

Esercizi dati negli esami scritti precedenti

La divisione in anni accademici si riferisce all'anno accademico in cui è stato effettuato il corso. Cronologicamente gli appelli sono di giugno, luglio, settembre (2), gennaio, febbraio. L'anno accademico 2019/2020 comprende più esercizi perché a causa del Covid gli appelli scritti telematici e/o in presenza a volte sono stati sdoppiati in più gruppi.

Parti lasciate come esercizio, sono lasciate allo studente e andrebbero analizzate in sede d'esame nel caso di un esercizio analogo.

Man mano che si procede con gli esercizi, alcune risoluzioni sono omesse perché molto simili a esercizi già esposti. Contengono quindi rimandi ad esercizi già visti e sono lasciate volutamente incomplete.

Sono stati riscontrati errori *di battitura* (e non solo) nelle risoluzioni. Alcuni sono stati sistemati, altri mi sono dimenticato di correggerli perché ho perso il foglio su cui mi ero segnato le vostre segnalazioni. Non date per scontata la validità di ogni singolo passaggio. Provate a risolvere voi stessi gli esercizi e successivamente controllate se sono corretti.

In fondo si trovano le risoluzioni di alcuni esercizi dati per il corso di Analisi 3 per il CdL di Matematica. Alcuni esercizi (non tutti!) sono compatibili col corso di Analisi Matematica 2 per il CdL di Fisica.

Indice

1 Serie e integrali	2
1.1 A.A. 2018/2019	2
1.2 A.A. 2019/2020	2
1.3 A.A. 2020/2021	3
1.4 A.A. 2021/2022	4
1.5 A.A. 2022/2023	4
1.6 A.A. 2023/2024	5
1.7 A.A. 2024/2025	6
2 Continuità e differenziabilità, problemi di massimo e minimo	7
2.1 A.A. 2018/2019	7
2.2 A.A. 2019/2020	8
2.3 A.A. 2020/2021	9
2.4 A.A. 2021/2022	9
2.5 A.A. 2022/2023	10
2.6 A.A. 2023/2024	11
2.7 A.A. 2024/2025	11
3 Integrazione	12
3.1 A.A. 2018/2019	12
3.2 A.A. 2019/2020	12
3.3 A.A. 2020/2021	13
3.4 A.A. 2021/2022	14
3.5 A.A. 2022/2023	14
3.6 A.A. 2023/2024	15
3.7 A.A. 2024/2025	15
4 Equazioni differenziali	17
4.1 A.A. 2018/2019	17
4.2 A.A. 2019/2020	17
4.3 A.A. 2020/2021	18
4.4 A.A. 2021/2022	19
4.5 A.A. 2022/2023	20
4.6 A.A. 2023/2024	21
4.7 A.A. 2024/2025	21
5 Campi vettoriali	22
5.1 Primi esercizi	22
5.2 A.A. 2022/2023	22
5.3 A.A. 2023/2024	23
5.4 A.A. 2024/2025	24
6 Pensati per i matematici	25
7 Altri esercizi	28

1 Serie e integrali

1.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 1.1. *Al variare del parametro reale $\alpha < 0$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan(n^\alpha)}{\log_3\left(\frac{1}{n!} + 1\right)} \cdot \frac{e^{n^{-n}} - 1}{\arcsin(2^{-n} + 3^{-n})}.$$

Esercizio 1.2. *Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x^2 + 5x + 5)^n.$$

Esercizio 1.3. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})}.$$

Esercizio 1.4. *Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right) (\arctan n^\alpha).$$

Esercizio 1.5. *Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n + 4^n}.$$

Esercizio 1.6. *Studiare, al variare di $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, il carattere della serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1} (\tan x)^k.$$

1.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 1.7. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

Esercizio 1.8. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{\sin(n^{-1})}{6^n}.$$

Esercizio 1.9. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\tan x - \alpha \sin x} dx.$$

Esercizio 1.10. *Discutere la convergenza del seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)} dx.$$

Esercizio 1.11. *Determinare il carattere della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^n.$$

Esercizio 1.12. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha > 0$*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha}) \alpha^x} dx.$$

Esercizio 1.13. *Determinare il carattere della serie al variare di $\alpha \geq 0$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \arctan(\alpha^n).$$

Esercizio 1.14. *Determinare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n!}}{n^n n!}.$$

Esercizio 1.15. *Discutere la convergenza della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

Esercizio 1.16. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

1.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 1.17. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^{e^{-x}} - 1) \sinh x}{x^\alpha} dx.$$

Esercizio 1.18. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato (e, se possibile, darne una stima)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{\sqrt{|x^2 - 1|}} dx.$$

Esercizio 1.19. *Dire per quali valori di x converge la seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^{-2})}{\log\left(\frac{n+4}{n}\right)} \left(\frac{2x+4}{x-2}\right)^n.$$

Esercizio 1.20. *Dire per quali valori positivi a, b, c converge la seguente serie effettuando tutti i calcoli necessari*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a (\log_b n)^c}.$$

Esercizio 1.21. *Data la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arcsin(n^\alpha)}{\sin \frac{1}{n}},$$

dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie è ben definita e per questi determinarne il carattere.

Esercizio 1.22. *Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{|x^3 - x^2|^{\frac{1}{2}}} ds$$

converge in senso generalizzato.

1.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 1.23. Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^k \right]^{-1}.$$

Esercizio 1.24. Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \sin(\pi x) + f(x)}{|2x - 1|^{\alpha}} dx$$

dove $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 2022 \\ \arctan(x - 2022) & \text{se } x > 2022 \end{cases}$$

Esercizio 1.25. Determina il raggio di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{3n}{2n} x^n$$

Esercizio 1.26. Determina il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ definita come

$$x_0 = 100, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n + 4}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 1.27. Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k) \sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Esercizio 1.28. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 - 3 \sin n)^2}{\sqrt{3^n + 4n}}.$$

1.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 1.29. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin^2 n}{2} \left(\arctan(4n^2 - 36n + 77) + \frac{1}{4n^2 - 36n + 77} \right) \right]^n.$$

Esercizio 1.30. Determina il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\sqrt[3]{n}}$ dove la successione $(b_n)_n$ è periodica di periodo 10

(ovvero $b_{n+10} = b_n$ per ogni $n \geq 1$) e vale $\sum_{k=1}^{10} b_k = 0$.

Esercizio 1.31. Dire se i seguenti integrali in senso generalizzato sono convergenti o divergenti:

$$\int_{-\infty}^{10} \sqrt{y^2 + 1} - y \, dy, \quad \int_0^{\pi^2} \frac{\sqrt{\sin \sqrt{x}}}{e^{-x} - 1} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} ds.$$

Esercizio 1.32. Dire per quali valori reali del parametro λ converge la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^n.$$

Successivamente scrivere dominio e valore assunto al variare di x dalla funzione

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^n.$$

Esercizio 1.33. Determina il carattere della seguente serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$.

Esercizio 1.34. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=12}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{n \log n}.$$

1.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 1.35. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5) \log(n+5)}{n^2 \sqrt{n}}.$$

Esercizio 1.36. 1) Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$; e scrivere la somma della serie;

2a) Dimostrare che $\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+1}.$

2b) Sapendo che le serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sono serie convergenti di numeri non negativi, dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ è convergente.

Esercizio 1.37. Data la serie

$$\sum_{n \geq 1} n \frac{x^{n+1}}{(x+1)^n} \quad x \geq 0,$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

Esercizio 1.38. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+4}}{n+1},$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

Esercizio 1.39. Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{\alpha x} - 1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3 + x^2)^{1-\alpha}} dx.$$

Esercizio 1.40. Data la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} (4x-3)^n$, trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

Esercizio 1.41. Determinare per quali valori $y \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (4y-3)^n$.

Esercizio 1.42. Per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{\alpha \sin n}}{n^{\alpha} + 1}$$

1.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 1.43. *Dire se la seguente serie converge*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin n)(1 - \cos(1/n!))}{n^{-n}}.$$

Esercizio 1.44. *Discutere per quali valori convergono le seguenti serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n \ln n}$$

Esercizio 1.45. *Discutere la convergenza delle seguenti serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n - 1}, \quad \sum_{n=20}^{\infty} \sqrt{n+10} - \sqrt{n-10}.$$

Esercizio 1.46. *Studiare il carattere delle seguenti serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n^4) + n^{3/5}}{n^{3/5} \log(n^n + n!)}$$

2 Continuità e differenziabilità, problemi di massimo e minimo

2.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 2.1. *Discutere, della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Scrivere il valore del gradiente di f al variare di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.2. *Dato l'insieme*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 2\},$$

determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ nell'insieme E dopo aver dimostrato che questi esistono.

Esercizio 2.3. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y) = xy^2 - x^2 - 2y^2 + 2x,$$

determinarne i punti critici e la loro natura. Dire se la funzione ammette massimi e minimi globali nel suo dominio.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 1 \leq x \leq 7 - y^2\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Esercizio 2.4. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, y = z^2\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Esercizio 2.5. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y) = x^3 - x^2y + y^2 - x^2 - xy + 2y - x,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y - 1 \leq x\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Esercizio 2.6. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y) = xy^2 + 5xy - 8y^2 - 40y$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre gli eventuali punti di estremo vincolato della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 2\}.$$

Verificare se f assume massimo e minimo assoluto su E (si chiedono i punti di estremo, non il valore assunto!).

2.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 2.7. Classificare i punti critici della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = 2y^2 - 2y(\sin x + \cos x) + \sin(2x).$$

Disegnare l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \pi, |xy| \leq 1\}$$

e determinare, se esistono,

$$\min_{\mathbb{R}^2} f, \quad \max_{\mathbb{R}^2} f; \quad \min_E f, \quad \max_E f.$$

Esercizio 2.8. Determinare la continuità e differenziabilità di $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1) - y^2(y-1)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ \beta & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 2.9. Data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = \frac{e^{xy} z}{1 + z^2},$$

studiare il carattere dei suoi punti critici. Quindi individuare minimo e massimo di f sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Esercizio 2.10. Della seguente funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ determinare i punti del dominio in cui è continua e quelli in cui è differenziabile.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 2.11. Dato l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 12\}$$

e la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y, z) = x^2 e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$, determinare massimo e minimo di f su E e i punti in cui questi sono raggiunti.

Esercizio 2.12. Della seguente funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ discutere continuità e differenziabilità in $O = (0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin^2 x \frac{x - y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Discutere dal punto di vista puramente teorico (ovvero senza fare i calcoli) la procedura da adottare per dimostrare continuità e differenziabilità della stessa funzione negli altri punti del suo dominio.

Esercizio 2.13. Classifica i punti critici della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = y^3 - x^2 y - y^2 + x^2$.

Disegna l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 2 - y \leq 4\}$$

e determina massimo e minimo della funzione f su E e i punti in cui sono raggiunti.

Esercizio 2.14. Disegna l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{3x} \leq y \leq e^{2x}, |x| \leq 5\}$ e determina, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = e^{3x - \ln y}$.

Esercizio 2.15. Data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y, z) = 2xyz$ e l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3, xy = z\},$$

i. determinare per quali punti di E non è possibile applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange al fine di determinare i massimi e minimi di f su E ;

ii. determinare massimo e minimo di f su E , con metodo a piacere.

2.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 2.16. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|} \arctan x & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dire in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Esercizio 2.17. Data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$. Calcolare $\min_E f$ e $\max_E f$ (e i punti in cui questi valori vengono assunti), dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, |x - y| \leq 2 \leq z \leq 3\}.$$

Esercizio 2.18. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y - |x| \left(\frac{5}{2}x - 6 \right),$$

individuare i punti di massimo e minimo locale della funzione (non è necessario fornire il valore assunto). Dimostrare che f è illimitata sia superiormente che inferiormente. Calcolare, se esiste, l'approssimante lineare di f nel punto $(1, 0)$. Calcolare, se esiste, il polinomio di Taylor di grado 3 approssimante la funzione f nel punto $(1, 0)$.

Esercizio 2.19. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $f(x, y) = x|y - 1| + x^2 - \frac{1}{2}x$ determinare in quali punti è differenziabile e in quali non lo è (motivare la risposta in modo adeguato e completo). Trovare massimo e minimo della funzione f nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2 - y, |x| \leq y\}$.

Esercizio 2.20. Classificare i punti critici della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita come

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x - 1.$$

Consideriamo la restrizione $f|_A: A \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione precedente all'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}.$$

Trovare, se esistono, massimi e minimi locali della funzione $f|_A$. Essa è limitata su A ?

Esercizio 2.21. Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y - xy$, determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione f nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq |y| \leq 4\}.$$

Dire in quali punti tali valori sono raggiunti. Disegna A .

2.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 2.22. Dimostra che la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua nel suo dominio. Dimostra che non è differenziabile nell'origine. Dimostra che è differenziabile in ogni altro punto del dominio.

Esercizio 2.23. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y > x \\ x^3 - x + 2y & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

determina in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Determina, se esistono, massimo e minimo della funzione sull'insieme $Q = [-2, 2] \times [-2, 2]$.

Esercizio 2.24. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + \sqrt{3}y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

determina se essa è continua nell'origine. Poi determina se è differenziabile nell'origine.

Determina, se esistono, massimo e minimo della funzione f sull'insieme di livello 1 della funzione $F(x, y) = x^2 + y^2$.

Esercizio 2.25. Considerare l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, |x| + y \leq 0\}.$$

Data la funzione $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

determina se essa è continua nel suo dominio.

Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$, calcola massimi e minimi di f nell'insieme E .

Esercizio 2.26. Dire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x, y) = |y|^\alpha \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

può essere estesa con continuità nell'origine. Per quali valori α la funzione f_α è differenziabile?

Esercizio 2.27. Data la funzione $h(x, y) = x|x| - y^2$ e l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$, determina massimo e minimo assoluto di g in D .

2.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 2.28. Stabilire se la seguente funzione è continua e differenziabile:

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos(xy) + (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 2.29. Determina massimo e minimo assoluto di $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ nella palla euclidea chiusa di raggio uno centrata nell'origine.

Esercizio 2.30. Determina i punti critici della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2$ e determina la loro natura. Successivamente, trova massimo e minimo assoluto di f nella palla euclidea chiusa di raggio tre centrata nell'origine.

Esercizio 2.31. Individuare il valore b per cui la funzione $f: [-2, 2] \times [1, 4]$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y - 3x^2 - y^2 + 3y & \text{se } y \geq x^2 \\ x^4 - x^2y - 2x^2 + by & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

risulta continua, quindi individuare massimo e minimo di f .

Esercizio 2.32. Data la funzione f definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + xy)}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

determina il suo dominio D e disegnalolo. In quali punti del dominio la funzione è continua? La funzione è differenziabile nell'origine?

Esercizio 2.33. Su una palla di raggio 3 centrata nell'origine, la temperatura segue la legge $T(x, y, z) = x - 2y + 2z$. Trova il punto più caldo e il punto più freddo.

2.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 2.34. Data una funzione $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , si definisce la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ come $f(x, y, z) = \mu(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Per quali punti (x, y, z) la funzione f è continua? In quali punti possiamo dire con certezza che la funzione è differenziabile? Quale condizione aggiuntiva su μ va richiesta affinché sia differenziabile su tutto $\mathbb{R}^3$?

Sapendo che la funzione μ ha le seguenti proprietà: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mu(t) = 0$, la funzione è decrescente nell'intervallo $]-\infty, -3]$, crescente nell'intervallo $[-3, 4]$ e di nuovo decrescente in $[4, +\infty[$. Inoltre abbiamo i seguenti valori $\mu(-3) = -2$, $\mu(0) = -1$, $\mu(4) = 1$. Cosa possiamo affermare sull'esistenza (o non esistenza) di massimi e minimi per la funzione f ? In caso di esistenza, quanto valgono questi valori e in quali punti sono raggiunti?

Esercizio 2.35. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0\}.$$

Esercizio 2.36. Determinare i massimi e i minimi relativi e assoluti della funzione $f(x, y) = xye^{x-y}$ sulla regione piana delimitata dalle curve $|x - y| = 3$ e $xy = 4$.

Esercizio 2.37. Sia A il dominio della funzione $a(x, y) = \sqrt{4 - x - y}$ e sia B il dominio della funzione $b(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$. Disegna $A \cap B$.

Classifica tutti i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2ye^{-(x+y)}$. Calcola massimo e minimo, se esistono, della funzione f nell'insieme $A \cap B$.

Esercizio 2.38. Dopo averne stabilito l'esistenza, trovare tutti i punti di massimo/minimo relativo e assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y^2 - x^2 \geq z^2, |y| \leq 2\}.$$

Esercizio 2.39. Dopo averne stabilito l'esistenza, trovare il minimo e il massimo della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2y^2 + z^2$ sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |z - 1| \leq 4\}.$$

Specificare i punti in cui viene raggiunto il minimo e i punti in cui viene raggiunto il massimo.

2.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 2.40. Discuti l'esistenza di massimi e minimi della funzione $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sull'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.

Esercizio 2.41. Discuti l'esistenza di massimi e minimi della funzione $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 3x \leq 12\}$.

Esercizio 2.42. Considerare la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2y + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

e dire se è continua nell'origine, se ammette derivate parziali nell'origine, se è differenziabile nell'origine. Come si può motivare l'affermazione

<< se $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, allora f è differenziabile in (x_0, y_0, z_0) ? >>
senza eseguire i calcoli?

Esercizio 2.43. Dato l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3(x^2 + y^2) - 2y^2 = 0\}$, verificare che il punto $P = (1, 1)$ appartiene all'insieme. Spiegare perché in un intorno di questo punto è possibile vedere V come il grafico di una funzione $y = h(x)$ e calcolare la retta tangente a tale grafico nel punto P .

3 Integrazione

3.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 3.1. Calcolare l'integrale $\iiint_V y \, dx \, dy \, dz$ dove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2x, y \geq x\}.$$

Esercizio 3.2. Calcolare l'integrale $\iiint_E \frac{z}{xy} \, dx \, dy \, dz$ dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq x \leq z^2 \leq 4y, x^2 \leq y \leq 2x^2, z \geq 0\}.$$

Esercizio 3.3. Calcolare il baricentro del corpo C , avente densità costante $\rho = 2$, che si ottiene ruotando l'insieme

$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq z, y^2 + z^2 \leq 2y\}$$

di un angolo di 2π attorno all'asse y .

Esercizio 3.4. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del solido, avente densità costante $\rho = 1$, definito come segue

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq z, 0 \leq y \leq 1 - z\}.$$

Esercizio 3.5. Calcolare

$$\int_F e^z \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2, -\sqrt{3} y \leq x \leq y\}.$$

Esercizio 3.6. Calcolare

$$\int_F \frac{x^2 + y^2}{z^2} \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z \leq x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 \leq 5z, 3z \leq x^2 + y^2 \leq 4z\}.$$

3.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 3.7. Determinare il baricentro del corpo a densità costante $\mu = 2$ che occupa la porzione di spazio

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z\}.$$

Esercizio 3.8. Calcolare $\iint_E \frac{\sin(2x)}{y^2} \, dx \, dy$ dove

$$E = \{(x, y) \in [0, \pi/2] \times \mathbb{R} : y \leq \sin x \leq 2y; y \leq \cos x \leq 3y\}.$$

Esercizio 3.9. Calcola il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo di densità di massa $\mu(x, y, z) = x^{-3}$ che occupa la regione di spazio

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z \leq x \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 3.10. Calcolare il baricentro del seguente corpo planare di densità costante

$$F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} - 1 \leq y \leq \frac{1 - |x|}{2} \right\}.$$

Disegna F .

Esercizio 3.11. Calcola $\iiint_E z \, dx \, dy \, dz$ dove

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 9, z \geq y\}.$$

Esercizio 3.12. Data una sfera di raggio R e centro $O = (0, 0, 0)$, di densità $\mu(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$, calcolarne il momento di inerzia rispetto ad una retta passante per il suo centro. Esprimere il risultato in funzione di massa e raggio.

Esercizio 3.13. Calcola il baricentro della semisfera di raggio R centrata in $O = (0, 0, 0)$ e contenuta nel semispazio $z \geq 0$ (emisfero nord) di densità $\mu(x, y, z) = z^2$.

Esercizio 3.14. Determina, applicando il teorema del cambio di variabile, il valore del seguente integrale:

$$\iint_E \frac{e^x}{y} \, dx \, dy,$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{2x} \leq y \leq 2e^x, e^x \leq y \leq 2e^{2x}\}.$$

Esercizio 3.15. Calcolare il baricentro del corpo di densità costante che occupa la seguente porzione di spazio

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

3.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 3.16. Calcolare $\iiint_E (x-1) \, dx \, dy \, dz$, dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y \leq 1-x\}.$$

Esercizio 3.17. Calcolare il baricentro del corpo a densità costante che occupa la porzione di spazio

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 3-x^2, yz \leq 0, z \geq |y|\}.$$

Esercizio 3.18. Calcolare il momento d'inerzia I_z rispetto all'asse z del corpo solido di densità costante δ che occupa la porzione di spazio

$$E = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq R\}.$$

Dare la risposta in termini di massa M dell'oggetto e del valore R .

Esercizio 3.19. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido di densità $\delta(x, y, z) = z$ che occupa la porzione di spazio

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1 - 2z, |z - 2| \leq 2\}.$$

Esercizio 3.20. Calcolare

$$\iiint_E x^2 z \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 5, y \geq 0\}.$$

Esercizio 3.21. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido a densità costante d che occupa la parte di spazio

$$E = \{\tilde{\mathbf{x}} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2 > R, \|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty < 2R, y > |x|\}.$$

3.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 3.22. Data una lunghezza $\ell > 0$, si consideri il triangolo $T \subset \mathbb{R}^3$ avente i vertici nei punti

$$A = (0, 0, 2\ell), \quad B = (0, 0, \ell), \quad C = (0, \ell, 0).$$

Un solido di rotazione S è ottenuto ruotando di un angolo di 2π attorno all'asse z il triangolo T . Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido a densità costante ρ che occupa la parte di spazio individuata da S . Esprimere il risultato in termini della massa M del solido e della lunghezza ℓ .

Esercizio 3.23. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin x & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 1 & \text{se } x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$$

calcolare l'integrale di f sull'insieme $E = [0, 1] \times [0, 1]$, dopo aver spiegato perché la funzione f risulta integrabile su E .

Esercizio 3.24. Determina il valore di $\iint_E xy \, dx dy$, dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - \pi x - \pi y \leq 0\}$.

Esercizio 3.25. Determina il valore di

$$\iint_E f(x, y) \, dx dy,$$

dove

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, |x| + y \leq 0\}.$$

$$e \, f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y.$$

Esercizio 3.26. Calcolare

$$\int_E (2x + y) \, dx dy$$

dove E è la regione di piano delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$ e dalle rette di equazioni $y = x$ e $y = -\sqrt{3}x$, nel semipiano $y \geq 0$.

Esercizio 3.27. Calcolare

$$I = \iint_D \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] e^{x^2+y^2} \, dx dy$$

dove

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y \geq 0, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

3.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 3.28. Determina il valore di $\iint_E |x + y| \, dx dy$, dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \leq y, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$.

Poi determina il valore di $\iint_F |x + y| \, dx dy$, dove $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$

Esercizio 3.29. Calcola il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq 1 + 4x^2 + y^2 \leq 10\}.$$

Esercizio 3.30. Calcola

$$\int_E \frac{x^2 z - y^2 z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy dz$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, |z - 1| \leq 1\}.$$

Esercizio 3.31. Calcolare il momento di inerzia di una palla di raggio 3 centrata nell'origine avente densità radialmente variabile descritta dalla seguente funzione

$$\delta(r) = \begin{cases} r & r \leq 1 \\ r^{-1} & r > 1 \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Esercizio 3.32. Fissata una lunghezza $\ell > 0$, Calcola la massa M e il momento d'inerzia I_z del corpo a densità costante $\rho = 3$ che occupa la porzione di spazio

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2\ell y\}.$$

Esprimi il valore di I_z in termini di massa M e ℓ .

Esercizio 3.33. Dato $a > 0$, determina le coordinate del baricentro del solido che occupa la porzione di spazio individuata dall'insieme

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az\}$$

e avente densità di massa inversamente proporzionale alla distanza dall'origine.

3.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 3.34. Un solido è descritto dall'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ e la sua densità è data dalla funzione

$$\mu(x, y, z) = \frac{e^{x^2+y^2}}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Calcola il momento d'inerzia del solido.

Esercizio 3.35. Sia E l'insieme delimitato dai piani coordinati e dal piano $x + y + z = 4$. Calcola $\int_E z \, dx \, dy \, dz$.

Esercizio 3.36. Un oggetto di densità costante μ occupa un volume $V_R \subseteq \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando l'insieme

$$E_R = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x \geq 0, x^2 + z^2 - 2Rz \leq 0\}$$

di un angolo 2π attorno all'asse z . Calcola la massa M dell'insieme e il suo momento d'inerzia I_z rispetto all'asse z al variare di R . Poi esprimi il momento d'inerzia in termini di massa M e lunghezza R .

Esercizio 3.37. Calcolare baricentro e momento d'inerzia del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, z \geq 0\}$ a densità di massa costante.

Esercizio 3.38. Calcola la massa di un oggetto solido di densità $\rho(x, y, z) = |z|$ che occupa la porzione di spazio

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

3.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 3.39. Una sfera di raggio $2R$ centrata nell'origine ha densità di massa $\mu(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ dove

$$f(t) = \begin{cases} R & \text{se } t \leq R \\ t & \text{se } t > R \end{cases}$$

Calcola il momento di inerzia della sfera (che ruota attorno ad un asse passante per il suo centro) ed esprimilo in termini della sua massa M e del valore R .

Esercizio 3.40. Calcola il momento d'inerzia rispetto all'asse z del solido a densità costante che occupa la regione di spazio $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z, z \in [0, h]\}$. Esprimere il risultato in termini di massa M dell'oggetto e distanza h .

Esercizio 3.41. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z e il baricentro del solido a densità costante che occupa la parte di spazio

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0\}.$$

Dare le risposte in termini di massa M e raggio R del solido.

Esercizio 3.42. *L'insieme E ha come frontiera l'unione dei seguenti insiemi*

$$\partial E_1 = \{-1\} \times [-1, 1],$$

$$\partial E_2 = [-1, 1] \times \{-1\},$$

$$\partial E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, |x| \leq 1\},$$

$$\partial E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x = 0, x \geq 1\}.$$

Disegna E e calcola $\int_E xy \, dx \, dy$.

4 Equazioni differenziali

4.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 4.1. Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = y \cos^3 x - (y \cos x)^3 \\ y(\pi/2) = -1/2 \end{cases}$$

Esercizio 4.2. Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 6 \cos^2 x, \\ y(0) = -\frac{11}{52}, \quad y'(0) = -\frac{3}{26}. \end{cases}$$

Esercizio 4.3. Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{-x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.4. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' - 2y' + 5y = \sin x \cos x, \quad y'' - 2y' + 5y = 10 \sin(2x).$$

e risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \sin x \cos x, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - y' = 2 \sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.6. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (1+x^2)y' - (1+y^2)x = 0, \\ y(\sqrt{e^\pi - 1}) = 1. \end{cases}$$

4.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 4.7. Risolvi il seguente problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'' + 4x = \sin(2t + \alpha), \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.8. Risolvi il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = |x| \cos t - x \sin t, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.9. Risolvi il seguente problema di Cauchy, sia con il metodo dell'Ansatz (detto anche metodo della somiglianza) che con il metodo di variazione delle costanti:

$$\begin{cases} x'' - 8x' + 12x = e^{3t}, \\ x(0) = \frac{2}{3}, \\ x'(0) = -3. \end{cases}$$

Esercizio 4.10. Risolvi il problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} x' - \frac{1}{3}x = -2e^t x^4, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.11. Risolvi il seguente problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} x' + tx = \frac{t^3}{x}, \\ x(0) = -2. \end{cases}$$

Esercizio 4.12. Risolvi il problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x'' - x' + x = t, \\ x(0) = 4, \quad x'(0) = 8. \end{cases}$$

Esercizio 4.13. Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\frac{1+x}{1+t}}, \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Disegna l'insieme su cui è ben definita l'equazione differenziale.

Esercizio 4.14. Risolvi i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^{-1} + e^{-x} \\ x(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -t^{-1} + e^{-x} \\ x(1) = -2 \ln 2 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza.

Suggerimento: Introdurre la funzione $y(t) = e^{x(t)}$, quindi esprimere y' in funzione di y e t , usando l'equazione differenziale data. Si otterrà un'equazione differenziale lineare nella variabile y .

Esercizio 4.15. Risolvi il seguente problema di Cauchy, al variare di $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = e^{-t} \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Determinare i valori (x_0, v_0) per cui si ha $x(\pi) = 0$ e $x'(\pi) = 0$.

4.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 4.16. Risolvi il seguente problema di Cauchy, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $y_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} x'' + (x')^3 = 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = -v_0 \end{cases}$$

Qual è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione?

Determinare, se esistono, gli istanti $\tau > 0$ in cui si ha $x(\tau) = 0$.

Esercizio 4.17. Risolvi i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \cos^2 x \sin^2 t, \\ x(\pi) = \pi. \end{cases} \quad \begin{cases} x' = [\sin(t+x) + \sin(t-x)]^2, \\ x(\pi) = \pi. \end{cases}$$

Quali sono gli intervalli massimali di esistenza delle soluzioni?

Esercizio 4.18. Data l'equazione differenziale $x' = (x^2 - 4) \cos(4t)$, calcolare le soluzioni dei problemi di Cauchy (e specificare per ognuna il suo intervallo massimale di esistenza) aventi dati iniziali

$$x(\pi) = 1, \quad x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4.$$

Esercizio 4.19. Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''' + x' - 1 = 0, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.20. Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - x = 6e^t, \\ x(0) = 8, \\ x'(0) = 9. \end{cases}$$

Esercizio 4.21. Data l'equazione differenziale

$$x' = t(2 + x - x^2)$$

determina le soluzioni dei problemi di Cauchy aventi condizioni iniziali

$$\begin{array}{lll} [a] \ x(0) = 0, & [b] \ x(1) = -1, & [c] \ x(0) = -2, \\ [d] \ x(-2) = 2, & [e] \ x(0) = 3, & [f] \ x(\sqrt{2 \ln 2}) = 3. \end{array}$$

Di ognuna di esse determina l'intervallo massimale di esistenza.

4.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 4.22. Data una costante $K > 0$, considera l'equazione differenziale

$$x' = x \left(1 - \frac{x}{K} \right).$$

Determina se essa ammette soluzioni costanti e in caso affermativo specifica quali sono. Risolvi i problemi di Cauchy associati alla precedente equazione differenziale aventi dati iniziali

$$[a] \ x(0) = \frac{K}{2}, \quad [b] \ x(0) = 2K, \quad [c] \ x(0) = -K.$$

Di ognuna di esse determina l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4.23. Trova tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale e specifica per ognuna l'intervallo massimale di esistenza

$$x'' + 3x' + 2x = (1 - e^{2t})^{-1/2}.$$

Esercizio 4.24. Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' - 2tx = e^{t^2} \\ x(1) = 2e \end{cases}$$

Esercizio 4.25. Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 1 = \frac{3x'}{x+4} \\ x(0) = -10 \end{cases}$$

Esercizio 4.26. Trova le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x'' - 2x' = t + e^t.$$

Esercizio 4.27. Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = e^t, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

4.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 4.28. Scrivi la soluzione generale dell'equazione differenziale $x'' + (2k+6)x' + 12kx = 0$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Poi, determina un valore del parametro k per cui la funzione $x(t) = e^{t^2}$ è una soluzione dell'equazione

$$x'' + (2k+6)x' + 12kx = (4t^2 + 8t - 10)e^{t^2}.$$

Infine per tale valore di k scrivi la soluzione del problema di Cauchy con condizioni iniziali $x(0) = 2$ e $x'(0) = -4$.

Esercizio 4.29. Dato il problema

$$\begin{cases} yy'(e^{-x} + 1) - 1 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

esso ammette almeno una soluzione? Se esiste, è unica? Se esiste, determina una soluzione e il suo intervallo massimale di esistenza (può essere utile sapere che $\ln 2 \sim 0,693$).

Esercizio 4.30. Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 24 \sinh t, \\ x(0) = -1, x'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.31. Risolvi il seguente problema di Cauchy e indica l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} tx' + 3x = \frac{\sin t}{t^2}, \\ x(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.32. Trova le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x'' + 8x' + 25x = \sin t.$$

Quindi individua la soluzione che rispetta le condizioni iniziali $x(0) = 19/80$ e $x'(0) = -1$.

Esercizio 4.33. Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} tx^2 + t + t^2xx' - xx' = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza.

4.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 4.34. Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - x = 2t \\ x(0) = 4 \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.35. Trovare la soluzione u_a del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + 4u = \cos(at) \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$. Per quali valori di a la soluzione u_a non è limitata?

Esercizio 4.36. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''' - u = 1 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.37. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = u^2 - u - 2 \\ u(0) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = u^2 - u - 2 \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

Esercizio 4.38. Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{\cos x}{\sin x} y' \\ y(\pi/3) = 2 \\ y'(\pi/3) = 3 \end{cases}$$

e specifica qual è il suo intervallo massimale di esistenza.

4.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 4.39. Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' + x = x^2 e^t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

e specifica qual è il suo intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4.40. Dimostra che la funzione $5e^{2t}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0.$$

Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^t, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 3/2, \quad x''(0) = 8. \end{cases}$$

Esercizio 4.41. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' + \frac{tx}{1+t^2} = 3t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 4.42. Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4x'' - x = e^t, \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$$

5 Campi vettoriali

5.1 Primi esercizi

Esercizio 5.1. Dato il campo vettoriale $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito come

$$F(x, y, z) = (2xz^2 + y^2, z + 2xy, 2x^2z + y),$$

dimostra che è irrotazionale. Calcola l'integrale di linea del campo F lungo la curva $\gamma: [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come

$$\gamma(t) = (\tan t, \sin t, \cos t).$$

Esercizio 5.2. Calcola il flusso del campo $F(x, y, z) = (xy^2, x^2z, zy^2 + zx)$ uscente dalla superficie S frontiera del solido

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2, z \leq 2\}.$$

Esercizio 5.3. Dato il campo vettoriale $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito come

$$F(x, y, z) = (xy, y^2, yz),$$

calcolare il flusso di F uscente dall'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq -x\}$$

Esercizio 5.4. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x + y, 0, x^2z),$$

determina il valore del flusso del campo attraverso la superficie

$$\begin{aligned} \Sigma = \{ & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \} \\ & \cup \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}. \end{aligned}$$

Esercizio 5.5. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(xyz, \frac{x^2y^2}{2}, \log z \right),$$

determina il suo dominio e calcolane il rotore. Si tratta di un campo conservativo? Calcola l'integrale di linea del campo lungo la curva semplice con sostegno

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 = 1\}.$$

Esercizio 5.6. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{y - 4x}{4x^2 + y^2}, -\frac{x + y}{4x^2 + y^2} \right),$$

determina il suo dominio e calcolane il rotore. Si tratta di un campo conservativo? Quanto vale l'integrale di linea del campo lungo la curva $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t)$?

5.2 A.A. 2022/2023

Esercizio 5.7. Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (xz + x, yz + y, z^2)$, calcola il flusso del campo attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, |z| \leq 3\}$$

sia con calcolo diretto, sia con l'uso del teorema della divergenza.

Esercizio 5.8. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y \sin(xy), x \sin(xy) + z \cos(yz), y \cos(yz)),$$

dimostra che è irrotazionale. Calcolane un potenziale. Calcola il lavoro del campo F lungo la curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (s^2, s, -s^2)$ sia con calcolo diretto che con l'uso del potenziale.

L'esercizio può essere posto anche con il seguente linguaggio matematico.

Data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = y \sin(xy) dx + [x \sin(xy) + z \cos(yz)] dy + y \cos(yz) dz,$$

dimostra che è chiusa. Ammette una primitiva? Calcola $\int_{\gamma} \omega$ dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (s^2, s, -s^2)$ sia con calcolo diretto che con l'uso della primitiva.

Esercizio 5.9. Fissata la terna di valori $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ è dato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (axy + 3yz, x^2 + 3xz + by^2z, bxy + cy^3),$$

Determina per quale terna (a, b, c) è possibile calcolare il lavoro del campo F lungo una curva γ di cui si conosce solo il punto iniziale $(0, 1, -1)$ e il punto finale $(2, 1, 1)$. Quanto vale il lavoro in questo caso?

Esercizio 5.10. Calcola l'integrale

$$\int_{\sigma} 2y dx + x dy + 2 dz$$

dove σ è la curva che parametrizza il sottoinsieme

$$\Sigma \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y^2, y = 2x\}$$

di estremi l'origine $O = (0, 0, 0)$ e il punto $P = (2, 4, 18)$.

Con linguaggio fisico: calcola l'integrale del campo $G(x, y, z) = (2y, x, 2)$ lungo la curva che parametrizza il sottoinsieme

$$\Sigma \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y^2, y = 2x\}$$

di estremi l'origine $O = (0, 0, 0)$ e il punto $P = (2, 4, 18)$.

Esercizio 5.11. Data la costante $h > 0$, calcolare l'integrale del campo $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ sul bordo dell'insieme

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

5.3 A.A. 2023/2024

Esercizio 5.12. Dato il campo vettoriale $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito come

$$F(x, y, z) = \frac{(2x, 1, 4z)}{x^2 + y + 2z^2 + 1}$$

e la curva $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $\gamma(t) = (t, t^3, t^2)$. Spiegare perché è possibile calcolare l'integrale del campo F lungo la curva γ sebbene il suo dominio Ω non coincida con tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$ (scrivere chi è Ω). Calcolare quindi tale integrale.

Esercizio 5.13. Sia V la regione di spazio delimitata dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$ e Σ il suo bordo. Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (2x^2 - 3z, -2xy, -4x)$ calcolare il flusso del campo uscente da Σ .

Esercizio 5.14. L'insieme $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z = 4, z \geq 0\}$ è il sostegno di una superficie. Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (y^2 - 4z, 4z - y^2, zx^2 + zy^2)$ attraverso questa superficie.

Esercizio 5.15. Trova una parametrizzazione dell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 1\}$$

come superficie e calcola il flusso del rotore del campo $F(x, y, z) = (y^2z, xz^2, x^2y)$ attraverso questa superficie.

Esercizio 5.16. Dato il campo vettoriale $F(x, y) = (3x + y^2, 2xy + y^3)$ calcola il lavoro del campo F lungo la curva $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $\gamma(\theta) = (e^{\sin \theta}, \ln(2 + \cos \theta))$.

5.4 A.A. 2024/2025

Esercizio 5.17. Sia dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z^2)$. Calcolare il flusso di F attraverso una superficie avente come sostegno l'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, z \in [0, 1]\}$.

Esercizio 5.18. Calcola l'integrale del campo

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{(1+x)^2}, -\frac{1}{(1+y)^2} \right)$$

lungo la spezzata aperta che collega, nell'ordine i punti $(1, 0)$, $(0, 0)$ e $(0, 1)$ mediante il calcolo diretto dell'integrale. [Con spezzata aperta si intende che la curva non torna al punto di partenza]

Definire un dominio per il campo F che contenga la spezzata e dire se esso ammette un potenziale. In caso affermativo scrivere un potenziale di F su tale dominio e spiegare come il precedente integrale possa essere stimato per altra via.

6 Pensati per i matematici

In questa parte compaiono solo esercizi, senza riferimento all'appello in cui sono stati assegnati.

Esercizio 6.1. Data la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $\gamma(t) = (t^2, t, -t^2)$ e data la forma differenziale $\omega(x, y, z) = (2y + yz)dx + (2x + xz)dy + xydz$ calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ eseguendo esplicitamente i calcoli.

In un secondo momento, verifica che $d\omega = 0$ e calcola una primitiva di ω . A questo punto utilizza un secondo metodo per calcolare il precedente integrale.

Esercizio 6.2. Calcola l'integrale $\int_{\varphi} \omega$ dove

$$\omega(x, y, z, w) = xy dx dw + y dy dz - w dx dz$$

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi(u, v) = (u^2, uv, u + v, 2uv^2).$$

Esercizio 6.3. Trova le soluzioni del sistema di equazioni differenziali lineare $z' = Az$ con $z = (x, y)$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Prima alternativa. Trova una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tale che $A = P^{-1}DP$. Effettua la sostituzione $w = Pz$ in modo da ottenere un sistema lineare $w' = Bw$. Chi è la matrice B ? Trova tutte le soluzioni del sistema $w' = Bw$. Usa queste soluzioni per scrivere le soluzioni del sistema originale.

Seconda alternativa. Trasforma il sistema in un'equazione differenziale del secondo ordine manipolando in maniera opportuna le equazioni differenziali che costituiscono il sistema, trova le soluzioni di quest'ultima e da queste ricava le soluzioni del sistema lineare.

Esercizio 6.4. Date le forme differenziali definite su $\mathbb{R}^4$

$$\omega(x, y, z, w) = (xy)dx \wedge dz + (y^2w)dy \wedge dz + (xz)dx \wedge dw$$

$$\tilde{\omega}(x, y, z, w) = y dx + z dy + w dz + x dw$$

calcola $\gamma = \omega \wedge \tilde{\omega} + d\omega$. Infine calcola $\eta = \gamma \wedge \omega$. Scrivere il risultato come combinazione lineare degli elementi della base canonica dello spazio appropriato.

Esercizio 6.5. Fissato $x_0 = (-1, -1, -1, -1)$, considerare la forma differenziale $\omega : U \rightarrow \Omega_2(\mathbb{R}^4)$ definita sull'insieme $U = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x - x_0\|_2 > 1\}$ come

$$\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1x_4)dx_1 \wedge dx_2 + (x_3 - x_1x_2)dx_1 \wedge dx_4 + (x_1)dx_3 \wedge dx_4.$$

È chiusa? La forma differenziale soddisfa le ipotesi del teorema di Poincaré? È esatta? Calcolare l'integrale $\int_{\sigma} \omega$ dove $\sigma : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^4$ è definita come

$$\sigma(u, v) = (u, u + v, u^2, v).$$

Esercizio 6.6. Data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z, w) = y dx dy dz + zw dx dy dw + y dx dz dw - x dy dz dw,$$

calcolare $\int_{\sigma} \omega$ dove $\sigma : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è definita come

$$\sigma(r, s, t) = (rs + t, r + s, st, r).$$

Esercizio 6.7. Dato l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z, z \in [0, 2]\}$$

fornisci una sua 3-parametrizzazione σ e abbozzane un disegno, dopo aver disegnato l'insieme

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, 0, z) \in V\}.$$

Quindi calcola esplicitamente il bordo orientato $\partial\sigma$ a partire dalla parametrizzazione fornita. Disegna il sostegno delle 2-superfici che costituiscono il bordo e specifica in quale modo esse concorrono nel calcolo di un integrale $\int_{\partial\sigma} \omega$ dove ω è una forma differenziale. Specifica chi è il codominio di ω in questo caso.

Esercizio 6.8. Dato l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq \sin^2 x, x \in [0, \pi]\}$$

fornisci una sua 3-parametrizzazione σ e abbozzane un disegno. Quindi calcola esplicitamente il bordo orientato $\partial\sigma$ a partire dalla parametrizzazione fornita. Disegna il sostegno delle 2-superfici che costituiscono il bordo e specifica in quale modo esse concorrono nel calcolo di un integrale $\int_{\partial\sigma} \omega$ dove ω è una forma differenziale.

Esercizio 6.9. Data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = y \, dx \, dy + z \, dx \, dz,$$

calcolare $\int_{\sigma} \omega$ dove $\sigma : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è definita come

$$\sigma(r, s) = (r^2 s, r + s, rs).$$

Esercizio 6.10. Calcola $\int_{\sigma} \omega$ dove

$$\omega(p, q, r, s, t) = t \, dp \, ds + \sin(pq) e^r \, dp \, dt + q \, dq \, ds$$

e $\sigma : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^5$ è definita come

$$\sigma(x, y) = (x^2, y^2 + x, \cos(xy^2)x^2, 3x - 2y, x^3).$$

Esercizio 6.11. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e la funzione $b(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}$, considerare il sistema differenziale lineare $z'(t) = Az(t) + b(t)$. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del sistema omogeneo, ovvero i valori λ_1, λ_2 e le soluzioni z_1, z_2 tali che $z'_i = Az_i = \lambda_i z_i$. Scrivi quindi la matrice fondamentale $\Phi(t)$ associata e trova la soluzione del sistema non omogeneo tale che $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6.12. Trova le soluzioni del seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x' + 4x + y' = 1, \\ x' - 2x + y = t^2. \end{cases}$$

Esercizio 6.13. Data la forma differenziale $\omega = x^2 s \, dx \, dy \, dz + y^2 z \, dy \, dz \, ds$ e l'insieme

$$E = \{(x, y, z, s) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z^2 + s^2 \leq 4\}$$

calcola $\int_E d\omega$.

Esercizio 6.14. Data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z, t) = xt \, dx \, dy + xy \, dx \, dz + xy \, dz \, dt.$$

calcola $\int_{\sigma} \omega$ dove σ è una parametrizzazione dell'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + z^2 = y^2 + 4t^2 = 4\}.$$

Esercizio 6.15. Scrivi tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 4x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Trova la soluzione tale che $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$.

Esercizio 6.16. Considerare l'equazione differenziale $\Delta u + u^3 = 0$, dove $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Di questa equazione differenziale si cercano soluzioni $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^4$. Assumiamo che u sia soluzione della precedente equazione differenziale e valga $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = v\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right)$, dove $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$. Quale equazione differenziale del secondo ordine risolve $v = v(r)$? [Suggerimento: la risposta è del tipo: $v'' + \frac{\alpha}{r}v' + v^\beta = 0$ dove α e β sono costanti che lo studente deve individuare]

Esercizio 6.17. Considerare l'equazione differenziale $v'' + \frac{3}{r}v' + v^3 = 0$, dove la variabile r è definita nell'intervallo $]0, +\infty[$. Data una soluzione $v = v(r)$ della precedente equazione, definire le funzioni $x(t) = v(e^t)e^t$ e $y(t) = x'(t)$. Quale sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} x' = p(x, y), \\ y' = q(x, y) \end{cases}$$

risolve la coppia di funzioni (x, y) ? Trova una funzione non costante H tale che $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$ per ogni soluzione del precedente sistema.

Esercizio 6.18. Trovare una parametrizzazione σ dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \leq 0, y \leq 0\}.$$

Calcolare l'integrale su $\partial\sigma$ della forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = 4z^2 dy \wedge dz + 3y^3 dz \wedge dx + 2x^2 dx \wedge dy.$$

Esercizio 6.19. Fornisci una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, dell'insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}.$$

Poi costruisci il suo bordo orientato $\partial\sigma$ seguendo la procedura illustrata durante il corso, specificando quali componenti di $\partial\sigma$ degenerano in superfici non regolari e quali coppie invece sono formate da superfici equivalenti con orientazione opposta. Specifica poi come le precedenti concorrono al calcolo dell'integrale $\int_{\partial\sigma} \omega$ dove ω è una 2-forma generica.

Esercizio 6.20. Calcolare $\int_{\sigma} \omega$ dove ω è la 3-forma differenziale

$$\omega(r, s, t, u, v) = uv dr ds dt + r ds dt dv + v dt du dv$$

e $\sigma : [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^5$ è definita come

$$\sigma(x, y, z) = (x + z, x^2, z, y^3 + x^2, y^2 + z).$$

Esercizio 6.21. Fornire la parametrizzazione $\sigma : I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di un cono solido di raggio R e altezza h . Successivamente calcolare i vari elementi che ne costituiscono il bordo orientato $\partial\sigma$. Abbozzare un disegno (o più di uno se più comodo) in cui si evidenzia il sostegno di σ e il supporto di ogni elemento che costituisce il bordo orientato.

Esercizio 6.22. Dato un sistema lineare di equazioni differenziali $u'(t) = Mu(t)$, quale proprietà si può dedurre dalla conoscenza di autovalori e autovettori della matrice M ?

Trova le soluzioni del sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + z, \\ y' = -2x - y + z, \\ z' = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6.23. Data la forma differenziale $\omega(x, y) = (3x + y^2)dx + (2xy + y^3)dy$ calcola $\int_{\gamma} \omega$ dove $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita come $\gamma(\theta) = (e^{\sin \theta}, \ln(2 + \cos \theta))$.

Esercizio 6.24. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare $x^3 y''' - 6xy' + 12y = 0$.
Suggerimento: provare con funzioni del tipo $y(x) = x^p$ con $p \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.25. Sia ω la forma differenziale definita da $\omega(x, y, z, w) = x dy \wedge dz + y dx \wedge dw$. Sia $\varphi : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^4$ la superficie definita come $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2, uv)$. Calcola $\int_{\varphi} \omega$.

Esercizio 6.26. Considera il seguente sistema di equazioni differenziali lineari:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

Risolvi il problema di Cauchy con condizioni iniziali: $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.

Esercizio 6.27. Considerare la forma differenziale

$$\omega(x, y, z, w) = x dy \wedge dz \wedge dw + y dz \wedge dw \wedge dx + z dw \wedge dx \wedge dy$$

e la superficie $\sigma : [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita come

$$\sigma(u, v, t) = (u, v, u^2 v + t, uv^2 + u^2 t).$$

Calcola $\int_{\sigma} \omega$.

Esercizio 6.28. Considerare la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$$

e la superficie σ che ha come sostegno l'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 10\}.$$

Calcola $\int_{\sigma} \omega$.

Esercizio 6.29. Risolvi al variare di $x_0 > 0$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = t\sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Perché è possibile prevedere che

(a) la soluzione del problema è unica e

(b) è definita su tutto $\mathbb{R}$

sebbene la funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dove $h(x) = \sqrt{x}$ non sia localmente lipschitziana?

(La parte teorica vale 4 punti che verranno assegnati anche in base alla chiarezza dell'esposizione)

Esercizio 6.30. Calcolare l'integrale della forma differenziale $\omega(x, y) = y dx + (x^2 - y^2) dy$ lungo la curva σ il cui sostegno è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 2 nel semipiano positivo delle y . Porre l'orientazione della curva in modo che venga percorsa in senso orario.

7 Altri esercizi

Esercizio 7.1. Un solido di rotazione S è ottenuto ruotando di un angolo di 2π attorno all'asse z l'insieme

$$T = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq 2y - 1 \leq 1 - z \leq y\}$$

Calcolare $\iiint_S z dx dy dz$.

Esercizio 7.2. Calcolare gli integrali

$$\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \iiint_F (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

dove

$$E = \{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \|\vec{x}\|_2, \|\vec{x}\|_\infty < 2, y \geq |x| \},$$

$$F = \{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \|\vec{x}\|_2 < \|\vec{x}\|_\infty < 2 \}.$$

Esercizio 7.3. Data funzione $\rho : [0, 2\pi] \rightarrow [0, +\infty[$, con $\rho(0) = \rho(2\pi)$, mostrare che l'area delimitata dalla curva $\gamma(t) = (\rho(t) \cos t, \rho(t) \sin t)$ vale

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(t) dt.$$

Svolto in classe nell'A.A. 2024/2025. Usare il campo vettoriale $F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ e applicare la formula di Gauss-Green.