Nome .... **Cognome (in stampatello)** ....

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Corsi di Laurea: INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE;
INGEGNERIA ELETTRONICA E INFORMATICA
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2023/2024

Trieste, 6 febbraio 2024

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 5 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 1 punto, gli esercizi valgono 20 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 18 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. Qual è la rappresentazione trigonometrica del numero complesso $z = 6 - 6i$?

(a) $6\sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})\right)$

(b) $6\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$

(c) $6\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$

2. Quale tra i seguenti numeri complessi **non è** una radice quinta di i?

(a) i (b) $\cos(\frac{17\pi}{10}) + i\sin(\frac{17\pi}{10})$ (c) $1 + i$

3. La dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato V è:

(a) il numero dei vettori di V

(b) il numero dei vettori linearmente indipendenti di V

(c) il numero dei vettori di una base di V

4. L'insieme

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = a \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

(a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ (b) per $a = 0$ (c) in nessuno dei precedenti casi

5. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ le rette

$$\mathbf{r}: \; -x + ky = 2k \qquad \mathbf{r'}: \; kx - y = k$$

del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono parallele?

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ (b) Per $k \neq \pm 1$ (c) Per $k = \pm 1$

6. La funzione $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $f(A) = {}^tA$

(a) è lineare e biettiva (b) non è lineare (c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

7. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

8. In $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard, i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ formano una base

(a) ortonormale (b) ortogonale (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

9. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, l'angolo convesso compreso tra i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{3}$

10. In $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard, esiste un endomorfismo autoaggiunto $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vero (b) Falso (c) Non si può dire

Esercizi

1. *(10 punti)* Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + 2z = 0 \right\}$, 1 è un suo autovalore e l'autospazio corrispondente $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y = 0\,,\ z = 0 \right\}$.

(a) *(4 punti)* Si dimostri che $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus V_1$.

(b) *(4 punti)* f è diagonalizzabile? In caso affermativo si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f e la matrice che rappresenta f rispetto a tale base.

(c) *(2 punti)* Si dica se f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard.

2. *(10 punti)* Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sia $\mathbf{r}$ la retta affine passante per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{p}$ il piano affine per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) (3 punti) Scrivere equazioni cartesiane per $\mathbf{r}$ e per $\mathbf{p}$.

(b) (3 punti) Determinare la posizione relativa tra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ (paralleli, incidenti o sghembi).

(c) (4 punti) Esiste una retta $\mathbf{r}'$ contenuta in $\mathbf{p}$ e tale che $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ siano sghembe? Nel caso affermativo si scriva una tale retta $\mathbf{r}'$ in forma cartesiana o parametrica.