Nome .... **Cognome (in stampatello)** ....

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Corsi di Laurea: INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE;
INGEGNERIA ELETTRONICA E INFORMATICA
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2023/2024

Trieste, 16 settembre 2024 Prof. Fabio Perroni

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 5 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 1 punto, gli esercizi valgono 20 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 18 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. Qual è l'argomento del numero complesso $-\sqrt{3}-i$?

(a) 2 (b) $-\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{7\pi}{6}$

2. Il seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x+y & = 1 \\ 2y+3z & = 4 \\ (a^3-1)z & = 1 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è un parametro, è compatibile per:

(a) ogni $a \in \mathbb{C}$; (b) ogni $a \neq 1$; (c) $a \neq 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. Qual è l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

(a) Vero; (b) falso; (c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

5. Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Vero (b) Falso (c) Non si può dire

6. Si consideri $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$?

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

7. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile.

(a) Vero (b) Falso (c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

8. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, la retta

$$\mathbf{r} : \begin{cases} 2x - y + z = & 1 \\ x + y + z = & -1 \end{cases} \quad \text{ed il piano} \quad \mathbf{p} : 3x + 2z = 0$$

sono:

(a) paralleli; (b) incidenti; (c) sghembi.

9. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, l'angolo convesso compreso tra i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{3}$

10. In $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard, l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è autoaggiunto.

(a) Vero (b) Falso (c) Non si può dire

Esercizi

1. *(10 punti)* Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}.$$

(a) *(2 punti)* Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.

(b) *(4 punti)* Si determinino una base di $\ker(f)$ e una base di $\operatorname{im}(f)$.

(c) *(4 punti)* Si dimostri che f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

2. *(10 punti)* Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sia $\mathbf{r}$ la retta affine passante per i punti $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, e $\mathbf{p}$ il piano affine per i punti $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(a) (3 punti) Scrivere equazioni cartesiane per $\mathbf{r}$ e per $\mathbf{p}$.

(b) (3 punti) Determinare la posizione relativa tra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ (paralleli, incidenti o sghembi).

(c) (4 punti) Esiste una retta $\mathbf{r}'$ contenuta in $\mathbf{p}$ e tale che $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ siano sghembe? Nel caso affermativo si scriva una tale retta $\mathbf{r}'$ in forma cartesiana o parametrica.