Lezione - 12/9/2025

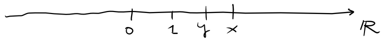
Relazioni su A

- rifl.
- antisimm.
- trans.

$\}$ ⇒ è relazione d'ordine

def. una relazione d'ordine, ρ, si dice **totale** se $\forall x, y \in A$, $x \rho y \vee y \rho x$

Es. considero $\mathbb{R}$



considero la relazione $\geqslant$ (maggiore o uguale)

coincide con o

$x \geqslant y$ se "x si trova a destra rispetto a y" (sull'asse reale)

- $\forall x$, $x \geqslant x$
- $\forall x, y$, $x \geqslant y \wedge y \geqslant x \Rightarrow x = y$
- $\forall x, y, z$ $x \geqslant y \wedge y \geqslant z \Rightarrow x \geqslant z$

è totale: perché $\forall x, y$ vale $x \geqslant y \vee y \geqslant x$

- Sia A insieme consideriamo su $\mathcal{P}(A)$ la relazione $\subseteq$

quali proprietà soddisfa?

¿ $\subseteq$ è riflessiva? sì

infatti $\boxed{\forall B \in \mathcal{P}(A) \quad B \subseteq B}$ $(\forall B, B \subseteq A)$

¿ $\subseteq$ è antisimmetrica? sì infatti

$\forall B, C \in \mathcal{P}(A)$

$B \subseteq C \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow B = C$ OK

¿ $\subseteq$ è transitiva? sì infatti

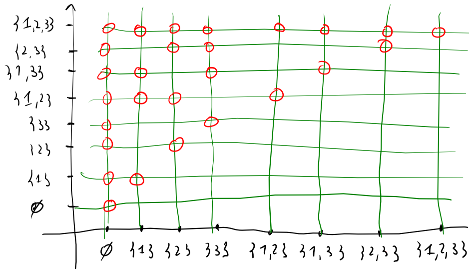
$\forall B, C, D \in \mathcal{P}(A)$ (ovvero $\subseteq A$)

$B \subseteq C \wedge C \subseteq D \Rightarrow B \subseteq D$ OK

quindi $\subseteq$ è relazione d'ordine.

$A = \{1, 2, 3\}$ faccio il grafico della relazione $\subseteq$ nell'insieme $\mathcal{P}(A)$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$



$\subseteq$ è totale?

no

$\neg (\forall x, y, \; x \rho y \vee y \rho x)$

$\exists x, y : \neg((x \rho y) \vee (y \rho x)) \Leftrightarrow \neg(x \rho y) \wedge \neg(y \rho x)$

$\neg(\forall x,y,\ x\rho y \vee y\rho x)$

$\exists x,y : \neg((x\rho y)\vee(y\rho x)) \iff \neg(x\rho y) \wedge \neg(y\rho x)$

basta un esempio!

$\{1\} \subset \{2\}$ $\quad \{1\} \not\subseteq \{2\} \wedge \{2\} \not\subseteq \{1\}$ OK

Es. ρ sull'insieme $\mathcal{P}(A)$

$B,C \in \mathcal{P}(A)$ $\quad B\rho C$ significa $B \setminus C = \emptyset \vee C \setminus B = \emptyset$

ate' $B,C \subseteq A$

¿ riflessiva? sì

perché $\underbrace{B \setminus B = 0}_{\forall B \in \mathcal{P}(A)} \Rightarrow B\rho B$ OK

¿ simmetrica? sì

perché se prendo $B,C \in \mathcal{P}(A)$

e suppongo che $B\rho C$

allora $B \setminus C = \emptyset \vee C \setminus B = \emptyset$

allora $C \setminus B = \emptyset \vee B \setminus C = \emptyset$

allora $C\rho B$.

¿ È transitiva? no

infatti $\boxed{\text{in generale}}$ si avrà che

$B\rho C \wedge C\rho D \not\Rightarrow B\rho D$

$A = \{1,2\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$B = \{1\},\ C = \{1,2\},\ D = \{2\}$

i punti di B che non stanno in C

$B \setminus C = \emptyset \Rightarrow B\rho C$

$D \setminus C = \emptyset \Rightarrow C\rho D$

però $D \setminus B = \{2\}$

$B \setminus D = \{1\}$ quindi $B \not\rho D$ OK

Es. $A = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

definiamo

$n\rho m$ significa $n+m$ è pari.

¿ è riflessiva? sì.

infatti $\forall n$, $n+n = 2n$ è pari!

¿ simmetrica? sì

$\forall n,m \in \mathbb{N}$ $\quad n+m$ è pari $\Rightarrow m+n$ è pari!

¿ è transitiva?

$\forall n, m, k$ $\quad \begin{matrix} n+m \text{ è pari} \\ m+k \text{ è pari} \end{matrix} \overset{?}{\Rightarrow} \underline{n+k \text{ è pari}}$

$n+m = 2h_1$ $\quad n+k$?

$m+k = 2h_2$

$n+m$ è pari $\Rightarrow$ n, m sono entrambi pari

oppure

n, m sono entrambi dispari

$m+k$ è pari m, k sono entrambi pari

m, k son entrambi dispari

se n è pari $\Rightarrow$ m è pari

e se m è pari $\Rightarrow$ k è pari $\Rightarrow$ n, k pari $\Downarrow$ $n+k$ pari

oppure

se n dispari $\Rightarrow$ m è dispari

e se m dispari $\Rightarrow$ k dispari $\Big\}$ $\Rightarrow$ n, k dispari $\Downarrow$ $n+k$ pari

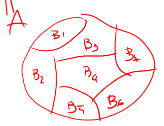
quindi $n \rho k$ OK

ρ è di equivalenza

oss. Valgono 2 proprietà (che dichiariamo come assiomi)

1) assioma della scelta

supponiamo di avere una partizione di A



- $\forall i$, $B_i \neq \phi$
- $\forall i, j$, $B_i \cap B_j \neq \emptyset \Rightarrow B_i = B_j$
- $\bigcup_i B_i = A$

Allora esiste un insieme F

tale che $F \cap B_i = \{a_i\}$ $a_i \in A$

2) Teorema (lemma di Zorn)

sia A insieme con una relazione d'ordine

supponiamo che ogni sottoinsieme di A, su cui tale relazione diventi totale, ha un elemento maggiorante (c'è un elemento di A che supera tutti gli elementi del sottoinsieme;

Allora in A esiste un elemento massimale (cioè un elemento che non è superato da nessun altro elemento)

Funzioni

siano A, B insiemi

e sia $R(x,y)$ una relazione tra A e B

def. la R si dice funzione se valgono 2 proprietà

1) per ogni elemento di A c'è un elemento di B tale che vale $R(x,y)$

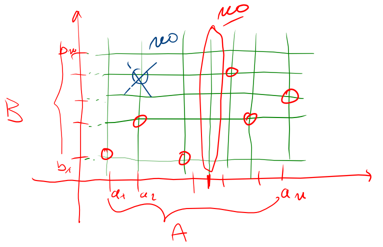
2) per ogni elemento x di A, se è in relazione con y_1 e y_2 in B allora $y_1 = y_2$

def. la R si dice <u>funzione</u> se valgono 2 proprietà

1) per ogni elemento di A c'è un elemento di B tale che vale $R(x,y)$

2) per ogni elemento x di A, se è in relazione con y_1 e y_2 in B allora $y_1 = y_2$

cioè per ogni elemento x di A esiste uno e un solo elemento di B che sia in relazione con x.



1) non esistono linee verticali senza pallini

2) su ciascuna linea verticale c'è un unico pallino

Alternativamente possiamo dire che una relazione tra A e B che sia una funzione è

dominio codominio

una terna (A, B, f)

insiemi

relazione (o legge) che ad ogni elemento del dominio associa uno e un solo elemento del codominio

d'ora in poi scriviamo

$$f : A \longrightarrow B$$

per dire che x è in relazione con y scriviamo $f(x) = y$

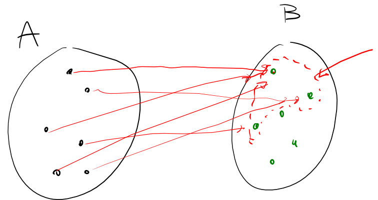
quindi $f : A \to B$, $x \longmapsto f(x)$

def. $f(x) \in B$ si dice "elemento immagine" di x tramite la f

def. data $f : A \to B$, l'insieme $\{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\}$

$= \{f(x) \in B : x \in A\}$

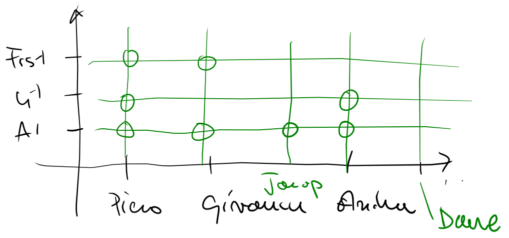
$=$ $f(A)$ <u>insieme immagine</u>



$f(A) \subseteq B$

ES. $A = \{$ studenti del 1'anno CDS fisica $\}$

$B = \{$ esami fatti al data 10/8 $\}$



non è una funzione

$A = \{$ stud. di IADA che hanno fatto Analisi 1 a febbraio $\}$

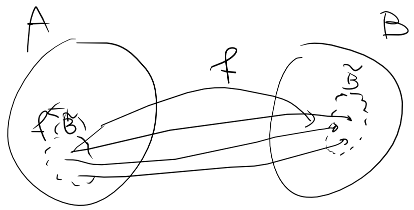
$B = \mathbb{N}$

$x \longmapsto$ voto

def. se $A \supseteq \tilde{A}$, $f(\tilde{A}) = \{ f(x),\ x \in \tilde{A} \}$

se $\tilde{B} \subseteq B$, $f^{\leftarrow}(\tilde{B}) = \{ x \in A : f(x) \in \tilde{B} \}$

↑ viene controimmagine di $\tilde{B}$



$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$

$]a,b[= \{ x \in \mathbb{R}, a < x < b \}$

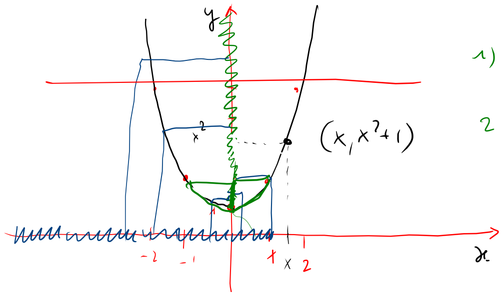
$]-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq a \}$

ES. sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$

1) trovare $f(\mathbb{R})$

2) trovare $f(]-\infty, 1])$

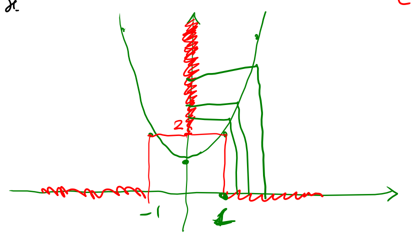
3) trovare $f^{\leftarrow}([2, +\infty[)$



1) $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$

2) $f(]-\infty, 1]) = [1, +\infty[$

3) $f^{\leftarrow}(\underbrace{[2, +\infty[}) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$



def. se $f(A) = B$
f si dice <u>suriettiva</u>

se $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
iniettiva