Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 16.09.25

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

1. Dare la definizione di costante del moto in un sistema Hamiltoniano. [2pt]

2. Che relazione c'è tra le costanti del moto e le Parentesi di Poisson? Dimostrarla. [1pt]

3. Si dia la definizione di trasformazione canonica. [1,5pt]

4. Cos'è una trasformazione canonica infinitesima? [0.5pt]

5. Data una generica funzione sullo spazio delle fasi $G(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$, dimostrare che la seguente trasformazione infinitesima è una trasformazione canonica *infinitesima* e scrivere l'Hamiltoniana coniugata [2pt]:
$$\tilde{p}_h = p_h - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}(p, q) \qquad \tilde{q}_k = q_k + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_k}(p, q) \qquad \text{con} \qquad \varepsilon \ll 1$$

6. Scrivere, usando le parentesi di Poisson, la variazione infinitesima di una funzione $f(p, q)$ sotto la trasformazioni infinitesima generata da $G(p, q)$. [1pt]

7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Nöther in *Meccanica Hamiltoniana*. [3pt]

8. Si consideri l'Hamiltoniana $H = \sum_{i=1}^{3} p_i q_i$. Che simmetrie ha questa Hamiltoniana? Quali sono le costanti del moto corrispondenti? Si dimostri che esse sono costanti del moto usando le parentesi di Poisson. [2pt]

9. Si consideri la funzione generatrice $F_2(\tilde{p}, q) = \sum_{j=1}^{3} \tilde{p}_j \log(q_j)$. Si derivi la trasformazione canonica da essa generata. Usando le Parentesi di Poisson, si dimostri che tale trasformazione è canonica. [2pt]

10. Si usi la trasformazione canonica trovata al punto 9 per risolvere le equazioni del moto relative all'Hamiltoniana al punto 8. [1pt]

Esercizio 2

Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare sulla superficie
$$z = \frac{x\, y}{a}\, .$$
Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, lega il punto P all'origine del sistema di riferimento tridimensionale xyz. **Sul sistema agisce la gravità**.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere le coordinate cartesiane x e y. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].

2. Trovare l'equazione di Lagrange associata alla coordinata x [2pt].

3. Che simmetrie ha il sistema? Ci sono costanti del moto associate ad esse? [1]

4. Si ponga $m = \frac{k(\ell^2+a^2)}{ag}$. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [4,5pt].

5. Si ponga $m = \frac{k(\ell^2+a^2)}{ag}$ e $\ell = a$. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno al punto stabile [2pt].

6. Tenendo $m = \frac{k(\ell^2+a^2)}{ag}$ e $\ell = a$, si linearizzi la Lagrangiana attorno al punto di equilibrio stabile e si scriva la soluzione generale delle equazioni di Lagrange linearizzate [2,5pt].

Esercizio 3

Si cosideri una particella quantistica vincolata su una circonferenza di raggio R e parametrizzata da $\varphi \in [0, 2\pi[$. La sua dinamica è determinata dall'Hamiltoniana

$$H_\theta = \frac{\left(p_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2}{2mR^2} \,.$$

1. Dimostrare che le funzioni $\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}$ sono autofunzioni dell'Hamiltoniana e si derivi lo spettro. Si determini la degenerazione degli autovolori trovati per $\theta = \pi$. [1pt]

2. Dato lo stato normalizzato $\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos\varphi$ al tempo $t = 0$, scrivere il suo evoluto $\psi(\varphi, t)$ al tempo $t \neq 0$ [1pt].

3. Si calcoli il valor medio di p_φ nello stato normalizzato $\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos\varphi$ [1pt].

4. Si consideri il sistema nello stato fondamentale: calcolare la probabilità che la particella venga misurata nell'intervallo $[0, \frac{\ell}{4}]$ [1pt].