

Analisi Matematica II  
Corso di Laurea in Fisica - 12 CFU

PROF. SFECCI  
Programma - A.A. 2024/2025

### Testi consigliati

- E. Giusti, *Analisi Matematica 1 e 2*, terza edizione, Bollati Boringhieri, 2002 e 2003.
- E. Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica*, volume primo e secondo, Bollati Boringhieri, 1991 e 1992.
- M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa, *Analisi matematica 1 e 2*, Zanichelli, 2008 e 2009 (esiste un eserciziario associato).
- M. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi matematica 2*, Liguori, 2001 (esiste un eserciziario associato).
- R. Adams, *Calcolo differenziale 2*, Editrice Ambrosiana, Zanichelli, 2014.
- W. Rudin, *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill, 1991.
- G. Catino e F. Punzo, *Esercizi svolti di Analisi Matematica e Geometria*, Esculapio, 2020

## 1 Serie numeriche, integrali di Riemann in senso generalizzato e serie di potenze

Definizione di serie numerica. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Linearità per le serie convergenti. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. La serie geometrica. La serie armonica. Serie a termini positivi e loro criteri di convergenza: criterio del confronto, criterio del confronto asintotico, criterio del rapporto, criterio della radice, criterio di condensazione di Cauchy. La serie armonica generalizzata. Criterio di Cauchy. Serie assolutamente convergenti. Serie a segni alterni e criterio di Leibniz. Integrali di Riemann in senso generalizzato per funzioni illimitate o su intervalli illimitati. Criterio integrale di convergenza per serie. Serie di potenze e raggio di convergenza. Serie derivata e serie integrale. Serie di Taylor e funzioni analitiche. Serie di Taylor di alcune funzioni importanti.

## 2 Spazi metrici

Spazi metrici: intorni, insiemi aperti, insiemi chiusi. Interno, chiusura e frontiera di un insieme. Definizione di completezza e compattezza di uno spazio metrico. Continuità e limiti di funzioni tra spazi metrici. Lo spazio  $\mathbb{R}^N$ : prodotto scalare, norma, distanza. Completezza di  $\mathbb{R}^N$  e caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^N$ . Funzioni di più variabili reali a valori vettoriali: continuità. Richiami sulle applicazioni lineari: matrice associata.

## 3 Calcolo differenziale in più variabili

Derivate direzionali e derivate parziali. Funzioni differenziabili, differenziale di una funzione. Matrice Jacobiana e gradiente. Sottospazio tangente e approssimante lineare. Il teorema del differenziale totale. Differenziale della funzione composta (senza dimostrazione). Teorema del valor medio e sue conseguenze. Derivate successive. Matrice Hessiana. Il teorema di Schwarz. Funzioni di classe  $C^k$ . Polinomi in più variabili. Formula di Taylor (senza dimostrazione). Problemi di massimo e minimo. Massimi e minimi locali. Condizioni necessarie per

massimi e minimi locali: equazione di Eulero. Condizioni necessarie e sufficienti per massimi e minimi locali: studio della matrice Hessiana. Teorema delle funzioni implicite o del Dini, caso  $N = 2$ . Teorema delle funzioni implicite, caso generale (senza dimostrazione). Teorema di inversione locale (con dimostrazione). Proprietà geometriche del gradiente e degli insiemi di livello. Problemi di massimo e minimo vincolato. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

## 4 Integrale di Riemann in più variabili

Definizione di integrale di Kurzweil-Henstock in più variabili. Confronto fra integrale alla Kurzweil-Henstock e integrale alla Riemann.

*(la parte precedente è stata introdotta nell'A.A. 2023/2024)*

Definizione di integrale di Riemann in più variabili e sue caratterizzazioni. Misura di Peano-Jordan: insiemi misurabili e insiemi di misura nulla. Proprietà dell'integrale e della misura. Teorema della media. Teorema di riduzione. Principio di Cavalieri. Integrazione per fili e per strati. Volume dei solidi di rotazione. Domini normali e integrazione sui domini normali. Teorema di cambiamento di variabili (senza dimostrazione). Coordinate polari nel piano e coordinate sferiche e cilindriche nello spazio. Teorema di Guldino. Applicazioni: calcolo di baricentri e momenti di inerzia. Integrale della gaussiana. Integrazione su domini illimitati, integrazione di funzioni illimitate (cenni).

*(la parte che segue fino a fine sezione è richiesta a partire dall'A.A. 2021/2022)*

Campi vettoriali, rotore e divergenza. Potenziale scalare e potenziale vettore. Curve, curve regolari, lunghezza di curve regolari, versore tangente ad una curva. Integrazione su curve di funzioni scalari e di campi vettoriali. Orientazione delle curve e come cambiano i suddetti integrali in base all'orientazione.

Superfici, superfici regolari, versore normale a una superficie. Integrazione su superfici di funzioni scalari e di campi vettoriali. Orientazione delle superfici e come cambiano i suddetti integrali in base all'orientazione.

Incollamenti di curve e incollamenti di superfici, bordo di una superficie, orientazione del bordo di una superficie.

Teoremi di esistenza del potenziale scalare e del potenziale vettore. Teorema della divergenza e corollari. Teorema del rotore e corollari.

## 5 Equazioni differenziali ordinarie

Funzioni Lipschitziane in  $\mathbb{R}^N$ . Funzioni localmente Lipschitziane. Lemma di Gronwall. Problema di Cauchy. Definizione di soluzione e formulazione integrale del problema. Teorema di esistenza e unicità locale. Teorema di unicità globale. Soluzioni massimali. Teorema di uscita dal compatto. Teorema di esistenza globale. Esempi di equazioni le cui soluzioni esplodono in tempo finito. Tecniche di risoluzione per equazioni scalari del primo ordine. Equazioni a variabili separate, equazioni omogenee, equazioni lineari, Equazione di Bernoulli. Equazioni lineari di ordine superiore. Spazio delle soluzioni e sua dimensione. Matrice Wronskiana. Equazioni a coefficienti costanti: polinomio caratteristico e determinazione delle soluzioni fondamentali. Equazioni non omogenee. Metodo di variazione delle costanti. Alcuni casi in cui si può utilizzare il metodo della somiglianza (tecnica dell'Ansatz).