



Il rango di una matrice

Sia $A \in M_{n \times m}(K)$ e si legga $\text{rank}(A)$ come "il rango di A "

Def 1: $\text{rank}(A)$ è definito come la **DIMENSIONE** dello spazio vettoriale generato dalle **COLONNE** di A [i.e. la cardinalità massima tra i sottoinsiemi delle colonne di A che sono **LINEARI**.

INDIPENDENTI.

Def 2: $\text{rank}(A)$ è definito come la **DIMENSIONE** dello spazio vettoriale generato dalle **RIGHE** di A [i.e. la cardinalità massima tra i sottoinsiemi delle righe di A che sono **LINEARI**.

INDIPENDENTI.

Def 3: $\text{rank}(A)$ è il **MASSIMO** tra gli **ORDINI** delle **SOTTOMATRICI QUADRATE** di A che hanno come colonne **VETTORI LINEARI**.

INDIPENDENTI.

Def 4: $\text{rank}(A)$ è il **NUMERO** di **PIVOTS** della **FORMA SCALA** di A

TEOREMA

TUTTE E QUATTRO LE DEFINIZIONI
SONO EQUIVALENTI, E QUINDI
POSSIAMO USARE QUELLA PIÙ
COMODA A SECONDA
DELLA SITUAZIONE!

$$i) \text{ Def 1} \Leftrightarrow \text{Def 2} \Leftrightarrow \text{Def 3} \Leftrightarrow \text{Def 4}$$

$$ii) \text{ rank}(A) = \text{rank}(tA) \leftarrow \text{IL RANGO di } A \text{ è uguale al RANGO delle sua TRASPOSTA!}$$

$$iii) A \in M_n(K) \Rightarrow (\exists A^{-1} \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n)$$

↑ SOLO PER LE MATRICI QUADRATE, UN CRITERIO MOLTO UTILE!

Dim.: (vedi Sereni per l'esame orale).

Oss.: In realtà per dimostrare che $\text{Def 1} \Leftrightarrow \text{Def 2}$ basta usare il fatto che il rango di A è uguale al rango della sua trasposta [punto ii) del teorema, perché le colonne di A sono le righe della sua trasposta].

Ravello-C
Esamp
Inverte
Esamp

Oss.: guardare alla sottomatrice quadrata più grande possibile che abbia tutte le colonne (o equivalentemente righe) linearmente indipendenti cattura effettivamente tutte le righe oppure colonne linearmente indipendenti di A [i.e. non perdiamo informazioni], questa è l'intuizione dietro

alla dimostrazione che $\text{Def 3} \Leftrightarrow \text{Def 2}$ oppure equivalentemente che $\text{Def 3} \Leftrightarrow \text{Def 1}$.

Oss.: Abbiamo visto che le operazioni elementari preservano le **SOLUZIONI** dei **SISTEMI LINEARI**. In particolare le operazioni elementari sulle righe **NON CAMBIANO IL NUMERO MASSIMO DI RIGHE LINEARMENTE INDIPENDENTI**.

Infatti le operazioni elementari sostituiscono ad una riga una combinazione lineare di quella riga possibilmente con altre righe, ma **MAI** dimenticando quella riga [nel senso di moltiplicarla per zero]. Quindi se le operazioni elementari preservano il numero massimo di righe linearmente indipendenti [rango nella Def 2], ovvero $\text{rank}(A) = \text{rank}(\text{FORMA SCALA di } A)$.

Ma il rango della forma scala di A è chiaramente il numero delle sue righe **NON NULLE**, perché in forma scala ci sono zero aggiunti ad ogni riga e quindi le righe sono necessariamente

linearmente indipendenti. Ma quante righe non nulle ci sono in una matrice in forma scale?

UNA RIGA NON NULLA PER OGNI PIVOT! [della def di pivot, il pivot è il primo elemento non nullo della sua riga]. Quindi il rango di A è uguale al numero dei suoi pivots in forma scale, cioè

Def 2 $\Leftrightarrow$ Def 4, e questo deriva dall'osservazione che le operazioni elementari **PRESERVANO DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE**.

Oss: mettendo insieme Def 3 con Def 1 si ottiene:

$\text{rank}(A) \geq \text{rank}(B)$ con B sottomatrice di A
ovvero il rango di A è maggiore o uguale di **OGNI** **SUA SOTTOMATRICE**. Inoltre:

$$\text{rank}(A) = \max_{\substack{B \\ \text{sottomatrice} \\ \text{di } A}} \{ \text{rank}(B) \}$$

insieme frusti, prendere il massimo non è un problema

tra tutti i B sottomatrici di A .

Esempi

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 0$

(si vede facilmente con ognuna delle definizioni) **NON SOLO! LA MATRICE NULLA È L'UNICA AD AVERE RANGO NULLO.**

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) \leq \min(m, n)$

in ogni caso si vede dalle definizioni 3 e anche del fatto che Def 1 e Def 2 sono equivalenti.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K) \Rightarrow \text{rank}(A) = n$

si vede da tutte le definizioni

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 3$

si vede subito dalle Def 2 e dalle Def 4

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcoliamo il rango tramite la Def 1. Basta prendere le colonne ed **ESTRARRE UNA BASE.**

Consideriamo: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Estrazione della base dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4 :

STEP 1: v_1 lo prendiamo (il primo lo prendiamo sempre!
a meno che non sia il vettore nullo)

STEP 2: $v_2 \notin \text{Span}(v_1)$. Siccome sono solo due, appartenere allo span vuol dire semplicemente essere **PROPORTIONALE**. Ma v_2 non può essere proporzionale a v_1 (v_1 ha uno **zero nella seconda posizione**, mentre v_2 non ce l'ha!). Allora prendiamo anche v_2

STEP 3: Si vede che $v_3 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$, allora $v_3 \in \text{Span}(v_1, v_2)$ e quindi **NON** lo prendiamo.

STEP 4: $v_4 = (-2) \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$, quindi anche $v_4 \in \text{Span}(v_1, v_2)$, allora non prendiamo nemmeno v_4 .

Oss: sapremo già che se avessimo preso v_3 allora automaticam. dovevamo scartare v_4 . Perché? Perché $\text{rank}(A) \leq \min(m, n) = \min(4, 3) = 3 \Rightarrow$ non possiamo avere 4 colonne **LIN. INDIP!**

Quindi l'estrazione della base applicata a $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ci ha restituito la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

Questa base ha **CARDINALITÀ 2**. Quindi $= \{v_1, v_2\}$

$$\dim(\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = \dim(\text{Span}(\mathcal{B})) = 2 = \text{rank}(A)$$

VALE OGNI VOLTA
CHE ESTRAIAMO UNA
BASE

Def 1
del RANGO

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Proviamo con la Def 3.

$$\text{Notiamo subito } \text{rank}(A) \leq \min(2, 4) = 2$$

STEP 1: la matrice A è la matrice nulla? no.

Allora $\text{rank}(A) \geq 1$. In particolare la sotto-matrice **VERDE** è quadrata ed ha tutte le sue colonne linearmente indipendenti.

STEP 2: Vediamo se il rango è ≥ 2 . Se sì, dev'essere $= 2$ per forza perché più di 2 non può essere (righe).
Quindi il rango è uguale a 2 se e solo se

esiste una sottomatrice quadrata 2×2 con colonne linearm. indipendenti (cioè una matrice $(:, :)$ di RANGO MASSIMO POSSIBILE).

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{-6} & \boxed{7} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-3} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Vediamo ad esempio che la sottomatrice ~~ROSSA~~ non funziona perché $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non sono LIN. INDIP. (per forza, uno dei due è il vettore nullo!)

Prendendo la sottomatrice **BLU** $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ si vede subito che i vettori colonna **NON SONO** LIN. INDIP. perché $B^{(2)} = (-2) \cdot B^{(1)}$.

⚠️ NOTARE CHE LE SOTTOMATRICI SI POSSONO FORMARE ANCHE CON RIGHE E COLONNE NON ADIACENTI

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & -6 & \boxed{7} \\ \boxed{1} & 0 & -3 & \boxed{1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow C := \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendendo la prima e la quarta colonna abbiamo trovato la sottomatrice QUADRATA $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ di $RANGO = 2$, QUINDI $\text{rank}(A) \geq 2$, MA SICCOME $\text{rank}(A) \leq 2$, ALLORA:

$$\text{rank}(A) = 2.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gau\ss}} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{rank}(A) \stackrel{\text{Def 4}}{=} \# \text{PIVOTS della sua FORMA SCALA}$

$\downarrow$

$= 3$

A priori

$$\text{rank}(A) \leq \min(4, 5) = 4$$