)} & A_{(2)} \cdot B^{(2)} & A_{(2)} \cdot B^{(3)} \\ A_{(3)} \cdot B^{(1)} & A_{(3)} \cdot B^{(2)} & A_{(3)} \cdot B^{(3)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 2 & (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \\ -3 & -4 & -10 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

<u>Oss:</u> $A \cdot B \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$, $B \cdot A \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$: non appartengono nemmeno allo stesso spazio!

Esercizio: calcolare a mano vari prodotti di matrici riga per colonna. Quali condizioni sono necessarie?

D: Possiamo fare il prodotto tra due matrici qualsiasi?
R: No! Se i vettori non hanno la lunghezza giusta non possiamo nemmeno prendere il prodotto scalare.
In particolare, abbiamo bisogno che

il numero di colonne della prima matrice sia uguale a il numero di righe della seconda matrice

Def [Prodotto riga per colonne]

NOTARE LO STESSO m

$$\cdot : M_{n\times m}(K) \times M_{m\times p}(K) \longrightarrow M_{n\times p}(K)$$

$$\left(A=(a_{ij})_{i,j}\,,\; B=(b_{ij})_{i,j}\right) \longmapsto A\cdot B = \left(A_{(i)}\cdot B^{(j)}\right)_{i,j}$$

Esplicitamente: $A_{(i)}\cdot B^{(j)} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

Lo spazio di matrici $M_{n\times m}(K)$ come struttura algebrica

Consideriamo $(M_{n\times m}(K), +)$ come struttura algebrica, dove:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 & -1+4 \\ 0+1 & -\frac{1}{3}+0 & 2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 9 \end{pmatrix}$$

cioè la somma fra matrici è definita come:

$$+ : M_{n\times m}(K) \times M_{n\times m}(K) \longrightarrow M_{n\times m}(K)$$
$$\left(A = (a_{ij})_{i,j},\ B = (b_{ij})_{i,j}\right) \longmapsto A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{i,j}$$

Però possiamo anche definire una MOLTIPLICAZIONE PER GLI SCALARI del campo K:

$$\cdot : K \times M_{n\times m}(K) \longrightarrow M_{n\times m}(K)$$
$$\left(\lambda,\ A = (a_{ij})_{i,j}\right) \longmapsto \lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{i,j}$$

cioè: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cominciamo a farci la solita lista di domande per $(M_{n\times m}(K),+)$:

1) La somma di due matrici è ancora una matrice delle stesse dimensioni? SI ✓: $(M_{n\times m}(K),+)$ PROMOSSO A MAGMA
2) Vale la associativa? ✓ PROMOSSO A SEMIGRUPPO
3) Esiste il neutro? ✓ basta prendere $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ PROMOSSO A MONOIDE
4) Esiste l'opposto? ✓ PROMOSSO A GRUPPO
5) La somma commuta? ✓ PROMOSSO A GRUPPO ABELIANO!

Rispetto alla moltiplicazione per scalari di K:

6) $\lambda(A+B) \overset{?}{=} \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$ ✓
7) $(\lambda+\mu)\cdot A \overset{?}{=} \lambda\cdot A + \mu\cdot A$ ✓
8) $\lambda\cdot(\mu\cdot A) \overset{?}{=} (\lambda\cdot\mu)\cdot A$ ✓
9) $\underset{K}{\underset{\cap}{1}}\cdot A \overset{?}{=} A$ ✓

$\forall \lambda,\mu \in K$

$\forall A, B \in M_{n\times m}(K)$

$\Rightarrow (M_{n\times m}(K),+)$ PROMOSSO A K-SPAZIO VETTORIALE!

D: E con il prodotto? Possiamo promuovere $M_{n\times m}(K)$ ad un ANELLO (NEL CASO, ALTAMENTE **NON** COMMUTATIVO)?

R: Non ha nemmeno senso in generale parlare di prodotto su $M_{n\times m}(K)$, perché il prodotto

$$\cdot \quad M_{n\times \boxed{m}}(K) \times M_{\boxed{n}\times m}(K) \longrightarrow M_{n\times m}(K)$$

DEVONO ESSERE UGUALI?

non è nemmeno definito, a meno che $\underline{\underline{m = n}}$.

BASTA UN INDICE

D: Ha senso allora chiederselo per $(M_n(K), +, \cdot)$?

1) Il prodotto riga per colonna su $M_n(K)$ è chiuso? ✓ $(M_n(K), \cdot)$ PROMOSSO A MAGMA
2) Vale la associativa? ✓ PROMOSSO A SEMIGRUPPO
3) Esiste il neutro? ✓ basta prendere $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ PROMOSSO A MONOIDE
4) Esiste l'inverso? ✗ ASSOLUTAMENTE NO! $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ NON SI PUÒ INVERTIRE PERCHÉ HA $\det = 0$.
5) Il prodotto commuta? ✗ ASSOLUTAMENTE NO! $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
6) Distributiva? ✓

VALUTAZIONE FINALE PER $(M_n(K), +, \cdot)$:

Promosso al rango di:

$\boxed{\text{ANELLO NON COMMUTATIVO E K-SPAZIO VETTORIALE}}$

D: E se SELEZIONASSIMO SOLTANTO quelle matrici $n \times n$ che sono invertibili? Potremmo ottenere qualcosa di buono?

Def [GRUPPO GENERALE LINEARE di ORDINE n sul CAMPO K]

$$GL_n(K) := \{ A \in M_n(K) \mid A \text{ invertibile} \}$$

$\exists B : A \cdot B = \mathbb{1} = B \cdot A$, dove: $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SE ESISTE ALLORA CHIAMIAMO QUESTO B A^{-1}

R: Sì! Come dice il nome, questo è proprio un gruppo [comunque sempre **NON ABELIANO**].

D: Per essere un gruppo, il prodotto di due invertibili dev'essere invertibile.

Ma questo non è un problema: $(A \cdot B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot \mathbb{1} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$

QUINDI $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \leftarrow$ ⚠ SCAMBIO L'ORDINE!