

# PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

La seguente definizione distingue punti di massimo e minimo assoluti (o globali) da punti di massimo e minimo locali.

**Definizione 0.1.** Consideriamo  $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Diremo che il punto  $x^0 \in C$  è **punto di minimo assoluto** per  $f$  su  $C$  se

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in C,$$

o equivalentemente se

$$f(x^0) = \inf_{x \in C} f(x) = \min_{x \in C} f(x),$$

il valore  $f(x^0)$  si dice minimo assoluto della funzione  $f$  su  $C$ .

- Diremo che il punto  $x^0 \in C$  è **punto di massimo assoluto** per  $f$  su  $C$  se

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in C,$$

o equivalentemente se

$$f(x^0) = \sup_{x \in C} f(x) = \max_{x \in C} f(x),$$

il valore  $f(x^0)$  si dice massimo assoluto della funzione  $f$  su  $C$ .

- Diremo che il punto  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$  è **punto di minimo locale** per  $f$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x^0) \subset C$  e

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in B_r(x^0),$$

il valore  $f(x^0)$  si dice minimo locale della funzione  $f$  su  $C$ .

- Diremo che il punto  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$  è **punto di minimo locale stretto** per  $f$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x^0) \subset C$  e

$$f(x^0) < f(x), \quad \forall x \in B_r(x^0) \setminus \{x^0\},$$

il valore  $f(x^0)$  si dice minimo locale stretto della funzione  $f$  su  $C$ .

- Diremo che il punto  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$  è **punto di massimo locale** per  $f$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x^0) \subset C$  e

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in B_r(x^0),$$

il valore  $f(x^0)$  si dice massimo locale della funzione  $f$  su  $C$ .

- Diremo che il punto  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$  è **punto di massimo locale stretto** per  $f$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x^0) \subset C$  e

$$f(x^0) > f(x), \quad \forall x \in B_r(x^0) \setminus \{x^0\},$$

il valore  $f(x^0)$  si dice massimo locale stretto della funzione  $f$  su  $C$ .

**Definizione 0.2.** I punti di massimo e minimo si dicono punti di estremo.

**Esercizio 0.3.** Scrivere la definizione di minimo assoluto stretto e massimo assoluto stretto.

**Proposizione 0.4.** Se  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$  valgono le seguenti affermazioni. Punto di minimo (massimo) assoluto  $\Rightarrow$  Punto di minimo (massimo) locale. Punto di minimo (massimo) assoluto stretto  $\Rightarrow$  Punto di minimo (massimo) locale stretto. Punto di minimo (massimo) locale stretto  $\Rightarrow$  Punto di minimo (massimo) locale.

# 1 Massimi e minimi locali

**Definizione 1.1.** Sia  $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$ . Diremo che  $x^0$  è **punto critico** per  $f$  se

- $f$  non è differenziabile in  $x^0$   
oppure
- $f$  è differenziabile in  $x^0$  e vale  $Df(x^0) = 0$  (punto stazionario).

I punti stazionari di  $f$  (ovvero i punti in cui la funzione è differenziabile con differenziale nullo, o equivalentemente con gradiente nullo) presentano un piano tangente di equazioni  $y = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle = f(x^0)$  ovvero un piano tangente *orizzontale*.<sup>1</sup>

**Proposizione 1.2.** Sia  $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$ . Se  $x^0$  è punto di estremo locale per  $f$  allora per ogni versore  $\nu \in \mathbb{R}^N$  avremo che  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$  non esiste oppure, se esiste, allora vale  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) = 0$ . In particolare,  $x^0$  è punto critico per  $f$ .

*Dimostrazione.* Poniamo come al solito  $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $g(t) = f(x^0 + t\nu)$  per un  $r > 0$  opportuno. Dalle ipotesi abbiamo che 0 è punto di estremo per  $g$ , quindi se  $g$  è derivabile in zero allora deve valere  $g'(0) = 0$  (esercizio: che teorema stiamo applicando?). Per definizione  $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$  da cui segue la tesi.  $\square$

**Esercizio 1.3.** Motivare la conclusione della proposizione precedente: “In particolare,  $x^0$  è punto critico per  $f$ .”

A questo punto abbiamo una condizione necessaria per l'esistenza di un punto di estremo locale. Per individuare quindi i punti di estremo locale di una funzione  $f$  dovremo considerare come candidati sia i punti in cui questa non è differenziabile sia i punti in cui la funzione è differenziabile con differenziale nullo (punti stazionari). Come possiamo distinguere tra i punti stazionari quelli che sono di minimo da quelli che sono di massimo? Esistono punti stazionari che non sono né di massimo né di minimo? La risposta all'ultima domanda è chiaramente *sì*, basti pensare alla funzione  $f(x) = x^3$  che presenta nell'origine un punto stazionario: il *famoso punto di flesso orizzontale*. Per funzioni  $f : C \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sappiamo che buona regola è guardare la derivata seconda nel punto critico, *ammesso che esista*, e sperare che non sia zero. Come cambia ora questa regola?

Consideriamo  $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  in  $C$ , sia  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$  tale che  $\nabla f(x^0) = 0$  (punto stazionario). Allora possiamo scrivere il polinomio di secondo grado di  $f$

$$P(x) = f(x^0) + \underbrace{\langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle H_f(x^0)(x - x^0), x - x^0 \rangle \quad (1)$$

ricordando che

$$f(x) = P(x) + R(x), \quad \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{R(x)}{\|x - x^0\|^2} = 0. \quad (2)$$

La matrice  $M = H_f(x^0)$  è una matrice simmetrica, quindi come conseguenza del teorema spettrale, è diagonalizzabile mediante una base ortonormale di autovettori. Denotiamo con  $v_1, \dots, v_N$  gli elementi della base ortonormale e con  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  i corrispondenti autovalori reali. Ricordiamo che la proprietà di ortonormalità dei vettori  $v_1, \dots, v_N$  si può riassumere con la proprietà  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ . Inoltre ogni elemento  $v \in \mathbb{R}^N$  potrà essere scritto come combinazione lineare di questi elementi e avremo  $v = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i$ . In particolare ricordiamo che vale  $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2$

Quindi dalla (1), ponendo  $v = (x - x^0)$  otteniamo

$$x - x^0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i \quad \text{e} \quad \|x - x^0\|^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2. \quad (3)$$

<sup>1</sup>tale termine improprio è suggerito da cosa accade per un punto stazionario di una funzione  $f : C \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dove troviamo l'equazione  $z = f(x_0, y_0)$  di un piano orizzontale contenuto in  $\mathbb{R}^3$ .

da cui

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x^0) &= \frac{1}{2} \langle M(x - x^0), x - x^0 \rangle + R(x) \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^N \alpha_j v_j \right\rangle + R(x) \\
&= \dots = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i \alpha_i^2 + R(x).
\end{aligned} \tag{4}$$

dove nei passaggi omissi si applicano semplici regole del prodotto scalare e la proprietà di ortonormalità della base.

**Teorema 1.4.** *Sia  $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  in  $C$ , sia  $x^0 \in \overset{\circ}{C}$  tale che  $\nabla f(x^0) = 0$ . Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  gli autovalori della matrice Hessiana  $H_f(x^0)$ . Allora*

1. se  $x^0$  è punto di minimo locale allora  $\lambda_k \geq 0$  per ogni  $k$ ;
2. se  $x^0$  è punto di massimo locale allora  $\lambda_k \leq 0$  per ogni  $k$ ;
3. se  $\lambda_k > 0$  per ogni  $k$  allora  $x^0$  è punto di minimo locale stretto;
4. se  $\lambda_k < 0$  per ogni  $k$  allora  $x^0$  è punto di massimo locale stretto;
5. se esiste  $\lambda_i < 0$  e  $\lambda_j > 0$  allora non è un punto di estremo per  $f$ .

*Dimostrazione. Caso 1.* Sia  $x^0$  un punto di minimo locale. Quindi esiste  $\delta > 0$  tale che se  $\|x - x^0\| < \delta$  vale  $f(x) \geq f(x^0)$ . Fissiamo  $j \in \{1, \dots, N\}$  e consideriamo i calcoli in (4) in cui scegliamo il valore  $x = x^0 + tv_j$ , ovvero focalizziamo la nostra attenzione su uno spostamento dal punto di minimo  $x^0$  lungo la direzione individuata dall'elemento  $v_j$  della base ortonormale  $v_1, \dots, v_N$  precedentemente introdotta. In questo caso abbiamo  $\alpha_i = t\delta_{ij}$  e  $\|x\|^2 = t^2$  in (3), da cui usando la (4) otteniamo, per  $|t| < \delta$ ,

$$\begin{aligned}
0 \leq f(x^0 + tv_j) - f(x^0) &= \frac{1}{2} \lambda_j t^2 + R(x^0 + tv_j) \\
&= t^2 \left( \frac{1}{2} \lambda_j + \frac{R(x^0 + tv_j)}{t^2} \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

Come conseguenza del limite in (2), deduciamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x^0 + tv_j)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x^0 + tv_j)}{\|(x^0 + tv_j) - x^0\|^2} = 0$$

Quindi la parentesi nell'ultima riga di (5) tende al valore  $\frac{1}{2} \lambda_j$  che quindi deve essere necessariamente non negativo.

*Caso 2.* Per esercizio, si dimostra analogamente.

*Caso 3.* Dobbiamo dimostrare che esiste  $r > 0$  tale che  $f(x^0 + tv) - f(x^0) > 0$  per ogni vettore  $v \in \mathbb{R}^N$  e per ogni  $t \in (0, r)$ . Poniamo  $\bar{\lambda} := \min \lambda_j > 0$  e scriviamo  $v = \sum_{k=1}^N \beta_k v_k$  e notiamo che  $\sum_{k=1}^N \beta_k^2 = 1$ . Ripercorrendo i calcoli in (4), troviamo

$$\begin{aligned}
f(x^0 + tv) - f(x^0) &= \frac{1}{2} t^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k \beta_k^2 + R(x^0 + tv) \\
&\geq \frac{1}{2} t^2 \sum_{k=1}^N \bar{\lambda} \beta_k^2 + R(x^0 + tv) \\
&= \frac{1}{2} t^2 \bar{\lambda} + R(x^0 + tv) = t^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\lambda} + \frac{R(x^0 + tv)}{t^2} \right)
\end{aligned}$$

Da (2), usando la definizione di limite con  $\varepsilon = \bar{\lambda}/4$  troviamo che esiste  $r > 0$  tale che

$$0 < \|x - x^0\| < r \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{R(x)}{\|x - x^0\|^2} \right| < \frac{1}{4} \bar{\lambda}$$

quindi, per ogni scelta del versore  $\nu$ , se  $0 < t < r$  troviamo  $\left| \frac{R(x^0 + t\nu)}{t^2} \right| < \frac{1}{4}\bar{\lambda}$  e quindi da calcoli precedenti

$$f(x^0 + t\nu) - f(x^0) = t^2 \left( \frac{1}{2}\bar{\lambda} + \frac{R(x^0 + t\nu)}{t^2} \right) > \frac{1}{4}\bar{\lambda}t^2 > 0,$$

arrivando alla tesi.

*Caso 4.* Per esercizio, si dimostra analogamente al punto 3.

*Caso 5.* Se fosse punto di estremo, sarebbe un massimo o un minimo locale. Completare per esercizio la dimostrazione usando i punti 1 e 2.  $\square$

Il teorema precedente ci suggerisce di controllare il segno degli autovalori della matrice Hessiana (solo il segno, non serve conoscere il valore preciso).

**Esercizio 1.5.** Cercare la **regola di Cartesio** per determinare il segno delle radici di un polinomio e scoprirne l'utilità per determinare i segni degli autovalori della matrice Hessiana.

Operativamente, i punti 3-5 ci aiutano nel determinare la natura del punto critico. Una matrice Hessiana che presenta solo autovalori positivi (negativi) conferma la presenza di un minimo (massimo) locale, mentre la presenza di autovalori sia positivi che negativi ci fa cadere in una situazione che non si verifica per funzioni di variabile reale. La presenza dell'autovalore nullo (quindi matrice Hessiana non invertibile) ci pone davanti ad un problema da risolvere in maniera alternativa. Per funzioni  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si andavano a vedere i segni delle derivate successive, in questo caso tale approccio non funziona. Siamo costretti a studiare *a mano* il comportamento della funzione in un intorno del punto stazionario.

Definiremo **punto di sella** un punto stazionario  $x^0$  tale che esistono due direzioni  $\nu, \nu'$  rispetto alle quali le restrizioni  $g(t) = f(x^0 + t\nu)$  e  $h(t) = f(x^0 + t\nu')$  presentano una un minimo locale, l'altra un massimo locale. Abbiamo un punto di sella in  $x^0$  se, per esempio, in tale punto la matrice Hessiana è invertibile e presenta sia autovalori positivi che negativi. La definizione richiama la geometria di una sella per cavalli in un intorno del *punto* in cui siede il fantino. Analogamente si pensi alla sella, sinonimo di passo di montagna, e alla geometria associata: la prima direzione è determinata dalla cresta montuosa, l'altra direzione è individuata dalle due valli.

**Esempio 1.6.** Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x, y) = ax^4 + by^4$ . L'origine è un punto stazionario e la matrice Hessiana nell'origine è la matrice nulla. Di conseguenza non possiamo determinare la natura del punto stazionario. Studiando le restrizioni agli assi, notiamo che nel caso  $a = b = 1$  abbiamo un minimo globale, per  $a = b = -1$  abbiamo un massimo globale, per  $a = -b = 1$  nessuno dei due.

Se invece consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x, y) = ax^3 + by^3$ . L'origine è un punto stazionario e la matrice Hessiana nell'origine è la matrice nulla. Nessuna scelta dei valori  $a$  e  $b$  restituisce un massimo o un minimo locale.

**Esempio 1.7.** Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 2x + 2$ . Poiché la funzione è di classe almeno  $C^2$ , i punti critici coincidono con i punti stazionari con gradiente nullo, quindi dobbiamo risolvere il sistema di equazioni

$$\nabla f(x, y) = (6x - 2, 8y) = (0, 0)$$

che presenta la soluzione  $(1/3, 0)$ . La matrice Hessiana risulta

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . In particolare notiamo immediatamente che la matrice  $H_f(1/3, 0)$  ha tutti gli autovalori positivi. Quindi  $(1/3, 0)$  è un punto di minimo locale con valore  $f(1/3, 0) = 5/3$ .

Poiché la funzione è coerciva, ovvero

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = +\infty,$$

essa ammette un minimo assoluto (dimostrare per esercizio che una funzione continua coerciva ha minimo assoluto). Avendo trovato un solo minimo locale, questo è necessariamente anche il minimo assoluto.

Per dimostrare la coercività basta osservare che

$$f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 2x + 2 = x^2 + y^2 + (2x^2 - 2x + 2 + 3y^2) \geq x^2 + y^2$$

e usare il teorema del confronto.

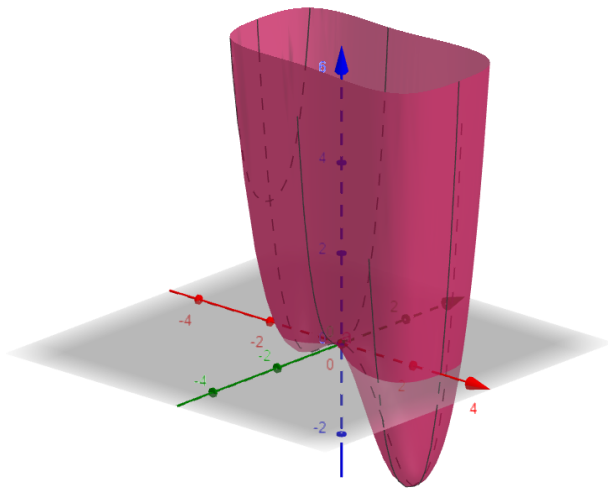


Figura 1: Vedi Esempio 1.8.

**Esempio 1.8.** Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^4 + y^2$  (di classe  $C^2$  su tutto il dominio). Il suo gradiente risulta

$$\nabla f(x, y) = (x^3 - x^2 - 2x, 4y^3 + 2y)$$

e si annulla nei punti che risolvono il sistema

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 2x = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(x^2 - x - 2) = 0 \\ y(4y^2 + 2) = 0 \end{cases}$$

che presenta le soluzioni  $(0, 0), (-1, 0), (2, 0)$  (i punti critici). La matrice Hessiana di  $f$  è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 + 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice Hessiana nei tre punti critici

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix},$$

$$H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} +3 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix},$$

$$H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} +6 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix}.$$

Il punto  $(0, 0)$  risulta un punto di sella, gli altri due punti di minimo locale stretto.

**Problema 1.9** (Ricerca di punti di massimo e minimo (1)). Data una funzione  $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , determinare, se esistono, il massimo e il minimo di  $f$ .

Innanzitutto, come facciamo ad essere sicuri che questi esistono?

A) Se la funzione  $f$  è continua ed è definita su un insieme  $C$  compatto, allora il massimo e il minimo assoluto esistono per il teorema di Weierstrass. Quindi, dimostrando che  $C$  è sia chiuso che limitato, abbiamo l'esistenza di entrambi gli estremi.

B) Se la funzione  $f$  è continua, definita su un insieme illimitato ed inoltre è coerciva, ovvero

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty,$$

allora essa ammette un minimo assoluto. Il massimo assoluto, chiaramente non può esistere.

B') Se la funzione  $f$  è continua, definita su un insieme illimitato ed inoltre è anticoerciva, ovvero

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty,$$

allora essa ammette un massimo assoluto. Il minimo assoluto, chiaramente non può esistere.

Una volta determinato se ci troviamo in uno dei casi precedenti, passiamo ad analizzare la presenza di punti critici in  $\hat{C}$ :

- Selezioniamo come candidati i punti in cui  $f$  non è differenziabile. Possiamo determinare la loro natura (minimo, massimo o nessuno dei due) solo mediante uno studio del comportamento della funzione in un intorno del punto.
- Selezioniamo come candidati i punti in cui  $f$  è differenziabile e ha gradiente nullo, quindi mediante lo studio della matrice Hessiana (se esiste) ne determiniamo la loro natura (minimo o massimo locale stretto, o nessuno dei due). Possiamo essere sfortunati e trovare che la matrice Hessiana non è invertibile (ovvero ha l'autovalore nullo): in questo caso uno studio del comportamento della funzione in un intorno del punto ci darà la natura del punto stazionario. La funzione potrebbe non ammettere matrice Hessiana, o non essere differenziabile due volte in questo punto. Anche in questo caso siamo obbligati ad effettuare uno studio del comportamento della funzione in un intorno del punto per determinare la natura del punto stazionario.

Resta da determinare se esistono candidati massimo e minimo globale sulla frontiera del dominio, ovvero considerare i punti di  $C \cap \partial C$ . Naturalmente, se  $C$  è chiuso  $C \cap \partial C = \partial C$ . La prossima parte del corso verterà nella risoluzione di questa parte del problema trovando una risposta nel teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

**Esempio 1.10.** La funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come  $f(x, y) = x^2 - y^2$  non ha né massimo né minimo assoluti essendo  $g(x) = f(x, 0) = x^2$  coerciva e  $h(y) = f(0, y) = -y^2$  anticoerciva.

Enunciamo la seguente ovvia proposizione.

**Proposizione 1.11.** Data  $f : C \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  con  $C$  chiuso. Se  $x^0 \in \partial C$  è punto di minimo (o massimo) assoluto per  $f$  su  $C$  allora esso è punto di minimo (o massimo) assoluto per la restrizione  $f|_{\partial C} : \partial C \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Esempio 1.12.** Supponiamo di avere una funzione  $f : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  dove  $T$  è un triangolo (oppure un poligono) chiuso, ovvero il perimetro è contenuto in  $T$ . Per il teorema di Weierstrass questa funzione ha massimo e minimo assoluti. Per determinare i candidati punti di massimo e minimo su  $\hat{T}$  seguiamo la procedura esposta nel Problema 1.9. Quindi, consideriamo  $\partial T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ , ovvero i tre lati del triangolo. Possiamo trovare tre parametrizzazioni  $s_k : I_k \rightarrow L_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) per ogni segmento  $L_k$  e trasformare il problema di determinare gli estremi di  $f$  su  $\partial T$  in tre problemi di massimo e minimo delle funzioni  $f \circ s_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$  che siamo già in grado di risolvere. Troveremo quindi i candidati massimo e minimo assoluto fra

- i punti stazionari di  $f$  appartenenti a  $\hat{T}$ ;
- i punti di estremo interni delle funzioni  $f \circ s_k$  a cui corrispondo punti sui tre lati del triangolo;
- i vertici del triangolo.

A questo punto calcoleremo i valori assunti in tutti questi punti. Il valore più piccolo sarà il minimo assoluto, il valore più grande il massimo assoluto. Si noti che i punti di estremo interni delle funzioni  $f \circ s_k$  e i valori assunti nei vertici del triangolo non sono necessariamente punti di estremo locale della funzione  $f$  su  $T$ .

**Esercizio 1.13.** Trova il massimo e il minimo assoluto della funzione  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x, y) = x^2 - y^4$ .

**Esempio 1.14.** Supponiamo di avere una funzione  $f : C \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  dove  $C$  è un cerchio chiuso, ovvero la circonferenza è contenuta in  $C$ . Sia  $x^0$  il centro e  $r$  il raggio. Per il teorema di Weierstrass questa funzione ha massimo e minimo assoluti. Per determinare i candidati punti di massimo e minimo su  $\hat{C}$  seguiamo la procedura esposta nel Problema 1.9. Quindi, consideriamo  $\partial C$ , ovvero la circonferenza. Possiamo trovarne una parametrizzazione  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \partial C$ ,  $\gamma(\theta) = (x^0 + r \cos \theta, x^0 + r \sin \theta)$  e trasformare il problema di determinare gli estremi di  $f$  su  $\partial C$  in un problema di massimo e minimo della funzione  $2\pi$ -periodica  $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che siamo già in grado di risolvere. Troveremo quindi i candidati massimo e minimo assoluto fra

- i punti stazionari di  $f$  appartenenti a  $\mathring{C}$ ;
- i punti di estremo della funzione  $f \circ \gamma$  a cui corrispondo punti sulla circonferenza.

A questo punto calcoleremo i valori assunti in tutti questi punti. Il valore più piccolo sarà il minimo assoluto, il valore più grande il massimo assoluto. Si noti che i punti di estremo interni della funzione  $f \circ \gamma$  non sono necessariamente punti di estremo locale della funzione  $f$  su  $C$ .

**Esercizio 1.15.** Trova il massimo e il minimo della funzione  $f : C \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita sul cerchio di raggio 1 centrato nell'origine come  $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$ .

**Esercizio 1.16.** Scrivere una parametrizzazione  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Scrivere le parametrizzazioni  $\psi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $K = 1, 2$ ) dei due rami delle iperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

per entrambe le scelte del segno al membro destro (quattro parametrizzazioni in tutto).

Scrivere le parametrizzazioni dei lati del pentagono  $ABCDE$  di vertici

$$A = (2, 4), \quad B = (3, 1), \quad C = (4, 5), \quad D = (4, 7), \quad E = (3, 9).$$

**Esercizio 1.17.** Trova il massimo e il minimo della funzione  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$ , dove  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

Abbiamo visto esempi con funzioni di due variabili, le cose si complicano quando passiamo a funzione di tre variabili. Si pensi al caso di funzioni definite su un cubo o su una semisfera.

In quanto segue vedremo un altro possibile approccio per trattare il bordo di un insieme. Questo metodo è utile quando consideriamo  $f : C \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  in cui non è facile, o conveniente, trovare una parametrizzazione del bordo  $\partial C$ .

## 2 Teorema del Dini

**Definizione 2.1** (Insieme di livello). Dati  $F : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  e  $c \in \mathbb{R}^M$ , definisco l'insieme di livello  $c$  della funzione  $F$  come

$$\{x \in A \mid F(x) = c\} = \{F = c\} = F^{-1}(\{c\})$$

(la seconda scrittura è una notazione sintetica, nella terza abbia usato la nozione di controimmagine)

**Proposizione 2.2.** Se  $F : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  è continua allora per ogni  $c \in \mathbb{R}^M$  l'insieme  $\{F = c\}$  è chiuso in  $A$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo una successione  $(x_n)_n \subset \{F = c\}$  tale che  $\lim_n x_n = x$ . Dalla continuità di  $F$  segue che  $c = \lim_n c = \lim_n F(x_n) = F(x)$  da cui la tesi.  $\square$

Nel caso particolare in cui  $N = 2$ ,  $M = 1$  si parla di curva di livello. Se invece  $N = 3$ ,  $M = 1$  si parla di superficie di livello.

**Nota 2.3.** La nozione di superficie di livello trova il suo analogo in fisica nella definizione delle superfici equipotenziali (punti dello spazio aventi lo stesso potenziale). In questo caso  $F$  è la funzione potenziale, mentre  $c$  è il valore del potenziale considerato.

La nozione curva di livello è la stessa che si incontra nelle carte topografiche. In questo caso la funzione  $F$  è l'altitudine, e  $c$  è fissato in metri (solitamente un multiplo di 5). Analogamente si pensi alle isobare nelle mappe delle previsioni del tempo.

**Esempio 2.4.** L'insieme  $\{F = c\}$  con  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = x^2 + y^2$  e  $c = 1$ , denota la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

L'insieme  $\{F = c\}$  con  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e  $c = 1$ , denota la sfera unitaria centrata nell'origine.

L'insieme  $\{F = c\}$  con  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, z)$  e  $c = (1, 0)$ , denota l'equatore (orizzontale) della sfera unitaria centrata nell'origine.

Dagli esempi precedenti notiamo che spesso l'insieme  $\{F = c\}$  ha dimensione  $N - M$ . Ma naturalmente è facile trovare alcuni controesempi a questa affermazione.

**Esempio 2.5.** L'insieme  $\{F = c\}$  con  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, z)$ ,  $c = (1, 2)$  è un insieme vuoto, infatti non possiamo avere contemporaneamente  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e  $z = 2$ .

L'insieme  $\{F = c\}$  con  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $c = (1, 1)$  è anch'esso la sfera unitaria centrata nell'origine.

L'insieme  $\{F = c\}$  con  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $c = 0$  denota l'insieme formato dal solo origine.

L'insieme  $\{F = c\}$  con  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^2$ ,  $c = 0$  denota l'insieme di due punti  $\{(-1, 0); (1, 0)\}$ .

**Esercizio 2.6.** Ogni sottospazio affine di  $\mathbb{R}^N$  può essere scritto come insieme di livello  $\{F = c\}$ . Come?

Il seguente teorema, enunciato e dimostrato nel caso di funzioni  $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ha la sua generalizzazione a situazioni più generali. Successivamente forniremo l'enunciato di una possibile generalizzazione, senza fornirne la dimostrazione.

In breve, il teorema ci dice che, sotto opportune ipotesi, possiamo vedere un insieme di livello come grafico di una funzione.

**Teorema 2.7** (Teorema di Dini). Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto, di classe  $C^1$  su  $A$ . Sia  $(x_0, y_0) \in A$  tale che

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono

un intorno aperto  $U$  di  $x_0$ ,  
un intorno aperto  $V$  di  $y_0$ ,  
una funzione  $\varphi : U \rightarrow V$

tale che

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in U.$$

Inoltre per ogni  $(x, y) \in U \times V$  vale

$$F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x),$$

la funzione  $\varphi$  è di classe  $C^1$  su  $U$  e vale

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \forall x \in U. \quad (6)$$

*Dimostrazione.* Supponiamo senza perdere in generalità  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$  (riscrivere per esercizio la dimostrazione nel caso in cui  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$ ). Poiché  $F$  è di classe  $C^1$  allora  $\frac{\partial F}{\partial y}$  è continua e quindi preserva il segno in un intorno. Possiamo quindi trovare un rettangolo chiuso  $R \subseteq A$  e  $m > 0$  tale che

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > m > 0, \quad \forall (x, y) \in R \quad (7)$$

Possiamo supporre che  $R$  sia del tipo  $R = U_1 \times V_1$  con  $U_1 = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$  e  $V_1 = [y_0 - k, y_0 + k]$  per qualche  $\delta_1, k > 0$ . Dalla continuità di  $\frac{\partial F}{\partial x}$  possiamo trovare  $M > 0$  tale che

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| \leq M, \quad \forall (x, y) \in R. \quad (8)$$

Fissiamo un generico  $\bar{x} \in U_1$  e consideriamo la restrizione di  $F$  lungo la retta  $x = \bar{x}$ , definiamo quindi  $h_{\bar{x}} : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_{\bar{x}} = F(\bar{x}, y)$  e notiamo che

$$h'_{\bar{x}}(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, y) > m > 0, \quad \forall y \in V_1. \quad (9)$$

In particolare le funzioni  $h_{\bar{x}}$  sono strettamente crescenti e vale

$$F(x_0, y_0 - k) = h_{x_0}(y_0 - k) < h_{x_0}(y_0) = F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + k) = h_{x_0}(y_0 + k).$$

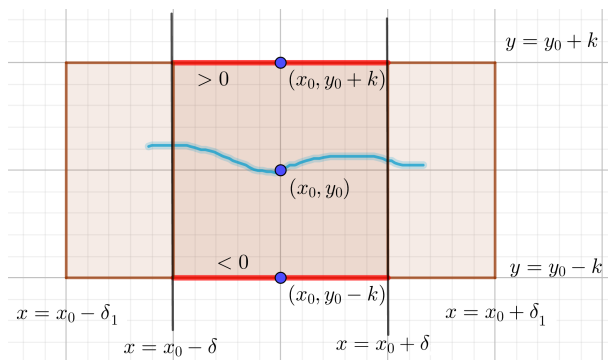


Figura 2: vedi Teorema 2.7.

Per il teorema della permanenza del segno, possiamo trovare un  $\delta \leq \delta_1$ , e corrispondentemente l'insieme  $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , tale che la funzione  $F(\cdot, y_0 - k) : U \rightarrow \mathbb{R}$  sia negativa, e la funzione  $F(\cdot, y_0 + k) : U \rightarrow \mathbb{R}$  sia positiva. In altre parole abbiamo:

$$\begin{aligned} F(x, y_0 - k) &= h_x(y_0 - k) < 0, \\ F(x, y_0 + k) &= h_x(y_0 + k) > 0, \end{aligned} \quad \forall x \in U.$$

A questo punto per ogni  $\bar{x} \in U$  vale  $h_{\bar{x}}(y_0 - k) < 0 < h_{\bar{x}}(y_0 + k)$ , quindi per il teorema degli zeri e usando (9) abbiamo l'esistenza di un unico  $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x}) \in V = \dot{V}_1 = (y_0 - k, y_0 + k)$  tale che  $h_{\bar{x}}(\bar{y}) = 0$ .

Abbiamo appena mostrato l'esistenza di una funzione  $\varphi : U \rightarrow V$  che ad ogni  $\bar{x} \in U$  associa un valore  $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$  tale che

$$F(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = F(\bar{x}, \bar{y}) = h_{\bar{x}}(\bar{y}) = 0.$$

Inoltre, per costruzione, non esistono punti  $(x, y) \in U \times V$  tali che  $F(x, y) = h_x(y) = 0$  e  $y \neq \varphi(x)$ .

Resta quindi da dimostrare che  $\varphi$  è di classe  $C^1$  e soddisfa (6).

Consideriamo  $x_0, x_1 \in U$ ,  $x_0 \neq x_1$  e introduciamo la funzione  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita come

$$\gamma(\lambda) = (1 - \lambda)(x_0, \varphi(x_0)) + \lambda(x_1, \varphi(x_1))$$

che ha come immagine il segmento che collega i punti  $(x_0, \varphi(x_0))$  e  $(x_1, \varphi(x_1))$  in  $U \times V$ . Notiamo che la funzione  $F \circ \gamma$  è di classe  $C^1$  e quindi, usando il teorema di Lagrange, esiste  $\xi \in (0, 1)$  tale che

$$0 = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \frac{d}{d\lambda}(F \circ \gamma)(\xi).$$

Calcoliamo esplicitamente la derivata, usando il teorema della derivata della composta, e troviamo

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(\xi))(x_1 - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(\xi))(\varphi(x_1) - \varphi(x_0)). \quad (10)$$

Ne consegue, usando (7) e (8) e notando che  $\gamma(\xi) \in U \times V$ , la seguente stima

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| = \left| \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(\xi))} \right| |x_1 - x_0| \leq \frac{M}{m} |x_1 - x_0|.$$

Abbiamo dimostrato che  $\varphi$  è Lipschitziana, quindi è continua.

Ricordando che  $F$  è di classe  $C^1$  e che  $\gamma$  è continua, se ora passiamo al limite  $x_1 \rightarrow x_0$  troviamo che  $\gamma(\xi) \rightarrow (x_0, \varphi(x_0))$  quindi troviamo, usando (10),

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(\xi))} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))}$$

Questo ragionamento può essere ripetuto per ogni  $x_0$  (e  $x_1$ ) appartenenti ad  $U$ , concludendo la dimostrazione del teorema.  $\square$

Nel teorema precedente l'ipotesi  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  può essere sostituita da  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ , ottenendo il seguente teorema.

Se invece non siamo in grado di soddisfare nessuna delle due ipotesi, ovvero se  $\nabla F(x_0, y_0) = (0, 0)$  non possiamo applicare il teorema di Dini.

**Teorema 2.8** (Teorema di Dini). *Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto, di classe  $C^1$  su  $A$ . Sia  $(x_0, y_0) \in A$  tale che*

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

*allora esistono*

*un intorno aperto  $U$  di  $x_0$ ,  
un intorno aperto  $V$  di  $y_0$ ,  
una funzione  $\psi : V \rightarrow U$*

*tale che*

$$F(\psi(y), y) = 0, \quad \forall y \in V.$$

*Inoltre per ogni  $(x, y) \in U \times V$  vale*

$$F(x, y) = 0 \iff x = \psi(y),$$

*la funzione  $\psi$  è di classe  $C^1$  su  $V$  e vale*

$$\psi'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\psi(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(\psi(y), y)}, \quad \forall y \in V. \quad (11)$$

**Esercizio 2.9.** *Scrivere la dimostrazione del teorema precedente, ispirandosi a quella del Teorema 2.7.*

**Osservazione 2.10.** *Se la funzione  $F$  nel teorema del Dini è di classe  $C^k$  allora anche la funzione  $\varphi$  risulta di classe  $C^k$ .*

**Osservazione 2.11.** *Nell'enunciato dei Teoremi 2.7 e 2.8 si considera l'insieme di livello  $\{F = 0\}$ , ma non è restrittivo. Possiamo infatti considerare un generico insieme di livello  $\{F = c\}$ , poi introducendo la funzione  $G(x, y) = F(x, y) - c$  troviamo che  $\{F = c\} = \{G = 0\}$  e siamo nelle ipotesi del teorema usando la funzione  $G$  al posto della  $F$ .*

**Osservazione 2.12.** *L'esistenza della funzione  $\varphi$ , o  $\psi$ , data dal teorema del Dini, permette di isolare una fra le variabili  $x$  e  $y$  ed esprimere localmente l'insieme di livello come grafico di una funzione reale a variabile reale. Spesso il teorema del Dini viene detto **teorema della funzione implicita**, in quanto in questo caso l'equazione  $F(x, y) = c$  descriverebbe localmente in forma implicita una funzione del tipo  $y = \varphi(x)$  espressa qui in forma esplicita.*

**Esempio 2.13.** *Data la funzione  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , l'insieme di livello  $\{F = 0\}$  è l'usuale circonferenza goniometrica. Notiamo che  $\nabla F(x, y) = (2x, 2y)$  è sempre non nullo su ogni punto di  $\{F = 0\}$ . Se consideriamo un punto  $(x_0, y_0) \in \{F = 0\}$  con  $y_0 \neq 0$  possiamo applicare il Teorema 2.7. Se  $y_0 > 0$  troviamo la funzione  $\varphi : (-1, 1) \rightarrow (0, 1)$  definita come  $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$  e notiamo che vale*

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} = -\frac{2x}{2\varphi(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

*mentre se  $y_0 < 0$  la funzione risulta  $\varphi : (-1, 1) \rightarrow (-1, 0)$  definita come  $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ . Qualora invece considerassimo un punto  $(x_0, y_0) \in \{F = 0\}$  con  $x_0 \neq 0$  possiamo applicare il Teorema 2.8 e trovare, se  $x_0 > 0$  la funzione  $\psi : (-1, 1) \rightarrow (0, 1)$  definita come  $\psi(y) = \sqrt{1 - y^2}$ , mentre se  $x_0 < 0$  la funzione  $\psi : (-1, 1) \rightarrow (-1, 0)$  definita come  $\psi(y) = -\sqrt{1 - y^2}$ .*

*Nella prima parte dell'esempio è stata isolata la variabile  $y$ , nella seconda parte invece la variabile  $x$ .*

**Osservazione 2.14.** *Il teorema del Dini ci dice quando le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  esistono. Tuttavia, non ci fornisce un metodo per calcolarle esplicitamente. Le formule (6) e (11) sono utilizzabili facilmente per  $x = x_0$  e  $y = y_0$  ma sono poco efficaci in altri punti se non siamo in grado di calcolare esplicitamente  $\varphi$  e  $\psi$ . Nell'esempio precedente e in quello successivo queste funzioni si ricavano facilmente per grazia ricevuta.*

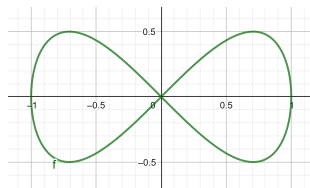


Figura 3: Vedi Esempio 2.15.

**Esempio 2.15.** L'insieme di livello  $\{F = 0\}$  dove  $F(x, y) = y^2 + x^4 - x^2$  ha la forma di un otto orizzontale ( $\infty$ ) con estremi nei punti  $(\pm 1, 0)$ . Notiamo che il gradiente  $\nabla F(x, y) = (4x^3 - 2x, 2y)$  si annulla nei punti  $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$  e  $(0, 0)$ . Il punto  $(0, 0)$  appartiene a  $\{F = 0\}$ : in esso non possiamo applicare il teorema del Dini, nessuna delle due versioni. A posteriori ne capiamo il motivo: l'origine è il centro dell'otto che costituisce l'insieme ed esso, in un intorno dell'origine sufficientemente piccolo, risulta l'unione di due differenti archi di curva (in questo contesto non importa che in realtà lontano dall'origine essi si congiungono formando un'unica curva).

Nei punti  $(x, y) \in \{F = 0\}$  con  $y \neq 0$  possiamo applicare il Teorema 2.7 (isolare la  $y$ ) e trovare  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\varphi(x) = \pm\sqrt{x^2 - x^4}$ . Si noti che l'insieme  $U$  dato dal teorema del Dini è  $(-1, 0)$  oppure  $(0, 1)$  e non  $(-1, 1)$  (il pezzo di grafico in cui la funzione resta positiva, o negativa). Si noti inoltre che  $\varphi$  non sarebbe derivabile in  $x = 0$ , quindi non può essere  $0 \in U$ . Riassumendo abbiamo le seguenti quattro alternative:

- se  $(x, y) \in \{F = 0\}$ ,  $x > 0$  e  $y > 0$  troviamo  $\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  con  $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$
- se  $(x, y) \in \{F = 0\}$ ,  $x > 0$  e  $y < 0$  troviamo  $\varphi : (0, 1) \rightarrow (-1, 0)$  con  $\varphi(x) = -\sqrt{x^2 - x^4}$
- se  $(x, y) \in \{F = 0\}$ ,  $x < 0$  e  $y > 0$  troviamo  $\varphi : (-1, 0) \rightarrow (0, 1)$  con  $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$
- se  $(x, y) \in \{F = 0\}$ ,  $x < 0$  e  $y < 0$  troviamo  $\varphi : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$  con  $\varphi(x) = -\sqrt{x^2 - x^4}$

Se invece consideriamo l'insieme di livello  $\{F = -1/4\}$ , esso è costituito dai soli due punti  $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$  e nulla più. Anche in questo caso notiamo che è normale che non si possa applicare il teorema del Dini in questo caso.

**Esercizio 2.16.** Data la funzione  $F$  dell'esempio precedente e l'insieme di livello  $\{F = 0\}$ , studiare in quali punti possiamo applicare il Teorema 2.8 e scrivere le funzioni  $\psi$ . Suggestimenti: rivedere come si risolve un'equazione biquadratica, i casi da distinguere saranno sei.

**Osservazione 2.17.** Dal teorema del Dini segue un modo facile per calcolare la **retta tangente ad una curva di livello** in un punto. Dato  $(x_0, y_0) \in \{F = 0\}$  tale che  $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$  con  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , allora la retta affine tangente alla curva di livello  $\{F = 0\}$  nel punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  (passante per il punto  $P_0$ ) è quindi

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) \\ &= y_0 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0). \end{aligned}$$

Possiamo anche scrivere l'equazione della retta tangente in forma implicita come

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

oppure equivalentemente

$$\langle \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0. \quad (12)$$

Dalla precedente equazione si deduce la seguente importante proprietà.

**Osservazione 2.18.** Dato un punto  $P_0 = (x_0, y_0) \in \{F = 0\}$ , il gradiente di  $F$  in  $P_0$  è un vettore ortogonale alla retta tangente alla curva di livello in quel punto. Infatti, dato un qualsiasi punto  $P = (x, y)$  della retta tangente, possiamo scrivere il vettore spostamento dal punto  $P_0$  al punto  $P$  come  $v = (x - x_0, y - y_0)$ . A questo punto l'affermazione precedente segue dalla (12).

Ricordiamo inoltre che data una funzione  $F : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , con  $A$  aperto, se  $F$  è differenziabile in un punto  $x^0 \in A$  con  $\nabla F(x^0) \neq 0$  allora vale la seguente maggiorazione

$$\frac{\partial F}{\partial \nu}(x^0) = \langle \nabla F(x^0), \nu \rangle \leq \|\nabla F(x^0)\|$$

per ogni direzione  $\nu \in \mathbb{R}^N$ . In particolare abbiamo l'uguaglianza quando i due vettori  $\nu$  e  $\nabla F(x^0)$  sono paralleli. Ne consegue che il *gradiente di una funzione individua la direzione di massima pendenza del grafico*.

**Nota 2.19.** *Mettendo assieme questo risultato con quello della precedente osservazione, notiamo una proprietà che già dovremmo aver riscontrato osservando una carta topografica: se ci muoviamo perpendicolarmente alle curve di livello il percorso ha la massima pendenza possibile in quel punto.*

**Esempio 2.20** (Le formule di sdoppiamento). Sia  $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$  e un punto  $(x_0, y_0) \in \{F = 0\}$ . L'equazione della retta tangente a  $\{F = 0\}$  nel punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e passante per  $P_0$  ha equazione

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ &= \left\langle \left( \frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2} \right), (x - x_0, y - y_0) \right\rangle \\ &= \frac{2x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{2y_0(y - y_0)}{b^2} \\ &= \frac{2xx_0}{a^2} - \frac{2x_0^2}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} - \frac{2y_0^2}{b^2} \\ &= \frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} - 2 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$  essendo  $(x_0, y_0) \in \{F = 0\}$ . Dividendo per 2 l'equazione ottenuta troviamo che:

(\*) La retta tangente all'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  in un suo punto  $(x_0, y_0)$  ha equazione

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Sia  $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  e un punto  $(x_0, y_0) \in \{F = \pm 1\}$ . L'equazione della retta tangente a  $\{F = \pm 1\}$  nel punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e passante per  $P_0$  ha equazione

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ &= \left\langle \left( \frac{2x_0}{a^2}, -\frac{2y_0}{b^2} \right), (x - x_0, y - y_0) \right\rangle \\ &= \frac{2x_0(x - x_0)}{a^2} - \frac{2y_0(y - y_0)}{b^2} \\ &= \frac{2xx_0}{a^2} - \frac{2x_0^2}{a^2} - \frac{2yy_0}{b^2} + \frac{2y_0^2}{b^2} \\ &= \frac{2xx_0}{a^2} - \frac{2yy_0}{b^2} \mp 2 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che  $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \pm 1$  essendo  $(x_0, y_0) \in \{F = \pm 1\}$ . Dividendo per 2 l'equazione ottenuta troviamo che:

(\*) La retta tangente all'iperbole di equazione  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$  in un suo punto  $(x_0, y_0)$  ha equazione

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \pm 1$$

Per esercizio ricavare la formula per una generica parabola  $y = ax^2 + bx + c$ .

**Esercizio 2.21.** Trovare la retta tangente alla curva di livello  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$  nel punto  $(1/2, 2)$ .

**Esercizio 2.22.** Data la funzione  $F(x, y) = e^{xy} - y$ , trovare la retta tangente alla curva di livello  $\{F = c\}$  nel punto  $(0, 1)$  dopo aver determinato il valore  $c \in \mathbb{R}$  corretto.

Diamo ora la versione più generale del teorema del Dini

**Teorema 2.23** (Teorema della funzione implicita di Dini). Sia data una funzione  $F : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , dove  $A$  è aperto e  $1 \leq M < N$ . Introduciamo la seguente notazione: per ogni  $P \in \mathbb{R}^N$  denotiamo le componenti nel modo seguente

$$P = (x, y) = (x_1, \dots, x_{N-M}, y_1, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M.$$

Supponiamo che  $F$  sia differenziabile e decomponiamo la matrice Jacobiana in due sottomatrici

$$J_F(P) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(P) \mid \frac{\partial F}{\partial y}(P) \right)$$

dove la matrice  $\frac{\partial F}{\partial x}(P)$  è la matrice  $M \times (N-M)$  contenente le derivate parziali rispetto alle variabili  $(x_1, \dots, x_{N-M})$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}(P)$  è la matrice  $M \times M$  contenente le derivate parziali rispetto alle variabili  $(y_1, \dots, y_M)$ . Supponiamo che  $F$  sia di classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) su  $A$ . Sia  $P_0 = (x_0, y_0) \in A$  tale che  $F(P_0) = 0$  e la matrice Jacobiana  $J_F(P_0)$  abbia rango massimo. Senza perdere in generalità, supponiamo che le variabili siano ordinate in modo tale che la matrice quadrata  $\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)$  sia invertibile.

Allora esistono

un intorno aperto  $U$  di  $x_0$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^{N-M}$   
 un intorno aperto  $V$  di  $y_0$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^M$   
 una funzione  $\varphi : U \rightarrow V$

tale che

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in U.$$

Inoltre per ogni  $(x, y) \in U \times V$  vale

$$F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x),$$

la funzione  $\varphi$  è di classe  $C^k$  su  $U$  e vale

$$J_\varphi(x) = - \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right]^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) \right), \quad \forall x \in U. \quad (13)$$

dove a membro destro compaiono operazioni tra matrici.

Nei prossimi esempi si noti la differenza tra le variabili  $x, y$  e  $x, y$ .

**Esempio 2.24.** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Consideriamo il punto  $P_0 = (0, 0, 1) \in \{F = 0\}$  (l'insieme di livello  $\{F = 0\}$  è la sfera unitaria) Calcoliamo la matrice Jacobiana associata a  $F$  e troviamo

$$J_F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = \left( \underbrace{2x, 2y}_{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} \mid \underbrace{2z}_{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} \right)$$

Notiamo che valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita per la nostra scelta di  $P_0$ , di conseguenza sappiamo che esiste un intorno  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  di  $x_0 = (0, 0)$  e un intorno  $V \subseteq \mathbb{R}$  di  $y_0 = 1$  e una funzione  $\varphi : U \rightarrow V$  tale che  $z = \varphi(x, y)$  e  $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$  per ogni  $(x, y) \in U$ . Inoltre vale

$$J_\varphi(x, y) = \nabla \varphi(x, y) = - \left[ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) \right]^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y)), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y)) \right)$$

da cui segue

$$\nabla \varphi(x, y) = - \frac{1}{2\varphi(x, y)} (2x, 2y) = \left( -\frac{x}{\varphi(x, y)}, -\frac{y}{\varphi(x, y)} \right)$$

in particolare per  $(x, y) = x_0 = (0, 0)$  troviamo  $\nabla \varphi(x, y) = (0, 0)$ .

In questo caso la funzione  $\varphi$  è facile da individuare, in quanto è facile isolare con semplici calcoli la variabile  $z$ , trovando

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Notiamo che l'aperto  $U$  deve essere necessariamente contenuto nella palla unitaria di  $\mathbb{R}^2$  centrata nell'origine.

**Esempio 2.25.** Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, z)$  e consideriamo il punto  $(0, 1, 0) \in \{F = 0\}$ . Calcoliamo la matrice Jacobiana associata a  $F$  e troviamo

$$J_F(x, y, z) = \left( \begin{array}{c|cc} \frac{\partial F}{\partial x}(P) & \frac{\partial F}{\partial y}(P) & \\ \hline 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Usando la notazione  $\mathbf{x} = x$  e  $\mathbf{y} = (y, z)$ , notiamo che valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita per la nostra scelta di  $P_0 = (\mathbf{x}_0 | \mathbf{y}_0) = (0 | 1, 0)$ :

$$J_F(0, 1, 0) = \left( \begin{array}{c|cc} \frac{\partial F}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) & \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e possiamo calcolare facilmente

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial y}(P) \right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2y} & -\frac{z}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora esiste un intorno  $U \subseteq \mathbb{R}$  di  $\mathbf{x}_0 = 0$  e un intorno  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  di  $\mathbf{y}_0 = (1, 0)$  e una funzione  $\varphi : U \rightarrow V$  tale che  $(y, z) = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$  e  $F(x, \varphi(x)) = 0$  per ogni  $x \in U$ . Inoltre vale

$$J_\varphi(x) = \varphi'(x) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2\varphi_1(x)} & -\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\varphi_1(x)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Ponendo  $x = \mathbf{x}_0 = 0$  troviamo  $\varphi'(0) = (0, 0)$ .

La funzione  $\varphi$  in questo semplice caso può essere ottenuta mediante calcolo diretto isolando le variabili  $y$  e  $z$  ed esprimendole in funzione della sola variabile  $x$  a partire dal sistema  $F = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava facilmente, ricordando che  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  con  $x_0 = 1 > 0$ , la funzione  $\varphi(x) = (\sqrt{1 - x^2}, 0)$ . Possiamo a questo punto facilmente la validità della formula (14).

**Esempio 2.26.** Consideriamo la funzione  $F$  dell'esercizio precedente e la funzione  $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tale che  $\tilde{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 - 1)$ . Con facili calcoli notiamo che  $E := \{\tilde{F} = 0\} = \{F = 0\}$ . Lo Jacobiano della funzione  $\tilde{F}$  risulta, per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$J_{\tilde{F}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Se prendiamo  $(x, y, z) \in \{\tilde{F} = 0\}$ , in particolare  $z = 0$  e quindi

$$J_{\tilde{F}}(x, y, 0) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix},$$

che ci porta ad una matrice Jacobiana avente sempre rango 1. Non possiamo quindi applicare mai il teorema della funzione implicita utilizzando la funzione  $\tilde{F}$ . Ciò è dovuto alla cattiva scelta delle funzioni che determinano i vincoli che descrivono l'insieme  $E$ . La scelta di utilizzare la funzione  $F$  permette invece di applicare il teorema.

Un corollario del teorema della funzione implicita risulta il seguente, che ci dà degli elementi per capire se è possibile trovare l'inversa di una funzione, per lo meno in un intorno di un punto. Ricordiamo, ad esempio che, data una funzione  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , qualora  $f$  sia derivabile in  $I$  e che  $f'(x_0) \neq 0$  in un certo punto  $x_0 \in I$  allora la funzione  $f$  è invertibile in un intorno di  $x_0$  (infatti localmente sarà monotona e continua).

**Teorema 2.27** (Teorema di inversione locale). Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , con  $A$  aperto, di classe  $C^1$  sul suo dominio. Consideriamo un punto  $P_0 \in A$  tale che  $J_F(P_0)$  sia invertibile.

Allora esistono un intorno  $U$  di  $P_0$  e un intorno  $V$  di  $F(P_0)$  tale che la funzione  $F : U \rightarrow V$  è una biiezione, inoltre  $F^{-1} : V \rightarrow U$  è di classe  $C^1$  e vale

$$J_{F^{-1}}(F(P_0)) = [J_F(P_0)]^{-1}.$$

Vediamo solo un accenno della dimostrazione. Prendiamo la funzione  $\tilde{F} : \mathbb{R}^N \times A \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita come

$$\tilde{F}(y, P) = (F_1(P) - y_1, \dots, F_N(P) - y_N),$$

notiamo che l'insieme di livello  $\{\tilde{F}(y, P) = 0\}$  è composto dai punti che soddisfano l'identità  $y = F(P)$ , quindi in particolare il punto  $(F(P_0), P_0)$  appartiene all'insieme di livello zero. La matrice Jacobiana della funzione  $\tilde{F}$  è

$$J_{\tilde{F}}(y, P) = \left( -I_N \mid J_F(P) \right),$$

dove  $I_N$  è la matrice identica di ordine  $N$ . Dalle ipotesi del teorema possiamo applicare il teorema del Dini e trovare che esistono intorno  $V, U$  rispettivamente di  $F(P_0)$  e  $P_0$ , e una funzione  $\varphi : V \rightarrow U$  tale che

$$y = F(P) \iff \tilde{F}(y, P) = 0 \iff P = \varphi(y).$$

Possiamo quindi notare che  $\varphi$  è proprio l'inversa di  $F$  cercata.

### 3 Problemi di minimo/massimo vincolato

Consideriamo un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  e una funzione  $F : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  con  $1 \leq M \leq N$ , definiamo l'**insieme vincolato**

$$C = \{P \in A \mid F(P) = 0\} \subseteq A$$

e, corrispondentemente, definiamo **vincoli** le equazioni

$$\begin{cases} F_1(P) = 0, \\ \vdots \\ F_M(P) = 0. \end{cases}$$

Data una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , diremo che  $P_0 \in C$  è un **punto di massimo locale per  $f$  relativo al vincolo  $C$** , se esiste un intorno  $W$  di  $P_0$  tale che

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in C \cap W;$$

similmente, diremo che  $P_0 \in C$  è un **punto di minimo locale per  $f$  relativo al vincolo  $C$** , se esiste un intorno  $W$  di  $P_0$  tale che

$$f(P) \geq f(P_0), \quad \forall P \in C \cap W.$$

**Teorema 3.1** (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange). *Siano date le funzioni  $F$  e  $f$  definite come sopra, l'insieme  $C$  e un punto  $P_0 \in C$ . Supponiamo che  $F$  sia di classe  $C^1$  su  $A$  con  $J_F(P_0)$  di rango massimo, e che  $f$  sia differenziabile in  $P_0$ .*

*Se  $P_0$  è punto di estremo locale per  $f$  relativo al vincolo  $C$  allora esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$  (detti **moltiplicatori di Lagrange**) tali che*

$$\nabla f(P_0) = \lambda_1 \nabla F_1(P_0) + \dots + \lambda_M \nabla F_M(P_0).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo, senza perdere in generalità, il caso in cui  $P_0$  è punto di minimo locale per  $f$  relativo al vincolo  $C$ . Riordiniamo le variabili di  $\mathbb{R}^N$  in modo da individuare le coordinate  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M$  tali che la sottomatrice  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$  della matrice Jacobiana sia invertibile. Usando il Teorema del Dini troviamo che l'insieme

$$C \cap (U \times V) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M \mid y = \varphi(x), x \in U\}$$

contiene il punto  $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, \varphi(x_0))$ . Poiché il punto  $P_0$  è di minimo locale per  $f$  relativo al vincolo  $C$  allora esiste un insieme aperto  $W = U_1 \times V_1 \subset U \times V$ , contenente  $P_0$ , tale che  $f(P_0) \leq f(P)$  per ogni  $P \in W \cap C$ .

Quindi, per ogni  $x \in U_1$ , abbiamo  $P = (x, \varphi(x)) \in C \cap W$ , quindi  $f(P_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) \leq f(x, \varphi(x))$  per ogni  $x \in U_1$ .

Quindi abbiamo trovato che la funzione  $f_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^{N-M} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f_1(x) = f(x, \varphi(x)),$$

ha un punto di minimo in  $x_0$ . Dalle ipotesi,  $f_1$  risulta differenziabile in  $x_0$  e vale

$$0 = \nabla f_1(x_0) = \underbrace{\nabla f(x_0, \varphi(x_0))}_{=v_0 \in \mathbb{R}^N} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_{N-M} \\ J_\varphi(x_0) \end{pmatrix}}_{=A},$$

dove  $I_{N-M}$  è la matrice identica di ordine  $N - M$ , da cui evinciamo che il vettore  $v_0 = \nabla f(P_0)$  è ortogonale a tutti gli  $N - M$  vettori colonna linearmente indipendenti della matrice  $A$ .

Introduciamo  $\mathcal{W}$  come sottospazio vettoriale generato dalle colonne di  $A$  e notiamo che esso ha dimensione  $N - M$ . Da quanto appena visto abbiamo

$$\nabla f(P_0) \in \mathcal{W}^\perp \quad (15)$$

Mostriamo ora che tale proprietà vale anche per i vettori  $\nabla F_k(P_0)$  per ogni  $k = 1, \dots, M$  (ricordiamo che per ipotesi sono linearmente indipendenti: sono infatti le righe di  $J_F(P_0)$ , che ha rango massimo per ipotesi), ovvero

$$\nabla F_k(P_0) \in \mathcal{W}^\perp, \quad k = 1, \dots, M. \quad (16)$$

Abbiamo che  $F(x, \varphi(x)) = 0$  per ogni  $x \in U_1$ ; in particolare, per  $k = 1, \dots, M$ ,

$$F_k(x, \varphi(x)) = 0 \text{ per ogni } x \in U_1,$$

quindi definendo  $\tilde{f}_k : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  come  $\tilde{f}_k(x) = F_k(x, \varphi(x))$ , vale  $\tilde{f}_k \equiv 0$  e troviamo

$$0 = \nabla \tilde{f}_k(x) = \nabla F_k(x, \varphi(x)) \cdot \begin{pmatrix} I_{N-M} \\ J_\varphi(x) \end{pmatrix},$$

per ogni  $x \in U_1$ . In particolare, scelto  $x = x_0$ ,

$$0 = \nabla \tilde{f}_k(x_0) = \nabla F_k(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_{N-M} \\ J_\varphi(x_0) \end{pmatrix}}_{=A},$$

dimostrando quindi la validità di (16).

Dalla validità di (15) e (16), ricordando che la dimensione di  $\mathcal{W}^\perp$  è  $M$ , possiamo concludere che vale

$$\nabla f(P_0) \in \text{Span}\{\nabla F_1(P_0), \dots, \nabla F_M(P_0)\} = \mathcal{W}^\perp$$

grazie alla lineare indipendenza dei vettori  $\nabla F_k(P_0)$ . Da qui segue banalmente la tesi.  $\square$

**Esempio 3.2.** Calcoliamo massimo e minimo della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy$  sulla circonferenza unitaria  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Entrambi esistono per il teorema di Weierstrass in quanto la funzione  $f$  è continua su  $C$  che è chiuso e limitato, quindi compatto.

Notiamo facilmente che  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ , con  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , quindi

$$\nabla f(x, y) = (y, x), \quad \nabla F(x, y) = (2x, 2y),$$

e notiamo che  $\nabla F(x, y) \neq (0, 0)$  per ogni  $(x, y) \in C$ , quindi  $J_F = \nabla F$  ha rango massimo su tutti i punti di  $C$ . Possiamo quindi utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e cercare quindi i valori  $\lambda, x, y$  che risolvono il seguente sistema.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo la seconda equazione nella prima e troviamo

$$\begin{cases} y = 4\lambda^2 y \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1 - 4\lambda^2) = 0 \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Abbiamo due alternative:  $y = 0$  oppure  $\lambda = \pm 1/2$ . Nel caso  $y = 0$  troviamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

che non porta a soluzioni. Consideriamo quindi gli altri due casi

$$\begin{cases} \lambda = \pm 1/2 \\ x = \pm y \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$$

che porta alle quattro soluzioni

$$P_{\pm} = \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad Q_{\pm} = \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Sostituendo queste coordinate nella funzione  $f$ , troviamo che i punti  $P_{\pm}$  sono punti di massimo con valore  $1/2$ , mentre i punti  $Q_{\pm}$  sono punti di minimo con valore  $-1/2$ .

**Esercizio 3.3.** Risolvere l'esercizio precedente effettuando la sostituzione  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , dove  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Nota 3.4.** Il segno di  $\lambda$  non fornisce elementi utili a determinare se i punti così trovati sono di massimo o di minimo.

### 3.1 Risoluzione di problemi di minimo e massimo vincolati

Consideriamo le funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , l'insieme di livello  $C = \{x \in A \mid F(x) = 0\}$  (vincolo). Vediamo un metodo per determinare massimi e minimi della funzione  $f$  su  $C$ .

I possibili punti di estremo sono:

- i punti  $P \in C$  in cui  $f$  non è differenziabile;
- i punti  $P \in C$  per cui  $F$  non è  $C^1$  in un intorno di  $P$ ;
- i punti  $P \in C$  in cui la matrice  $J_F(P)$  non ha rango massimo;
- i punti  $P \in C$  in cui la matrice  $J_F(P)$  ha rango massimo e vale

$$\nabla f(P) = \sum_{k=1}^M \lambda_k \nabla F_k(P).$$

Quindi, dopo aver individuato i punti  $P \in C$  che soddisfano i primi tre casi, devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^M \lambda_k \nabla F_k(x_1, \dots, x_N) \\ F(x_1, \dots, x_N) = 0. \end{cases}$$

Una volta trovati tutti i punti candidati, andiamo a valutare la funzione  $f$  in questi punti per determinare quale sia il valore minimo o massimo della funzione confrontando i risultati.

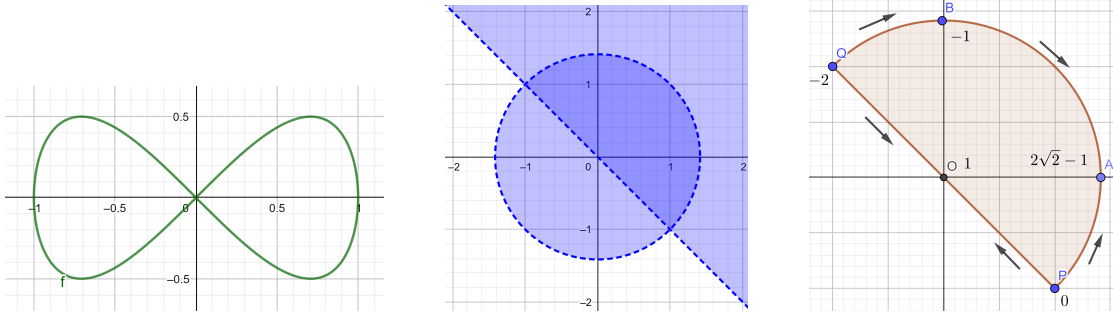


Figura 4: vedi Esercizio 3.5 (immagine a sinistra) ed Esercizio 3.6 (immagine a destra).

**Esercizio 3.5.** Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e il vincolo  $C = \{F = 0\}$  con  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ , e determiniamo il massimo di  $f$  su  $C$  (ovvero il punto più distante dall'origine).

Sia  $f$  che  $F$  sono differenziabili in tutto  $\mathbb{R}^2$ , e calcoliamo facilmente

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y), \quad \nabla F(x, y) = (4x^3 - 2x, 2y)$$

e notiamo che  $\nabla F$  non ha rango massimo nei punti  $O = (0, 0) \in C$ ,  $A_{\pm} = (\pm 1/\sqrt{2}, 0) \notin C$ . L'origine è quindi un candidato punto di estremo con valore  $F(0, 0) = 0$ .

Impostiamo ora il sistema suggerito dal teorema dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \lambda(4x^3 - 2x) \\ 2y = \lambda(2y) \\ x^4 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1 - \lambda(2x^2 - 1)) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ x^4 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Ci conviene iniziare col considerare la seconda equazione distinguendo i casi  $y = 0$  e  $\lambda = 1$ .

$$[y = 0] \quad \begin{cases} 2x(1 - \lambda(2x^2 - 1)) = 0 \\ y = 0 \\ x^4 - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1 - \lambda(2x^2 - 1)) = 0 \\ y = 0 \\ x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

Abbiamo quindi tre candidati:  $O = (0, 0)$  (già considerato prima),  $P_{\pm} = (\pm 1, 0)$ , con valore  $f(P_{\pm}) = 1$ .

$$[\lambda = 1] \quad \begin{cases} 2x(1 - (2x^2 - 1)) = 0 \\ \lambda = 1 \\ x^4 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \cdot 2(1 - x^2) = 0 \\ \lambda = 1 \\ x^4 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{-1, 0, 1\} \\ \lambda = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

che porta alle stesse soluzioni di poco fa. Quindi, dati i tre candidati  $O, P_+, P_-$  notiamo che il massimo di  $f$  su  $C$  è 1 raggiunto nei punti  $P_+, P_-$ .

**Esercizio 3.6.** Determiniamo massimo e minimo della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2 + 1$  sul vincolo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq -x\}$ . Dapprima cerchiamo i punti critici in  $\overset{\circ}{C}$ , quindi i punti tali che  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ :

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3x - 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2/3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O = (0, 0) \notin \overset{\circ}{C} \\ P = (2/3, 0) \in \overset{\circ}{C} \end{cases}$$

Valutiamo la matrice Hessiana in  $P$  per determinare la natura del punto critico:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(2/3, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{sella})$$

A questo punto passiamo a studiare il bordo  $\partial C$  che risulta costituito da due sottoinsiemi:

$$\begin{aligned}\partial C &= E_1 \cup E_2 \\ E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, y = -x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x, -1 \leq x \leq 1\}. \\ E_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2, y \geq -x\}\end{aligned}$$

Studiamo  $f$  sul vincolo  $E_1$ . Consideriamo quindi

$$\begin{aligned}g(t) &= f(t, -t) = t^3 - 2t^2 + 1, \quad t \in [-1, 1] \\ g'(t) &= 3t^2 - 4t = t(3t - 4), \\ g'(t) = 0 &\iff t = 0 \vee t = 4/3 > 1.\end{aligned}$$

Il valore  $t = 0$  appartiene all'intervallo  $[-1, 1]$  e dà il primo candidato: il punto  $O = (0, 0)$ . Notando che

$$g' > 0 \text{ su } [-1, 0), \quad g' < 0 \text{ su } (0, 1]$$

evinciamo che  $O = (0, 0)$  è un punto di massimo locale per  $f$  rispetto al vincolo  $E_1$  con valore  $f(0, 0) = 1$  (non è necessariamente un massimo locale in  $C$ ).

Studiamo  $f$  sul vincolo  $E_2$  utilizzando invece il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2 - 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x(3x - 2 - 2\lambda) = 0 \\ 2y(\lambda + 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Distinguiamo i casi  $y = 0$  e  $\lambda = -1$ .

$$[y = 0] \begin{cases} x(3x - 2 - 2\lambda) = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x(3x - 2 - 2\lambda) = 0 \\ y = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

dove il punto  $A = (\sqrt{2}, 0)$  è accettabile ricordando che in  $E_2$  è introdotta anche la condizione  $y \geq -x$ . Vale  $f(\sqrt{2}, 0) = 2\sqrt{2} - 1$ .

$$[\lambda = -1] \begin{cases} x(3x) = 0 \\ \lambda = -1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

dove il punto  $B = (0, \sqrt{2})$  è accettabile ricordando la condizione  $y \geq -x$ . Vale  $f(0, \sqrt{2}) = -1$ .

A questo punto dobbiamo considerare anche gli spigoli di  $\partial C$ , ovvero i punti  $(1, -1)$  con valore  $f(1, -1) = 0$  e  $(-1, 1)$  con valore  $f(-1, 1) = -2$ .

Riassumendo i candidati trovati sono (sotto i relativi valori assunti tramite  $f$ )

$$\begin{array}{ccccc} (0, 0) & (\sqrt{2}, 0) & (0, \sqrt{2}) & (1, -1) & (-1, 1) \\ 1 & 2\sqrt{2} - 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}$$

quindi concludiamo che il minimo è  $-2$  e il massimo  $2\sqrt{2} - 1$ .

**Esercizio 3.7.** Determiniamo massimo e minimo della funzione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y - z$  sul vincolo  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = x^2 - y\}$ .

Il vincolo è descritto come insieme di livello  $(0, 0)$  della funzione  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita come

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 - y - z).$$

Notiamo che  $C \subset B_2(0)$  è chiuso, quindi per il teorema di Weierstrass, massimo e minimo esistono. Osserviamo che  $\overset{\circ}{C}$  è vuoto, quindi studiamo  $\partial C = C$ . Le funzioni  $f$  e  $F$  sono di classe  $C^1$  e vale

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 1, -1), \quad J_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobiana ha rango 1 se esiste  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $(2x, 2y, 2z) = k(2x, -1, -1)$  per qualche punto  $(x, y, z) \in C$ . A questo scopo risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x(1-k) = 0 \\ 2y = -k \\ 2z = -k \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y - z = 0 \end{cases}$$

Distinguiamo i casi  $x = 0$  e  $k = 1$ .

$$[x = 0] \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y = -k \\ 2z = -k \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y = -k \\ y = z \\ y^2 + z^2 = 1 \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{matrix} (!) & \text{nessuna soluzione} \\ (!) \\ (!) \end{matrix}$$

$$[k = 1] \quad \begin{cases} k = 1 \\ 2y = -k \\ 2z = -k \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = -1/2 \\ z = -1/2 \\ x^2 = 1/2 \\ x^2 = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{nessuna soluzione} \\ \\ \\ (!) \end{matrix}$$

Concludiamo quindi che  $J_F$  ha sempre rango massimo su  $C$ . Passiamo quindi ad impostare il sistema suggerito dal teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x + \mu 2x \\ 1 = \lambda 2y + \mu(-1) \\ -1 = \lambda 2z + \mu(-1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda-\mu) = 0 \\ 1 = \lambda 2y + \mu(-1) \\ -1 = \lambda 2z + \mu(-1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y - z = 0 \end{cases}$$

Grazie alla prima equazione, distinguiamo i casi  $x = 0$  e  $\lambda + \mu = 1$ . Nel caso  $x = 0$ , dai vincoli troviamo

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ y = -z \end{cases} \quad \text{candidati: } A_{\pm} = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Notiamo che anche in questo caso non ci curiamo di scoprire i valori di  $\lambda$  e  $\mu$ . Analizziamo ora il caso rimanente:  $\lambda + \mu = 1$ .

$$\begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda(2y + 1) = 2 & (\lambda \neq 0!) \\ \lambda(2z + 1) = 0 & (\lambda = 0?) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -1/2!$$

Nella terza equazione non possiamo porre  $\lambda = 0$  altrimenti la seconda equazione non può essere soddisfatta, segue che l'unica opzione valida è  $z = -1/2$ .

$$\begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda(2y + 1) = 2 \\ z = -1/2 \\ x^2 + y^2 = 3/4 \\ x^2 + 1/2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda(2y + 1) = 2 \\ z = -1/2 \\ x^2 + (x^2 + 1/2)^2 = 3/4 \\ x^2 + 1/2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda(2y + 1) = 2 \\ z = -1/2 \\ (x^2 + 1/2)^2 = 3/2 \\ x^2 + 1/2 = y \end{cases}$$

da cui finalmente ricaviamo le soluzioni

$$\begin{cases} x_{\pm,B} = \pm \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} \\ y_B = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \\ z_B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

trovando i punti candidati  $B_{\pm} = (x_{\pm,B}, y_B, z_B)$ .

Riassumendo abbiamo trovato quattro candidati  $A_{\pm}, B_{\pm}$ . I valori assunti sono

$$f(A_+) = \sqrt{2}, \quad f(A_-) = -\sqrt{2}, \quad f(B_+) = \sqrt{6} - 1, \quad f(B_-) = \sqrt{6} - 1,$$

Possiamo verificare che  $\sqrt{6} - 1 > \sqrt{2}$  (anche senza calcolatrice, verificando che la disequazione vale con alcuni passaggi algebrici) e concludere che la funzione  $f$  ammette, su  $C$ , minimo  $-\sqrt{2}$  e massimo  $\sqrt{6} - 1$ .