Basi: estrazione, completamento, dimensione.

COROLLARIO: Spazi finitamente generati hanno una base FINITA

$\boxed{\text{PROP}}$ [ESTRAZIONE della BASE]: $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
$\Rightarrow \exists\, B$ BASE di V : $B \subset \{v_1, \dots, v_k\}$.

Si legge: se i vettori $v_1, \dots, v_k$ generano uno spazio vettoriale V, è possibile estrarre da $v_1, \dots, v_k$ una base di V (chiaramente, se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora sono già una base per V e non c'è nulla da fare. Ma se i $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti, allora alcuni di questi vettori sono superflui, e possiamo cominciare a toglierne uno alla volta fino a quando non troviamo un insieme di vettori che sia genera tutto lo spazio V, sia è linearmente indipendente: cioè è una base di V!)

Dim.: La dimostrazione è costruttiva [i.e. un algoritmo applicabile]. Per prima cosa **SCARTIAMO** tutti i vettori **NULLI** nell'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$. Se sono tutti nulli e $V = \{0\}$ allora $B = \phi$ e abbiamo finito. Dopo aver scartato tutti i vettori nulli, otteniamo un insieme $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_\ell\}$, $\ell \leq k$.

Scegliamo il primo vettore $\tilde{v}_1$ come primo vettore della base. Se $\tilde{v}_2 \in \text{Span}(\tilde{v}_1)$, allora lo scartiamo e passiamo avanti.

cioè in questo caso se $\tilde{v}_2$ è proporzionale a $\tilde{v}_1$, dato che ci sono solo due vettori coinvolti

Infatti sappiamo dai risultati appena visti che se $\tilde{v}_2 \in \text{Span}(\tilde{v}_1)$ allora $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$ sono **LIN. DIP.** e se $\tilde{v}_2 \notin \text{Span}(\tilde{v}_1)$ allora $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$ sono **LIN. INDIP.** Ora consideriamo il terzo vettore $\tilde{v}_3$. Se appartiene allo spazio vettoriale generato da quelli già scelti (a seconda o solo $\tilde{v}_1$ oppure $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$) allora lo scartiamo e passiamo avanti a considerare $\tilde{v}_4$, altrimenti se non appartiene allo spazio generato dai precedenti lo aggiungiamo all'insieme B. Iterando questo processo troviamo un insieme B di vettori **LIN IND.**

Inoltre, partendo da dei generatori di V e scartandone solo dei vettori che erano comunque **LIN. DIP.** a quelli già presenti (i.e. superflui), la proprietà di continuare a generare l'intero spazio vettoriale V è preservata.

Otteniamo quindi costruttivamente una base $\mathcal{B}$ di V.

Esempio: $V = \mathrm{Span}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1\\2\\0\\2 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 2\\1\\1\\0 \end{pmatrix}}, \underset{v_5}{\begin{pmatrix} 5\\4\\2\\2 \end{pmatrix}} \right) \subset \mathbb{R}^4$

Possiamo buttare via subito i vettori nulli e troviamo

$$\tilde{v}_1 := v_3, \quad \tilde{v}_2 := v_4, \quad \tilde{v}_3 := v_5$$

Siccome $\tilde{v}_1 \neq 0$, lo scegliamo come elemento della base $\mathcal{B}$.

Siccome $\tilde{v}_2$ non è proporzionale a $\tilde{v}_1$, lo scegliamo come elemento della base $\mathcal{B}$.

Raggiunto questo stadio, abbiamo nell'insieme (temporaneo) $\mathcal{B}$ i vettori $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ E DOBBIAMO DECIDERE SE

DICHIARARE BASE DI $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{B} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\tilde{v}_3 \in \operatorname{Span}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \qquad\qquad \tilde{v}_3 \notin \operatorname{Span}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$$

Osservando attentamente i vettori (oppure, in modo più sistematico, risolvendo un sistema lineare associato come nella lezione scorsa) si vede che:

$$\tilde{v}_3 = 1 \cdot \tilde{v}_1 + 2 \cdot \tilde{v}_2$$

Ecco che sono **LINEARMENTE DIPENDENTI**! In particolare

$$\tilde{v}_3 \in \operatorname{Span}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \implies \mathcal{B} := \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$$ SENZA $\tilde{v}_3$!

$\square$

OSS]

Q: E se avessimo deciso di cambiare l'ordine dei vettori da analizzare avremmo trovato basi diverse? **SI!** Avremmo trovato $\mathcal{B} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_3\}$ o $\mathcal{B} = \{\tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$. Sono tutte basi **VALIDE** E **DIVERSE** per lo spazio vettoriale V!!

PROP [COMPLETAMENTO delle BASE]

$$\left.\begin{matrix} v_1, \dots, v_k \in V \quad \text{LIN. IND.} \\ V \text{ FINITAM. GENERATO} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists B \supseteq \{v_1, \dots, v_k\} \text{ BASE di } V$$

QUESTA VOLTA B CONTIENE PRIMA ERA CONTENUTO.

USATA IPOTESI di FINITAM. GENERATO QUI

Dim.: [COSTRUTTIVA] $V = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_\ell) \Rightarrow V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell)$

LEMMA PRECEDENTE

Allora applichiamo il metodo **DELL' ESTRAZIONE delle BASE** visto sopra, tenendo **L' ORDINE** $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell$.

Siccome i primi k vettori sono **LIN. INDIP.** per ipotesi (in particolare tutti non nulli, e nessun $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$) allora secondo l' algoritmo tutti i vettori $v_1, \dots, v_k$ saranno scelti per l' insieme **B**.

Alla fine dell'applicazione dell'algoritmo avremo ottenuto:

$$\mathcal{B} := \{ v_1, \dots, v_k, w_1', \dots, w_t' \}$$

è possibile che $t=0$ e ci sono soltanto i vettori v_j

dove ogni $w_j' \in \{w_1, \dots, w_l\}$ è scelto con l'algoritmo dell'estrazione della base e quindi sono tutti **LIN. INDIP.** e generano l'intero spazio vettoriale V. $\square$

ESEMPIO: In $V = \mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ che non sono proporzionali $\Rightarrow$ sono **LIN. INDIP.**

Il nostro scopo è trovare una base $\mathcal{B}$ di tutto $\mathbb{R}^4$ che contenga v_1 e v_2, ovvero **COMPLETARE $\{v_1, v_2\}$ AD UNA BASE di $\mathbb{R}^4$.**

Seguendo la dimostrazione della proposizione del COMPLETAMENTO della BASE, siccome $\mathbb{R}^4$ è finitamente generato, basta scriverlo come $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3, \dots, w_t)$

②: MA QUALI GENERATORI CI CONVIENE USARE ?!?

Ci sono infinite possibilità. **MA** abbiamo visto che K^n ha una **BASE CANONICA** $\{e_1, \dots, e_n\}$. Perché **allora non completare una base qualsiasi con la base canonica?**

SAPPIAMO CHE È PROPRIO UNA BASE, NON SOLO CHE GENERA, MA IN QUESTO MOMENTO CI BASTA SAPERE CHE SIA GENERATO.

Scriviamo per cominciare:

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4)$$

Allora mettiamo tutto insieme in un unico insieme:

$$\{v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

che chiaramente è un insieme di vettori **LIN. DIP.** (per esempio è chiaro che $v_1 = e_1 + e_3$, ma v_1 è uno di quei vettori che **VOGLIAMO TENERE**).

Cominciamo allora la procedura di completamento dell'insieme $\{v_1, v_2\}$ alla base canonica.

PROCEDIMENTO:

VERIFICANDO LE DIPENDENZE LINEARI, SI SEGUONO LE TAPPE SOTTOLINEATE IN GIALLO:

$\{v_1, v_2\}$

$e_1 \overset{?}{\in} \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

NO → $\{v_1, v_2, e_1\}$ SI → $\{v_1, v_2\}$

$e_2 \overset{?}{\in} \mathrm{Span}(v_1, v_2, e_1)$ $e_2 \overset{?}{\in} \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

NO → $\{v_1, v_2, e_1, e_2\}$ SI → $\{v_1, v_2, e_1\}$ → .... NO → $\{v_1, v_2, e_2\}$ → .... SI → $\{v_1, v_2\}$ → ....

SI VEDE CHE
$e_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, e_1, e_2)$
$e_4 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, e_1, e_2)$

$$\mathcal{B} := \{v_1, v_2, e_1, e_2\}$$ BASE di $\mathbb{R}^4$ COMPLETATA