Nome .... **Cognome (in stampatello)** ....

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Corsi di Laurea: INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE;
INGEGNERIA ELETTRONICA E INFORMATICA
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2023/2024

Trieste, 19 febbraio 2024

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 5 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 1 punto, gli esercizi valgono 20 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 18 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. Qual è l'argomento del numero complesso $-\sqrt{3} - i$?

(a) 2 (b) $-\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{7\pi}{6}$

2. Per ogni numero complesso $z \neq 0$, si ha che $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, dove $\bar{w}$ è il coniugato di w.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

3. Il seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ (a^4 - 1)z & = 1 \\ 2y + 3z & = 4 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è un parametro, è compatibile per:

(a) ogni $a \in \mathbb{C}$; (b) $a \neq \pm 1, \pm i$; (c) $a \neq 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

4. Sia $A \in M_n(K)$ una matrice con $\det(A) = 0$. Allora esiste $b \in K^n$ tale che il sistema lineare $Ax = b$ non è compatibile.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

5. L'insieme

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = a \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$,

(a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ (b) per $a = 0$ (c) in nessuno dei precedenti casi

6. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$ sono collineari?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ (b) Per $k = 0$ (c) Per nessun k

7. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cap \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uguale ad 1?

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ (b) Per $k \neq 0$ (c) Per nessun k

8. Si consideri $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$?

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

9. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

10. In $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard, l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è autoaggiunto.

(a) Vero (b) Falso (c) Non si può dire

Esercizi

1. *(10 punti)* Si consideri l'endomorfismo $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 0 \\ -x+z \end{pmatrix}.$$

(a) *(4 punti)* Si determinino una base di $\ker(f)$ ed una base di $\mathrm{im}(f)$. Si dica se $\mathbb{C}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

(b) *(6 punti)* Si dimostri che f è diagonalizzabile e si trovi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di f. Si scriva la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

2. *(10 punti)* Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare tale che

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) *(4 punti)* Si dimostri che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(b) *(4 punti)* Si determini una base del sottospazio $W := \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$, l'ortogonale a $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto al prodotto scalare g.

(c) *(2 punti)* Si determini la proiezione ortogonale (rispetto al prodotto scalare g) del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sul sottospazio W del punto (b).