Nome .... **Cognome (in stampatello)** ....

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Corsi di Laurea: INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE;
INGEGNERIA ELETTRONICA E INFORMATICA
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2023/2024

Trieste, 02 luglio 2024 Prof. Fabio Perroni

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 5 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 1 punto, gli esercizi valgono 20 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 18 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. Sia i l'unità immaginaria, allora $\frac{1-i}{3-2i} =$

(a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$; (b) $\frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$; (c) nessuna delle precedenti.

2. Quale tra i seguenti numeri complessi **non è** una radice quinta di $-i$?

(a) $-i$ (b) $-\cos(\frac{17\pi}{10}) - i\sin(\frac{17\pi}{10})$ (c) $1+i$

3. Sia $A \in M_n(K)$ una matrice con $\det(A) \neq 0$. Allora esiste $b \in K^n$ tale che il sistema lineare $Ax = b$ non è compatibile.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

4. Il seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ 2y + 3z & = 4 \\ (a^2+1)z & = 1 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è un parametro, è compatibile per:

(a) ogni $a \in \mathbb{C}$; (b) ogni $a \neq 1$; (c) $a \neq \pm i$.

5. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ le rette

$$\mathbf{r} : -x + ky = 2k \qquad \mathbf{r}' : kx - y = k$$

del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono incidenti?

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ (b) Per $k \neq \pm 1$ (c) Per $k = \pm 1$

6. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$ non appartengono ad una stessa retta?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ (b) Per $k = 0$ (c) Per nessun k

7. Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Vero (b) Falso (c) Non si può dire

8. In $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard, i vettori $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ formano una base

(a) ortonormale (b) ortogonale (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

9. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

10. In $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard, l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è autoaggiunto.

(a) Vero (b) Falso (c) Non si può dire

Esercizi

1. *(10 punti)* Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_2 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 + x_4 & = 0\,. \end{cases}$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = {}^t(1,0,1,0)$ e $v_2 = {}^t(0,1,-1,-1)$.

(a) *(4 punti)* Si determini la dimensione di $U \cap V$ e quella di $U + V$, una base di $U \cap V$ (se esiste) ed una base di $U + V$.

(b) *(3 punti)* Si estenda la base di $U + V$ trovata al punto precedente a base di $\mathbb{R}^4$.

(c) *(3 punti)* L'unione $U \cup V$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (Si motivi la risposta.)

2. *(10 punti)* Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sia $\mathbf{r}$ la retta affine passante per i punti $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, e $\mathbf{p}$ il piano affine per i punti $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(a) (3 punti) Scrivere equazioni cartesiane per $\mathbf{r}$ e per $\mathbf{p}$.

(b) (3 punti) Determinare la posizione relativa tra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ (paralleli, incidenti o sghembi).

(c) (4 punti) Esiste una retta $\mathbf{r}'$ contenuta in $\mathbf{p}$ e tale che $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ siano sghembe? Nel caso affermativo si scriva una tale retta $\mathbf{r}'$ in forma cartesiana o parametrica.