Nome .... Cognome (in stampatello) ....

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Corsi di Laurea: INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE;
INGEGNERIA ELETTRONICA E INFORMATICA
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2023/2024

Trieste, 29 luglio 2024 Prof. Fabio Perroni

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 5 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 1 punto, gli esercizi valgono 20 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 18 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. Su quale campo $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

(a) $K = \mathbb{Q}$; (b) $K = \mathbb{R}$; (c) $K = \mathbb{C}$.

2. $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

(a) Vero; (b) falso; (c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

3. Quanti endomorfismi ci sono $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tali che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

(a) 0; (b) 1; (c) infiniti.

4. Sia $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$, lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 simmetriche. La dimensione di V, $\dim(V) =$

(a) 4; (b) 3; (c) 2.

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ -x-z \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti matrici è $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, cioè la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) nessuna delle precedenti.

6. La matrice $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(a) vero; (b) falso; (c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

7. Qual è la rappresentazione trigonometrica del numero complesso $z = -9 - i3^{\frac{5}{2}}$?

(a) $18\left(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right)$;

(b) $18\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$;

(c) $-18\left(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right)$.

8. Quale delle seguenti matrici è a scala?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. L'insieme

$$S = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1 \right\}$$

è:

(a) un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

(b) un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$;

(c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

10. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, siano $\mathbf{r}$ una retta e P un punto. Quanti sono i piani di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che passano per P e sono perpendicolari ad $\mathbf{r}$?

(a) 1;

(b) dipende dalla posizione relativa di P ed $\mathbf{r}$;

(c) infiniti.

Esercizi

1. *(10 punti)* Sia $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo definito ponendo

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

(a) *(3 punti)* Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$.

(b) *(4 punti)* Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) *(3 punti)* f è diagonalizzabile?

2. *(10 punti)* Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare tale che

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) *(4 punti)* Si dimostri che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(b) *(4 punti)* Si determini una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $V := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ rispetto al prodotto scalare g.

(c) *(2 punti)* Si determini la proiezione ortogonale (rispetto al prodotto scalare g) del vettore $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ sul sottospazio W, dove V e W sono i sottospazi del punto (b).