Nome .... **Cognome (in stampatello)** ....

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Corsi di Laurea: INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE;
INGEGNERIA ELETTRONICA E INFORMATICA
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2023/2024

Trieste, 16 luglio 2024 — Prof. Fabio Perroni

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 5 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 1 punto, gli esercizi valgono 20 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 18 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. Sia i l'unità immaginaria, allora $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{13} =$

(a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; (b) $-8i$; (c) nessuna delle precedenti.

2. Quale tra i seguenti numeri complessi **non è** una radice quinta di $-i$?

(a) $-i$ (b) $-\cos(\frac{17\pi}{10}) - i\sin(\frac{17\pi}{10})$ (c) $1-i$

3. La dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato V è:

(a) il numero dei vettori di V

(b) il numero dei vettori linearmente indipendenti di V

(c) il numero dei vettori di una base di V

4. Sia $A \in M_n(K)$ una matrice con $\det(A) = 0$. Allora esiste $b \in K^n$ tale che il sistema lineare $Ax = b$ è compatibile.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

5. Si considerino i sottospazi $U = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ di $\mathbb{R}^3$. La somma $U+W$ è:

(a) uguale ad $\mathbb{R}^3$; (b) non diretta; (c) uguale all'unione $U \cup W$.

6. Qual è l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\-\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

8. La base $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right\}$ di $\mathbb{R}^2$ è

(a) ortonormale (b) ortogonale (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

9. Per ogni $b \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & b\\b & -1\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

10. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, la retta

$$\mathbf{r} : \begin{cases} 2x - y + z = & 1 \\ x + y + z = & -1 \end{cases} \quad \text{ed il piano} \quad \mathbf{p} : 3x + 2z = 0$$

sono:

(a) paralleli; (b) incidenti; (c) sghembi.

Esercizi

1. *(10 punti)* Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + 2z = 0 \right\}$, 1 è un suo autovalore e l'autospazio corrispondente $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y = 0\,,\ z = 0 \right\}$.

(a) *(4 punti)* Si dimostri che $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus V_1$.

(b) *(4 punti)* f è diagonalizzabile? In caso affermativo si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f e la matrice che rappresenta f rispetto a tale base.

(c) *(2 punti)* Si dica se f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard.

2. *(10 punti)* Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare tale che

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) *(4 punti)* Si dimostri che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(b) *(4 punti)* Si determini una base del sottospazio $W := \left(\operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$, dove l'apice $\perp$ indica l'ortogonale rispetto al prodotto scalare g.

(c) *(2 punti)* Si determini la proiezione ortogonale (rispetto al prodotto scalare g) del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio W del punto (b).