SCRITTO 6/2/2024 - SOLUZIONE

DOMANDE

1. a) $|6-6i| = 6\sqrt{2} \Rightarrow 6-6i = 6\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= 6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$$

2. c) $|1+i| = \sqrt{2}$, $|i| = 1$ e $(\sqrt{2})^5 \neq 1$.

3. c)

4. b) Per $a=0$ $S = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$, se $a<0$ $S=\phi$,

se $a>0$ S è una circonferenza.

5. c) $\det\begin{pmatrix} -1 & K \\ K & -1 \end{pmatrix} = 1 - K^2 = 0 \iff K = \pm 1$

6. a) f è lineare per le proprietà della trasposta. È iniettiva perché $\ker(f) = 0$. Dal teorema della dimensione segue che f è anche suriettiva.

7. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. e)

9. c) $$\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{3}$$

10. e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono autovettori di f con autovalori 1 e 0, rispettivamente. Siccome $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non sono ortogonali, f non può essere autoaggiunto.

ESERCIZI

risolvo l'eq. lineare

1. a) $\ker(f) \stackrel{\downarrow}{=} \left\{ \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, y,z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 2$

risolvo il SLO

$V_1 \stackrel{\downarrow}{=} \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim(V_1) = 1.$

Siccome $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \ker(f)$, $\ker(f) \cap V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Siccome $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(V_1)$, $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus V_1$

b) $0, 1 \in Sp(f)$, $m_g(0) = \dim(Ker(f)) = 2$, $m_g(1) = \dim(V_1) = 1$

$\Rightarrow \quad 3 = m_g(0) + m_g(1) \leq m_a(0) + m_a(1)$
≤ 3.

Siccome $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(f)$ segue che $m_a(0) = m_g(0)$, $m_a(1) = m_g(1)$ e $m_a(0) + m_a(1) = 3 \Rightarrow f$ è diagonalizzabile.

La base diagonalizzante $\mathcal{B}$ è l'unione di una base di $\operatorname{Ker}(f)$ e di una base di V_1.

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) f non è autoaggiunto perché $\operatorname{Ker}(f)$ non è ortogonale a V_1.

2. a) $r: \begin{cases} x = 1 + t\cdot(-1) \\ y = -1 + t \\ z = 0 + t\cdot 2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$ (eq. param.)

$\Rightarrow t = y+1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$ (eq. cartesiane)

sostituisco $t = y+1$ nelle eq. parametriche

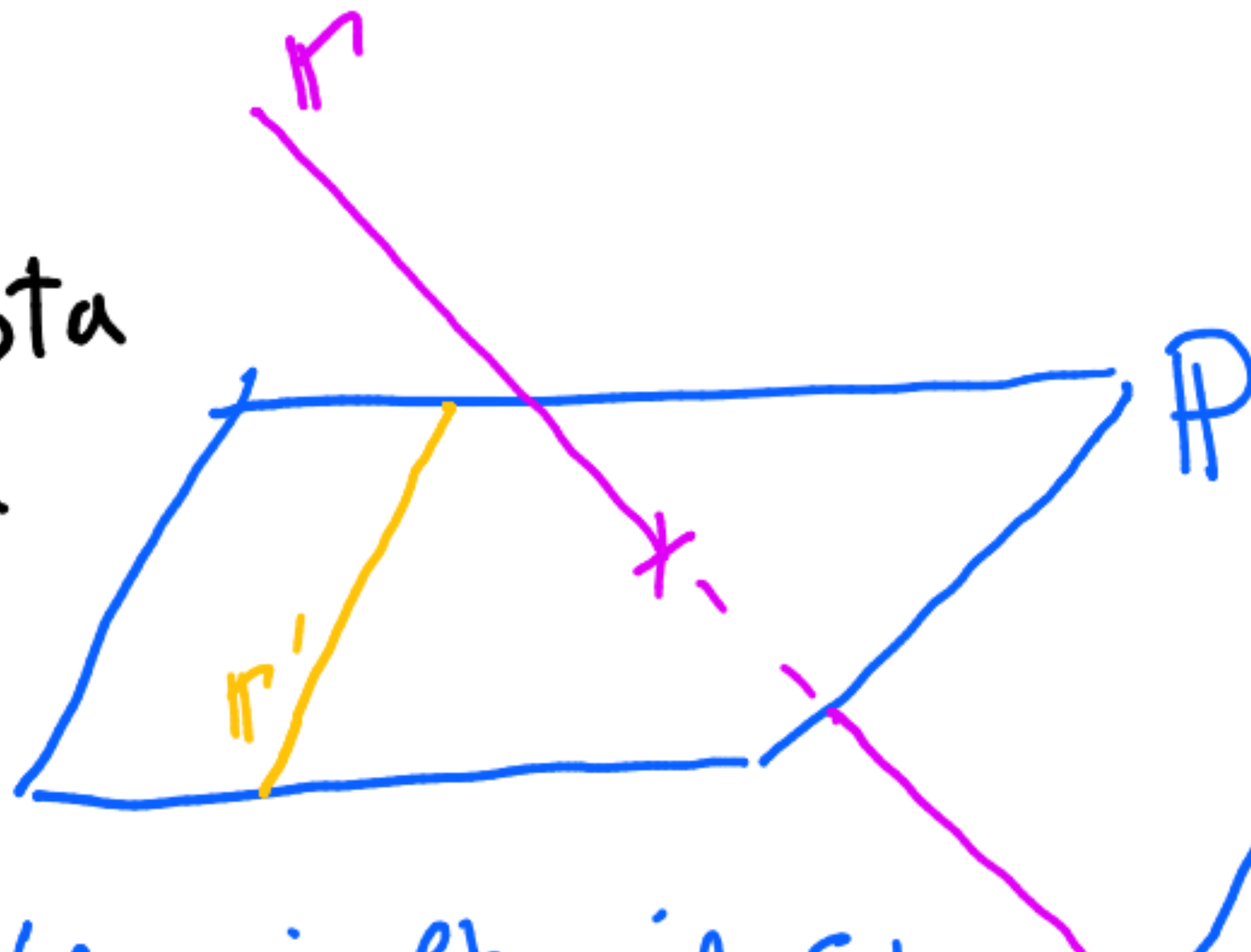
$$\mathbb{P}: \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ \boxed{z \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix} = z + (x-1) + y$$

$$= x + y + z - 1 = 0$$

b)
$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{OE3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 3 \Rightarrow r$ e $\mathbb{P}$ sono incidenti.

c) r' esiste e basta scegliere una retta contenuta in $\mathbb{P}$ non passante per
$$r \cap \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



(ho risolto il SL)

Ad es. π' è la retta passante per

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\pi' : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$