Nome .... Cognome (in stampatello) ....

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Corsi di Laurea: INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE;
INGEGNERIA ELETTRONICA E INFORMATICA
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2023/2024

Trieste, 9 gennaio 2024

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 5 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 1 punto, gli esercizi valgono 20 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 18 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. Sia i l'unità immaginaria, allora $\frac{1+i}{3-2i} =$

(a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$; (c) nessuna delle precedenti.

2. Sia i l'unità immaginaria, allora $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{13} =$

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; (b) $-8i$; (c) nessuna delle precedenti.

3. Quale delle seguenti matrici è a scala?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Il seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ 2y + 3z & = 4 \\ (a^3 - 1)z & = 1 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è un parametro, è compatibile per:

(a) ogni $a \in \mathbb{C}$; (b) ogni $a \neq 1$; (c) $a \neq 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

5. Si considerino i sottospazi $U = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ di $\mathbb{R}^3$. La somma $U + W$ è:

(a) diretta; (b) non diretta; (c) uguale all'unione $U \cup W$.

6. Qual è l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Vero (b) Falso (c) Non si può dire

8. L'endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$,

(a) è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard;

(b) non è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard;

(c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

9. Per ogni $b \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

10. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, la retta

$$\mathbf{r} : \begin{cases} 2x - y + z = & 1 \\ x + y + z = & -1 \end{cases} \qquad \text{ed il piano} \quad \mathbf{p} : 3x + 2z = 0$$

sono:

(a) paralleli; (b) incidenti; (c) sghembi.

Esercizi

1. *(10 punti)* Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ x_2 + x_4 & = 0 \,. \end{cases}$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = {}^t(1,0,1,0)$ e $v_2 = {}^t(0,1,-1,-1)$.

(a) *(4 punti)* Si determini la dimensione di $U \cap V$ e quella di $U + V$, una base di $U \cap V$ (se esiste) ed una base di $U + V$.

(b) *(3 punti)* Si estenda la base di $U + V$ trovata al punto precedente a base di $\mathbb{R}^4$.

(c) *(3 punti)* L'unione $U \cup V$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (Si motivi la risposta.)

2. *(10 punti)* Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}.$$

(a) *(2 punti)* Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.

(b) *(4 punti)* Si determinino una base di $\ker(f)$ e una base di $\mathrm{im}(f)$.

(d) *(4 punti)* Si dimostri che f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.