

ESERCIZI DI MATEMATICA – Foglio 1

Esercizio 1. Dati i seguenti insiemi

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = 6k\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = 8k\}$$

dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- a) $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = 48k\}$
- b) $A \cap B = \emptyset$
- c) $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = 24k\}$
- d) $A \cap B = \{\text{numeri pari}\}$
- e) $A \cap B = \{0\}$

Esercizio 2. Dati i seguenti insiemi

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = 2k\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 17\}$$

dire quali delle seguenti affermazioni sono vere (il complementare è fatto in \mathbb{N}):

- a) $\complement A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$
- b) $\complement A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ dispari e } n > 17\}$
- c) $\complement A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
- d) $A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
- e) $A \cap B = \emptyset$

Esercizio 3. Dati i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}

$$A =]-\infty, -2[, \quad B =]3, 5[, \quad C = [-3, 2[$$

descrivere esplicitamente gli insiemi:

- a) $\complement A, \complement B, \complement C,$
- b) $A \cap B, A \cup C, A \cup B \cup C,$
- c) $A \setminus C, \complement(\complement A \cap C),$
- d) $(A \cup B) \cap C, (A \cap B) \cup C).$

Esercizio 4. Descrivere tramite intervalli i sottoinsiemi di \mathbb{R} individuati dalle seguenti condizioni:

- a) $x > -1 \text{ o } x \geq 2$
- b) $x \leq 7 \text{ e } x > 3$
- c) $x > -1 \text{ o } x \leq 2$
- d) $x > 3 \text{ e } x < -7$

Esercizio 5. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} sono limitati (superiormente, inferiormente) e determinarne gli estremi superiore e inferiore:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x^2 \leq 9\}, \quad \{(n+3)^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \{p^2 \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{p^3 \mid p \in \mathbb{Z}\}, \quad \{(-1)^n - (n+1)^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Esercizio 6. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\sqrt{3x-1} < 2+x; \quad x-1 < \sqrt{2x}; \quad \sqrt{x+3} < \sqrt{2x+1}.$$

Esercizio 7.

- a. Verificare che la funzione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = 4n$ è iniettiva ma non suriettiva.
- b. Verificare che la funzione $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = n^2 + 3$ non è né iniettiva né suriettiva.
- c. Verificare che la funzione $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $h(q) = 4q + \frac{1}{2}$ è biiettiva e trovarne l'inversa.

Esercizio 8. Determinare l'immagine delle seguenti funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$;
- b) $X =]-\infty, -2] \cap [2, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;
- c) $X = [-2, 2]$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Esercizio 9. Determinare il dominio e l'immagine della funzione composta $f \circ g$, dove

- a) $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0, +\infty[$; $g(x) = x^2 - 1$ con $x \in \mathbb{R}$.
- b) $f(x) = x^2 - 1$ con $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0, +\infty[$.
- c) $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0, +\infty[$; $g(x) = \sin x$ con $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10. Dire se le seguenti funzioni ammettono un' inversa definita su $\text{Im}(f)$ e, in caso affermativo, scrivere una formula esplicita per la funzione inversa:

- a) $f(x) = x^5 + 1$, $x \in \mathbb{R}$;
- b) $f(x) = x^4 - 2$, $x \in \mathbb{R}$;
- c) $f(x) = (x^3 + 1)^{-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.