

Relazioni su A

A insieme, ρ relazione

- rifl. $\forall x \in A, x \rho x$
- simm. $\forall x, y \in A, x \rho y \Rightarrow y \rho x$ ($x \rho y \Leftrightarrow y \rho x$)
- trans. $\forall x, y, z \in A, x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$
- antisim. $\forall x, y \in A, x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$

Es. $A = \mathbb{Z}$

$\rho := \equiv_5$ (congruenza modulo 5)

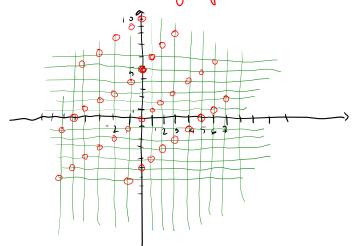
$n \equiv_5 m$ significa $n - m$ è multiplo di 5
 cioè $\exists k \in \mathbb{Z}, \text{ t.c. } n - m = 5 \cdot k$

$\equiv_5$ è $\left\{ \begin{array}{l} \text{rifl.} \\ \text{simm.} \\ \text{trans.} \end{array} \right.$

es. al posto di 5 possiamo mettere un qualunque $k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 0, 1\}$
 $\equiv_k$ congruenza modulo k $\left| \begin{array}{l} \equiv_{12} \end{array} \right.$

def. una relazione che ha rifl, simm, trans. è
 di due relazioni di equivalenza

es. Facciamo il grafico della $\equiv_5$



def. A insieme, $\sim$ è una equivalenza.

Sia $a \in A$

costruisco $[a]_{\sim} = \{b \in A : a \sim b\}$

↑ tutti gli elementi di A
 che sono in relazione
 con a

classe di equivalenza di a (inpetto all'equiv.)

Es. $A = \mathbb{Z}, \sim = \equiv_5$

$$[0]_{\equiv_5} = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots \}$$

$$[1]_{\equiv_5} = \{ \dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots \}$$

$$[2]_{\equiv_5} = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots \}$$

$$[3]_{\equiv_5} = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots \}$$

$$[4]_{\equiv_5} = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots \}$$

$$[5]_{\equiv_5} = \{ \dots, -5, 0, 5, 10, \dots \} = [0]_{\equiv_5}$$

def. sia A insieme, $\sim$ equivalenza

def. sia A insieme, $\sim$ equivalenza

l'insieme di tutte le classi di equivalenza
o ciascuna classe quoziente (di A rispetto a $\sim$)
è indicato con $A/\sim$

$$A/\sim = \{ [a]_{\sim} : a \in A \}$$

es $\mathbb{Z}/\equiv_5 = \{ [0], [1], [2], [3], [4] \}$

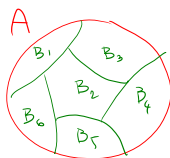
def. sia A insieme e sufficiente che
 $\mathcal{B}$ sia un insieme di sottoinsiemi di A
(non potuto scrivere $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$)

sufficiente che

- i) $\forall B \in \mathcal{B}, B \neq \emptyset$
- ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset$
(sono a 2 a 2 disgiunti)

iii) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = A$

allora $\mathcal{B}$ è una partizione di A



Teorema: A insieme, $\sim$ equivalenza
allora $A/\sim$ è una partizione di A

dim.

gli elementi della (finita) partizione
sono le classi di equivalenza

- 1) devo provare che $\forall a \in A, [a]_{\sim} \neq \emptyset$
basta osservare che $\forall a \in A, [a]_{\sim} \ni a$
perché $\sim$ è riflessiva

- 2) devo provare che se $[a]_{\sim} \neq [b]_{\sim}$
allora $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$

$$\left(p \Rightarrow q \Leftrightarrow \underbrace{\neg q \Rightarrow \neg p}_{\text{contronominale}} \right) \quad \text{esempio verificabile}$$

adesso dimostro che se $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \neq \emptyset$
allora $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$

adesso dimostro che $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \neq \emptyset$
 allora $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$

sufficiente che $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \neq \emptyset$

$\exists c \in A$ t.c. $c \sim a \wedge c \sim b$

allora per la simmetria e la transitività

$$a \sim b \left(\begin{array}{l} c \sim a \Rightarrow a \sim c \\ b \sim c \wedge c \sim a \Rightarrow b \sim a \\ \Downarrow \\ a \sim b \end{array} \right)$$

a questo punto prendo $x \in [a]_{\sim}$

$x \sim a$ ma $a \sim b$ allora $x \sim b$ allora
 $x \in [b]_{\sim}$

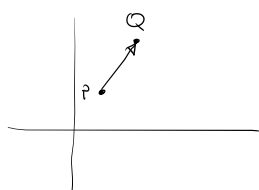
quindi $[a]_{\sim} \subseteq [b]_{\sim}$

scambiando i ruoli $[b]_{\sim} \subseteq [a]_{\sim}$ in conclusione
 $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$

il punto 3 è ovvio.

CVP

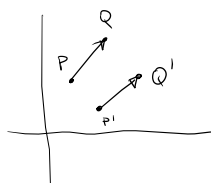
ES. $A = \{ \text{segmenti orientati (del piano)} \}$



$A = \{ (P, Q) : P, Q \text{ punti del piano} \}$
 ogni coppia

$(P, Q) \sim (P', Q')$

seguenti le due
 stessa lunghezza
 stessa direzione
 stesso verso.



è una equivalenza

chi sono le classi di equivalenza?

$A/\sim = \{ \text{insieme dei vettori} \}$

ES. fissa il 31 dicembre a mezzanotte (di un certo anno),
 lo zero dello conto dello ore

$[127]_{\equiv_9}$

$127 : 9 = 14$
 37
 1

$$127 = 14 \cdot 9 + 1$$

$$127 \equiv 1 \pmod{9}$$

357

$$127 = 1 + 2 + 7 = 10 = 1 + 0 \pmod{9}$$

$[127]_{\equiv_{11}}$

$$1 - 2 + 7 = 6$$

$$127 \equiv 6 \pmod{11}$$

def. Sia A insieme, ρ relazione
 ρ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva
 ρ si dice relazione d'ordine (o ordinamento)
 e l' coppia (A, ρ) si dice insieme ordinato.

Es. $A = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

la relazione $|$ che diciamo "divide"

$m|m$ significa "m divide m"

ovv. $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ t.c. } m = m \cdot k$

es. $\circ$ $3|6$? si perché $6 = 3 \cdot 2$

$\circ$ $3|8$? no non ottengo mai 8 come $3 \cdot k$ con k intero.

$\circ$ $|$ divide è riflessiva?

$\circ$ $\forall m, m|m$? si perché $m = m \cdot 1$ OK

$\circ$ $|$ divide è transitiva?

$\circ$ $m|n \wedge n|k \Rightarrow m|k$?

$m|n \Leftrightarrow n = k_1 \cdot m$

$m|k \Leftrightarrow k = k_2 \cdot n = k_2 \cdot (k_1 \cdot m) = (k_1 \cdot k_2) m$

$m|k$! ok

$\circ$ $|$ è antisimmetrica?

$\circ$ $m|m \wedge m|n \Rightarrow m=n$?

$m|n \Leftrightarrow n = k_1 \cdot m$

$m|n \Leftrightarrow n = k_2 \cdot m$

$\Rightarrow m = k_1 \cdot k_2 \cdot m$
 $m(k_1 k_2 - 1) = 0$

$\Downarrow$

$k_1 k_2 = 1$

ossia k_1 e k_2 sono
 interi propri

$k_1 = k_2 = 1$

e è l'unico
 risultato

$m = m$ OK

Es. $\mathbb{R}$, come relazione $\geq$

è relazione d'ordine

grafico divide

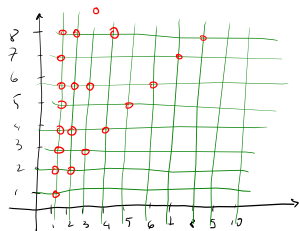
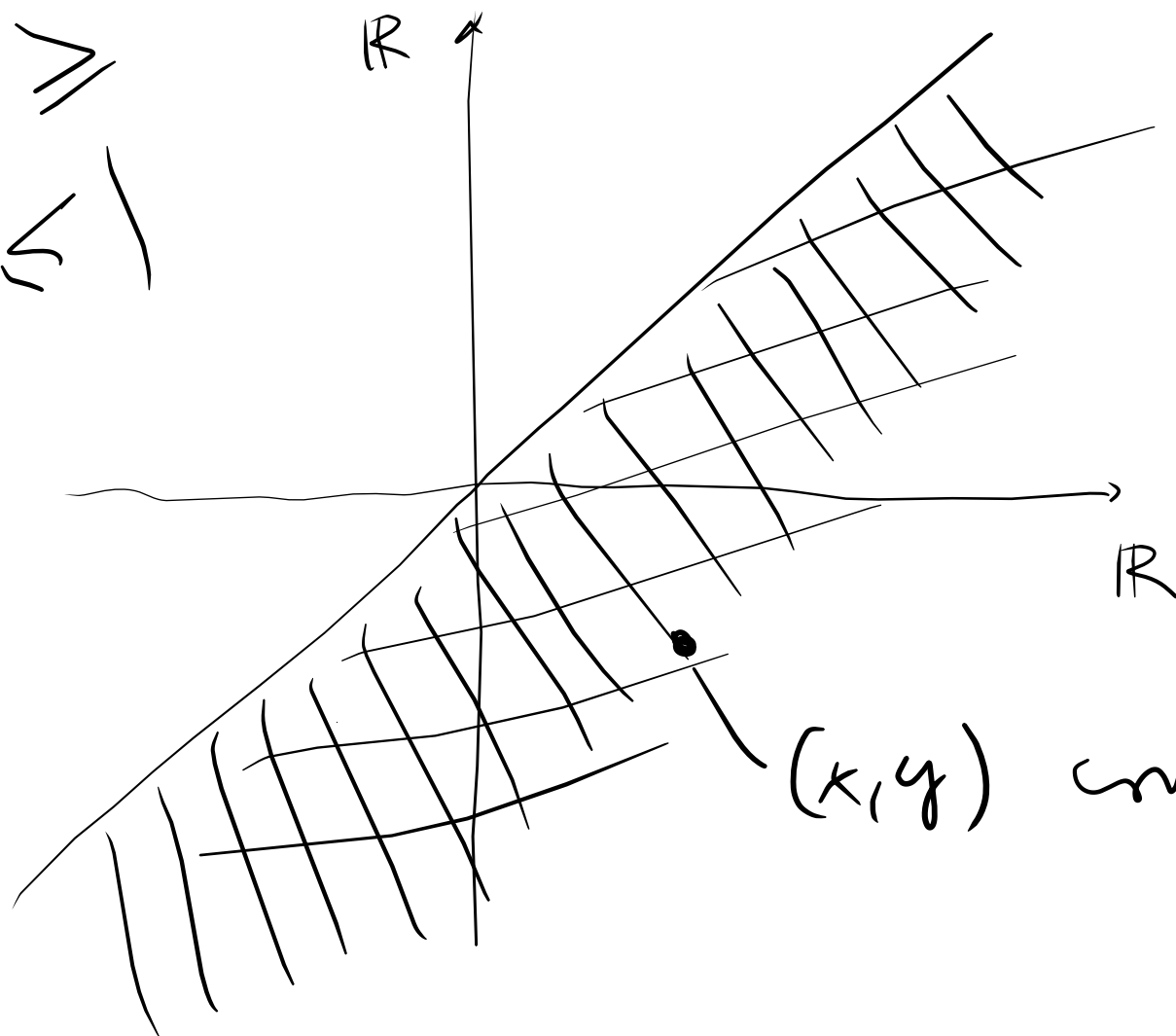


grafico di $\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$



$$(x, y) \in G$$

$$x$$

$$x \geq y$$

$$(x, y) \text{ con } x \geq y$$