

INSIEMI

Un insieme è una "collezione di oggetti".

Gli oggetti che formano un insieme si chiamano elementi dell'insieme.

Di solito gli insiemi si indicano con lettere maiuscole e gli elementi con lettere minuscole.

Esempio: $A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

Se a è un elemento di A si dice che a appartiene ad A e si scrive

$$a \in A$$

Se a non appartiene ad A si scrive

$$a \notin A$$

Spesso gli elementi di un insieme sono infiniti o comunque troppi, per essere elencati. In questo caso l'insieme viene descritto tramite una proprietà che caratterizza i suoi elementi:

Ad esempio $D = \{\text{numeri interi divisibili per } 2\}$.

In modo più preciso

$$D = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ divisibile per } 2 \}$$

↳ "tale che".

L'insieme privo di elementi ~~si~~ si dice insieme vuoto e si indica con $\emptyset$.

Due insiemi A e B sono uguali se hanno gli stessi elementi.

Se ogni elemento di A è anche elemento di B allora si dice che A è sottoinsieme di B e si scrive

$$A \subseteq B \quad (A \text{ è contenuto in } B)$$

Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$ si dice che A è strettamente contenuto in B .

Quantificatori

Se A è un insieme e una certa proprietà vale per tutti gli elementi di A allora si usa il simbolo $\forall$

$$(\forall x \in A) P(x)$$

vuole dire : per ogni elemento dell'insieme A vale la proprietà P .

Esempio : $A = \{ \text{numeri interi divisibili per } 6 \}$
 $(\forall m \in A) (m \text{ è divisibile per } 2)$

N. B. Una affermazione può essere vera o falsa. Ad esempio l'affermazione

"ogni numero divisibile per 6 è divisibile per 2" è vera

mentre l'affermazione

"ogni numero divisibile per 3 è divisibile per 2" è falsa.

Quando una proprietà è soddisfatta da almeno un elemento di A , si usa il quantificatore $\exists$

$$(\exists x \in A) P(x)$$

vuole dire : esiste almeno un elemento di A che soddisfa la proprietà P .

Ad esempio; se $A = \{\text{numeri interi divisibili per } 3\}$

$(\exists m \in A) (m \text{ divisibile per } 2)$

si legge "esiste almeno un elemento di A che è divisibile per 2"

In questo caso l'affermazione è vera (ad esempio 6 è divisibile per 3, quindi $6 \in A$, e 6 è divisibile per 2).

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

Se U è un insieme e $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, si definisce:

.) $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$ unione

N.B.: quando si dice "o" si intende che almeno una delle due cose è vera. Possono essere vere entrambe.

Esempio: $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

.) $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ intersezione

$x \in A \cap B$ se e solo se x appartiene sia ad A sia a B .

Esempio: $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$

N.B. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

•) $A \setminus B := \{x \in U \text{ t.c. } x \in A \text{ e } x \notin B\}$
(differenza)

Tolgo da A gli elementi che stanno anche in B

Esempio: $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$

•) $\complement A := \{x \in U \text{ t.c. } x \notin A\}$
(complementare in U)

Esempio: $U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2\}$ $\complement A = \{3, 4\}$

Esempio: $U = \{\text{numeri interi}\}$
 $A = \{\text{numeri pari}\}$
 $\complement A = \{\text{numeri dispari}\}$

NOTAZIONE

Quando da una certa affermazione segue una conseguenza, si usa il simbolo $\Rightarrow$

Esempio: $n \text{ divisibile per } 6 \Rightarrow n \text{ divisibile per } 2$

PRODOTTO CARTESIANO DI INSIEMI

Dati due insiemi non vuoti A e B , si definisce il prodotto cartesiano $A \times B$ formato dalle coppie in cui il primo membro è un elemento di A e il secondo è un elemento di B .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

ESEMPIO

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

INSIEMI NUMERICI

I numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

In $\mathbb{N}$ ci sono due operazioni, la somma $+$ e la moltiplicazione $\cdot$.

Una operazione è un "meccanismo" che "prende due numeri e produce un nuovo numero".

Es. prendo 3 e 2 e produco $3+2=5$.

Regole algebriche:

- 1) $m+0 = m \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- 2) $m+n = n+m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$ (proprietà commutativa)
- 3) $m+(n+p) = (m+n)+p$
 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$ (proprietà associativa)
- 4) $m \cdot 1 = m \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- 5) $m \cdot n = n \cdot m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$
- 6) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N}$
- 7) $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N}$
 (proprietà distributiva)
- 8) $m \cdot n = 0 \iff m=0 \vee n=0$
 (se e solo se)

(legge di annullamento del prodotto)

In $\mathbb{N}$ c'è un ordinamento:

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \dots$$

Si ha che:

$$a) \quad m \leq n \text{ e } n \leq p \implies m \leq p$$

$$b) \quad m \leq n$$

$$c) m \leq m \text{ e } m \leq m \Leftrightarrow m = m$$

$$d) \forall n, m \in \mathbb{N}, m \leq m \text{ o } m \leq n$$

(i numeri sono sempre confrontabili)

Le operazioni algebriche e l'ordinamento interagiscono secondo le seguenti regole:

$$\bullet) m \leq n \Rightarrow m + p \leq n + p \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N}$$

$$\bullet) m \leq n \Rightarrow m \cdot p \leq n \cdot p \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N}$$

I numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots \}$$

Algebra:

$$1) m + 0 = m \quad \forall m$$

$$2) m + (-m) = 0 \quad \forall m$$

$$3) m + n = n + m \quad \forall m, n$$

$$4) m + (n + p) = (m + n) + p \quad \forall m, n, p$$

$$5) m \cdot 1 = m \quad \forall m$$

$$6) m \cdot n = n \cdot m \quad \forall m, n$$

$$7) m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$$

$$8) m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$$

$$9) m \cdot n = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ o } n = 0$$

Da questo segue che

$$n \cdot (-1) = -n$$

e in particolare che $(-1) \cdot (-1) = 1$

Le regole dei segni per la moltiplicazione sono quindi:

positivo $\times$ positivo $\hat{=}$ positivo

positivo $\times$ negativo $\hat{=}$ negativo

negativo $\times$ negativo $\hat{=}$ positivo

In $\mathbb{Z}$ c'è un ordinamento

$$\dots \leq -3 \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq +1 \leq +2 \leq +3 \leq \dots$$

piuttosto che pensare in termini di "più grande" e "più piccolo" conviene pensare in termini di "viene prima" e "viene dopo".

Anche per i numeri interi valgono le proprietà:

$$1) n \leq m \text{ e } m \leq p \Rightarrow n \leq p$$

$$2) n \leq n$$

$$3) n \leq m \text{ e } m \leq n \Leftrightarrow n = m$$

$$4) \forall n, m, n \leq m \text{ o } m \leq n$$

L'algebra e l'ordinamento interagiscono secondo le seguenti regole:

$$1) \quad n \leq m \Rightarrow n + p \leq m + p$$

$$2) \quad n \leq m \text{ e } p \geq 0 \Rightarrow n \cdot p \leq m \cdot p$$

invece

$$3) \quad n \leq m \text{ e } p < 0 \Rightarrow n \cdot p \geq m \cdot p$$

Valore assoluto: misura la grandezza di un numero ed è sempre non negativo.

$$|n| = \begin{cases} n & \text{se } n \geq 0 \\ -n & \text{se } n \leq 0 \quad (\text{ovvero } -n \geq 0) \end{cases}$$

$$\text{es. } |5| = 5 \quad |-5| = 5$$

Divisione Dati n, m numeri interi, esistono e sono unici dei numeri interi s ed r t.c.

$$1) \quad n = s \cdot m + r$$

$$2) \quad |r| < |m|$$

I numeri razionali

Le frazioni sono oggetti del tipo $\frac{n}{m}$ dove $n, m \in \mathbb{Z}$, e $m \neq 0$.

Di fatto, una frazione è un elemento di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con $m \neq 0$.

Si definisce la somma di due frazioni

$$\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_1 m_2 + n_2 m_1}{m_1 m_2}$$

e il prodotto

$$\frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_1 \cdot n_2}{m_1 \cdot m_2}$$

Due frazioni $\frac{n_1}{m_1}$ e $\frac{n_2}{m_2}$

sono equivalenti se $n_1 m_2 = n_2 m_1$

Già $\frac{n}{n}$ è sempre equivalente a $\frac{1}{1}$

I numeri interi si identificano con le frazioni di tipo $\frac{n}{1}$.

Una frazione con tutte le sue equivalenti individua quello che si chiama numero razionale.

$$p \in \mathbb{Q} \quad p = \left[\frac{n}{m} \right] = \left\{ \frac{n}{m} \text{ e tutte le equivalenti} \right\}$$

In $\mathbb{Q}$ si definisce un ordine. Se $m_1, m_2 > 0$,

$$\frac{m_1}{m_1} \leq \frac{m_2}{m_2} \stackrel{\text{def.}}{\iff} m_1 m_2 \leq m_2 m_1$$

(N.B. Ogni frazione ammette una equivalente con denominatore positivo.

infatti $\frac{m_1}{m_1}$ è sempre equivalente

$$\text{a } \frac{-m_2}{-m_1})$$

Le proprietà di $\mathbb{Q}$ sono le seguenti:

$$1) p + q = q + p$$

$$2) (p + q) + r = p + (q + r)$$

$$3) p + 0 = p \quad (\text{dove } 0 = \left[\frac{0}{1} \right])$$

$$4) \forall p \in \mathbb{Q} \exists -p \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } p + (-p) = 0$$

$$\text{Se } p = \left[\frac{n}{m} \right], \quad -p = \left[\frac{-n}{m} \right]$$

$$5) p \cdot q = q \cdot p$$

$$6) p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$$

$$7) p \cdot 1 = p \quad (\text{dove } 1 = \left[\frac{1}{1} \right])$$

$$8) \forall p \in \mathbb{Q}, p \neq 0, \exists p^{-1} \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } p \cdot p^{-1} = 1$$

$$\left(\text{se } p = \left[\frac{n}{m} \right], \text{ con } n, m \neq 0, \text{ allora} \right.$$

$$p^{-1} = \left[\frac{m}{n} \right] \left. \right)$$

$$9) p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$$

L'algebra e l'ordinamento di $\mathbb{Q}$ interagiscono secondo le seguenti regole:

$$a) p \leq q \Rightarrow p + r \leq q + r$$

$$b) p \leq q \text{ e } r \geq 0 \Rightarrow p \cdot r \leq q \cdot r.$$

N.B. I numeri razionali si possono rappresentare in forma decimale:

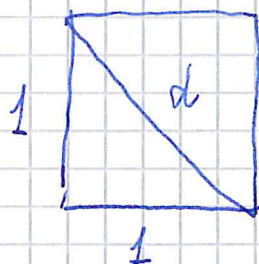
$$\text{es. } 7,53 = \left[\frac{753}{100} \right]$$

con un numero finito di decimali,
oppure con un numero infinito di decimali, ma periodico.

$$\text{es. } \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{1}{3} = 0, \overline{3} = 0,333 \dots$$

I numeri razionali sono troppo pochi.
Sono sufficienti per gestire le misure sperimentali e gli errori, ma non sono sufficienti dal punto di vista teorico nemmeno in problemi molto semplici. Ad esempio se voglio misurare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1



Pitagora :

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

d deve essere un numero che elevato al quadrato dà 2. ($d = \sqrt{2}$)

ma se prendo una frazione

$\frac{m}{n}$ t.c. $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, e ho

$$m^2 = 2n^2$$

Il fattore 2 compare un numero dispari di volte a destra, e un numero pari di volte a sinistra, e questo è assurdo.

Quindi se il mio universo è $\mathbb{Q}$,

in questo universo la diagonale del quadrato non possiede una lunghezza.

Per questo bisogna costruire i numeri reali $\mathbb{R}$.

Numeri reali $\mathbb{R}$

Sono il "completamento" di $\mathbb{Q}$. Si può pensare a $\mathbb{R}$ come l'insieme di tutti i numeri decimali, anche quelli con infiniti decimali, senza periodo.

Non spiegheremo come si costruiscono i numeri reali, ma elencheremo le proprietà: In $\mathbb{R}$ ci sono due operazioni: $+$, $\cdot$.

$$1) x + y = y + x$$

$$2) x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$3) \forall x, \quad x + 0 = x$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x + (-x) = 0$$

$$5) x \cdot y = y \cdot x$$

$$6) x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$7) x \cdot 1 = x \quad \forall x$$

$$8) \forall x \neq 0 \quad \exists x^{-1} \text{ t.c. } x \cdot x^{-1} = 1$$

$$9) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

-15-

se facciamo $\underbrace{1+1+\dots+1}_n$ volte, questo numero reale si identifica con $n \in \mathbb{N}$.

Inoltre n^{-1} si identifica con la frazione $\left[\frac{1}{n}\right]$

o con $\left[\frac{m}{n}\right]$ si può identificare col

numero reale $\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n \text{ volte}}^{-1}$.

Quindi $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

In $\mathbb{R}$ c'è un ordinamento " $\leq$ "

tale che

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \text{ o } y \leq x$

2) $x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z$

3) $x \leq x \quad \forall x$

4) $x = y \Leftrightarrow x \leq y \text{ e } y \leq x$.

L'intersezione tra algebre e ordinamento è regolata dalle

segmenti proprietà :

$$1) \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z$$

$$2) \quad x \leq y \text{ e } z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

Rispetto ai numeri razionali, $\mathbb{R}$ gode di una proprietà in più, la "proprietà dell'estremo superiore".

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme non vuoto e se $\exists M > 0$ t.c. $\forall x \in E$ si ha $x \leq M$, allora esiste un numero S , detto estremo superiore di E , t.c.

$$1) \quad \forall x \in E \text{ si ha } x \leq S$$

2) se $s' < S$, allora s' non gode delle proprietà 1), cioè

$$\exists x \in E \text{ t.c. } x > s'.$$

Grazie a queste proprietà si può dimostrare che in $\mathbb{R}$ esistono

le radici quadrate (e cube, ecc.).

Cioè: se $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$
e se $m \in \mathbb{N}$, allora l'equazione

$$x^m = r$$

ammette soluzione ($x = \sqrt[m]{r}$)

Quindi ad esempio se considero
l'equazione $x^2 = 2$,

ho che esiste $\sqrt{2}$

Se considero l'equazione $x^3 = 5$,

ho che esiste $\sqrt[3]{5}$

ecc.

Si scrive $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

NOTAZIONE: INTERVALLI

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$\rightarrow]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < +\infty\}$$

ecc.

Potenze

Se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

$$x^n = 1 \quad \text{se } n = 0$$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \quad \text{se } n = 1, 2, \dots$$

Se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, e $x \neq 0$

$$x^{-n} = \underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \dots \cdot x^{-1}}_{n \text{ volte}}$$

Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Si può quindi definire

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \quad \begin{array}{l} \forall x > 0 \\ \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq 0 \end{array}$$

Quindi si può definire

$$x^q \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0 \quad \text{e} \quad \forall q \in \mathbb{Q}, q > 0$$

Tuoltre se $x > 0$ si può definire

$$x^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}.$$

-20-

Le regole sono:

$$x^{q+p} = x^q x^p$$

$$(x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

che sono valide per:

- 1) $x \in \mathbb{R}$ e $q, p \in \mathbb{N}$
- 2) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $q, p \in \mathbb{Z}$
- 3) $x \in \mathbb{R}, x > 0$ e $q, p \in \mathbb{Q}, q, p \geq 0$
- 4) $x \in \mathbb{R}, x > 0$ e $q, p \in \mathbb{Q}$

Se $x \in \mathbb{R}, x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ si può definire x^α e continuare a valere le proprietà

$$x^0 = 1 \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$$

Più precisamente, si definisce

- 1) se $x > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$x^\alpha := \sup \{ x^{\alpha'} \mid \alpha' \in \mathbb{Q} \text{ e } \alpha' \leq \alpha \}$$

- 2) se $x = 1$, $x^\alpha = 1$

- 3) se $0 < x < 1$,

$$x^\alpha := \inf \{ x^{\alpha'} \mid \alpha' \in \mathbb{Q} \text{ e } \alpha' \leq \alpha \}$$

FUNZIONI

Nel descrivere i fenomeni naturali capita di avere delle situazioni in cui a ogni elemento di un determinato insieme si associa in modo non ambiguo, secondo determinate regole, un elemento di un secondo insieme.

ESEMPIO 1

Ho un rettilario e ho dei criteri precisi che mi permettono di classificare i vari individui, cioè di associare a ogni individuo la sua specie.

$A = \{ \text{individui nel mio rettilario} \}$

$B = \{ \text{specie di rettili} \}$

La funzione associa a ogni rettile appartenente ad A il nome della sua specie (B è un insieme di parole, ciascuna col suo preciso significato).

ESEMPIO 2

$A = \{ \text{studenti di biologia del 1° anno} \}$

a ogni studente associa la sua altezza.

In questo caso $B = \mathbb{Q}$ (o $B = \mathbb{R}$)

ESEMPIO 3

Ho una sfera di acciaio e la faccio cadere da diverse altezze, e misuro quanto tempo ci mette ad arrivare al suolo. Ad ogni altezza (espressa da un numero) associo un tempo (espresso ancora da un numero)

$$A = \mathbb{R}_+ = \{ \text{numeri reali positivi} \}$$

$$B = \mathbb{R} = \{ \text{numeri reali} \}.$$

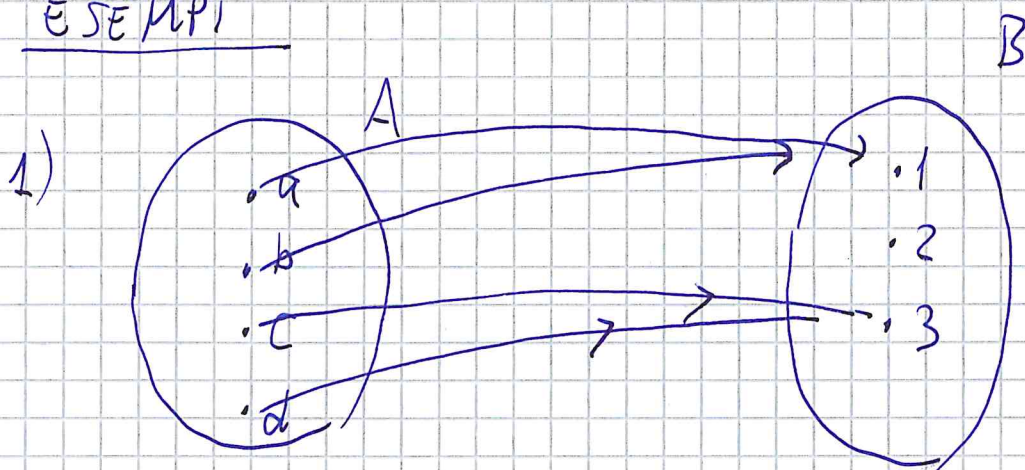
Vorrei ora di dare una descrizione generale di questa situazione.

Definizione di funzione

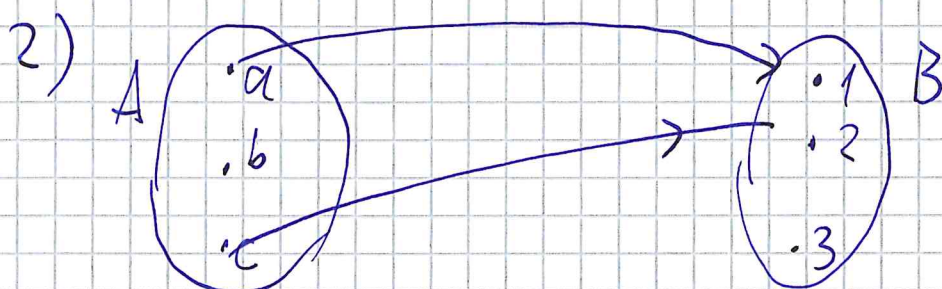
Siano A e B due insiemi non vuoti. Una funzione f da A a B è una legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B .

Si scrive $f: A \rightarrow B$.
 A si dice "dominio di f " e
 B si dice "codominio di f ".

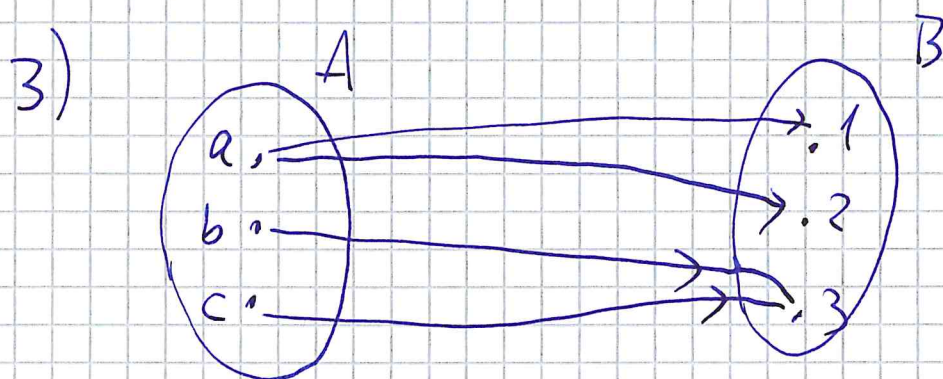
ESEMPI



f è una funzione.



Non è una funzione, perché non associa niente a b .



Non è una funzione, perché ad a associa due elementi di B .

Ad esempio se a ogni rettile associo la lunghezza delle sue zampe anteriori, non ho una funzione, perché i serpenti non hanno zampe. (Questo è un esempio del caso 2)

Per fare un esempio del caso 3), se associo a ogni mese la sua lunghezza, non ho una funzione, perché febbraio non ha una lunghezza unica, dipende dall'anno.