

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ PER LE ASSICURAZIONI E LA FINANZA

Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche e Attuariali
Università degli Studi di Trieste

Calcolo delle Probabilità

- Argomenti:
 - ▶ Spazi di probabilità; probabilità condizionata e indipendenza
 - ▶ Variabili aleatorie e misurabilità
 - ▶ Legge di variabili aleatorie multivariate
 - ▶ Speranza matematica, varianza, covarianza
 - ▶ Speranza matematica condizionata
 - ▶ Convergenza e teoremi limite
 - ▶ Processi stocastici

Calcolo delle Probabilità

- Testi per il corso

- ▶ *Probability - An Introduction*, G. Grimmett, D. Welsh, OUP, 2a edizione, 2014
~> di base, copre adeguatamente il programma del corso
- ▶ *Probability and Random Processes*, G. Grimmett, D. Stirzaker, OUP, 3a edizione, 2001
~> molto ampio, la prima metà copre il corso mentre il resto si concentra su processi stocastici; numerosi esercizi (più *One Thousand Exercises in Probability* degli stessi autori)
- ▶ *Probability Essentials*, J. Jacod, P. Protter, Springer, 2a edizione, 2004
~> conciso ma matematicamente rigoroso

Spazi di Probabilità

Calcolo delle Probabilità

- Modello matematico per la descrizione e valutazione dell'incertezza
 - ▶ approccio assiomatico basato sulla *Teoria della Misura*
 - ▶ eventi $\equiv$ insiemi, probabilità $\equiv$ misura
 - ▶ approccio non “costruttivo”

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 1) Ω = insieme di possibili **risultati** di un **esperimento**
 - ▶ elementi (risultati): $\omega \in \Omega$
 - ▶ ω = **stato del mondo/stato di natura**
 - ▶ una volta che l'esperimento è terminato, **uno e uno solo** $\omega^* \in \Omega$ sarà verificato

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 2) $\mathcal{F}$ = insieme di eventi **di interesse per l'esperimento**
 - ▶ evento: **sottoinsieme di** Ω , se $A \in \mathcal{F}$ allora $A \subset \Omega$
 - ▶ evento: ente logico che può essere vero (V) o falso (F)
 - ▶ se ω^* si verifica, allora A è V o F se $\omega^* \in A$ o $\omega^* \notin A$

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 2) $\mathcal{F}$ = insieme di eventi **di interesse per l'esperimento**
 - ▶ $\mathcal{F}$ rappresenta l'**informazione** ottenibile dall'esperimento $\rightsquigarrow$ il **valore logico** di ogni evento in $\mathcal{F}$ verrà rivelato alla fine dell'esperimento
 - ▶ non necessariamente ogni sottoinsieme di Ω è in $\mathcal{F}$ (è un evento)
 - ▶ la scelta di $\mathcal{F}$ è guidata da natura del problema e convenienza matematica

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 3) P **probabilità**: per ogni evento $A \in \mathcal{F}$, un numero

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ▶ $P(A)$: misura di fiducia che A sia V (prima dell'esperimento)
- ▶ se $P(A) = 0$: è "**quasi certo**" che A sia F
- ▶ se $P(A) = 1$: è "**quasi certo**" che A sia V
- ▶ $P(A) > P(B)$: l'evento A è più probabile di B

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi ($\rightsquigarrow$ diagrammi di Venn)
 - ▶ $\Omega = \text{“universo”} = \text{evento certo}$: sempre V
 - ▶ $\emptyset = \text{insieme vuoto} = \text{evento impossibile}$: sempre F
 - ▶ $A^c = \bar{A} = \text{complementare di } A = \text{“non } A\text{”}$: V/F se e solo se A è F/V

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi

▶ $A \cup B =$ unione di A e $B =$ “ $A \circ B$ ”: V se A è V $\circ$ B è V
 $\rightsquigarrow$ unione non esclusiva!

▶ per una famiglia di insiemi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, con I insieme di indici,

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

è V se **almeno uno** degli A_α è V

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi

- ▶ $A \cap B =$ intersezione di A e $B =$ “ A e B ”: V se A è V e B è V

- ▶ per una famiglia di insiemi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, con I insieme di indici,

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

è V se **ognuno** degli A_α è V

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi

- ▶ $A - B = A$ meno $B =$ “ A e non B ”: V se A è V e B è F
- ▶ $A \triangle B =$ differenza simmetrica di A e $B = A$ o B , ma non entrambe: V se A è V e B è F , o viceversa $\rightsquigarrow$ unione esclusiva
- ▶ inclusione tra insiemi $A \subset B$: se A è V allora B è V

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi
 - ▶ A e B sono **disgiunti** se $A \cap B = \emptyset$: A e B sono **incompatibili** $\rightsquigarrow$ non si possono verificare entrambi
- Gli eventi di una famiglia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sono
 - ▶ **a due a due disgiunti** se

$$A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$$

per ogni $\alpha \neq \beta \rightsquigarrow$ **al più uno** degli eventi è V

- ▶ **esaustivi** se

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \Omega$$

$\rightsquigarrow$ **almeno uno** degli eventi è V

Eventi e Insiemi

- **Partizione** di Ω : una famiglia di eventi $\mathbb{P} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$ tale che
 - ▶ $A_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in I$
 - ▶ a due a due disgiunti
 - ▶ esaustivi
- Una partizione permette di rappresentare l'incertezza in eventi incompatibili di cui uno sicuramente si verifica ("puzzle")
- Caso tipico: $\mathbb{P}$ **discreta** ($\equiv$ finita o numerabile)

Spazi di Probabilità

- Modello per esperimenti combinati/ripetuti: **spazio prodotto** (prodotto cartesiano)
 - ▶ esperimento 1 (Ω_1) seguito da esperimento 2 (Ω_2) ... seguito da esperimento n (Ω_n):

$$\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i, i = 1, \dots, n\}$$

- ▶ esperimento ripetuto n volte ($\Omega_i = \Omega$ per ogni i):

$$\Omega^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega, i = 1, \dots, n\}$$

- ▶ i risultati di un esperimento **non influenzano** gli esiti degli altri
- ▶ **sequenza infinita** di esperimenti: e.g. $\Omega^\infty \equiv \Omega^{\mathbb{N}}$

Spazi di Probabilità

- ESERCIZIO. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
 - ▶ lancio di una moneta
 - ▶ lancio di un dado
 - ▶ lancio di due/ n / ∞ monete
 - ▶ lancio di un dado seguito da un lancio di una moneta
 - ▶ lancio un dado e poi lancio una moneta tante volte quanto è il risultato del dado
 - ▶ estrazione di 5 carte da un mazzo di 52
 - ▶ partita di calcio

Spazi di Probabilità

- ESERCIZIO. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
 - ▶ prezzo di una azione/ n azioni
 - ▶ numero di sinistri in un portafoglio di n contratti
 - ▶ numero di sinistri e danno totale in un portafoglio assicurativo
 - ▶ prezzo di una azione nel tempo
 - ▶ durata di vita alla nascita di un individuo/ n individui
- esempi di eventi incompatibili, esaustivi, unione, intersezione, differenza, ...

Spazi di Probabilità

- Definizione formale di **spazio di probabilità** (assiomi di Kolmogorov, 1933): una tripla

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

con

- 1 Ω : insieme non vuoto $\rightsquigarrow$ risultati possibili
- 2 $\mathcal{F}$: σ -algebra di sottoinsiemi di Ω $\rightsquigarrow$ eventi di interesse
- 3 P **probabilità** su $(\Omega, \mathcal{F})$ $\rightsquigarrow$ misura dell'incertezza

Spazi di Probabilità

- $\mathcal{F}$ è una **σ -algebra** di sottoinsiemi di Ω (gli elementi di $\mathcal{F}$ sono sottoinsiemi di Ω):

▶ [$\mathcal{F}1$] $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$

▶ [$\mathcal{F}2$, chiusura per **complementazione**]
per ogni $A \in \mathcal{F}$ anche $\bar{A} \in \mathcal{F}$

▶ [$\mathcal{F}3$, chiusura per **unioni/intersezioni numerabili**]
per ogni successione $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ di eventi in $\mathcal{F}$, allora

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

Spazi di Probabilità

- La coppia $(\Omega, \mathcal{F})$ è uno **spazio misurabile**;
una **probabilità** P su $(\Omega, \mathcal{F})$ è una applicazione

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

tale che

- ▶ [**P1, misura unitaria**] $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
- ▶ [**P2, σ -additività**] per ogni successione $(A_n)_{n \geq 1}$ di eventi **a due a due disgiunti** in $\mathcal{F}$

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

- Se $P(A) = 1$, A è **quasi certo** (si scrive A q.c.)

Spazi di Probabilità

- ESERCIZIO. Rappresentare come spazi di probabilità i seguenti esempi
 - ▶ lancio di una moneta
 - ▶ lancio di un dado
 - ▶ come σ -algebra, utilizzare l'**insieme delle parti** di Ω

$$2^{\Omega} = \mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$$

[tutti i sottoinsiemi di Ω]

σ -Algebra

- Nella definizione di σ -algebra
 - ▶ in [$\mathcal{F}$ 1] basta richiedere che $\emptyset \in \mathcal{F}$ oppure che $\Omega \in \mathcal{F}$ oppure che $\mathcal{F}$ sia non vuoto
 - ▶ in [$\mathcal{F}$ 3] basta richiedere che $\mathcal{F}$ sia chiuso rispetto a unioni numerabili oppure a intersezioni numerabili $\rightsquigarrow$ formule di **de Morgan**
- Ogni σ -algebra è chiusa per unioni o intersezioni **finite**

σ -Algebra

- Perché si richiedono $[\mathcal{F}1]$, $[\mathcal{F}2]$, $[\mathcal{F}3]$?
 - ▶ l'evento certo e quello impossibile sono sicuramente noti
 - ▶ se A è noto a esperimento terminato, tale sarà $\bar{A}$
 - ▶ se $A_1, \dots, A_n$ sono eventi rivelati noti alla fine dell'esperimento, tali saranno

$$A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad A_1 \cap \dots \cap A_n$$

estendere questa proprietà a successioni numerabili è fatto per
convenienza matematica

- Ogni operazione (finita o numerabile) su eventi di una σ -algebra dà come risultato eventi della σ -algebra

σ -Algebra

- Esempi di σ -algebra

- ▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega \rightsquigarrow$ la più **grande** σ -algebra su Ω , σ -algebra **discreta**
- ▶ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\} \rightsquigarrow$ la più **piccola** σ -algebra su Ω , σ -algebra **triviale**
- ▶ se $A \subset \Omega$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$

- Ogni σ -algebra $\mathcal{F}$ su Ω è tale che

$$\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F} \subset 2^\Omega$$

σ -Algebra

- $\mathcal{F}$ rappresenta l'**informazione** ottenibile dall'esperimento $\rightsquigarrow$ il **valore logico** di ogni evento (in $\mathcal{F}$) verrà rivelato alla fine dell'esperimento $\rightsquigarrow$ più grande è $\mathcal{F}$, maggiore l'informazione
 - ▶ σ -algebra triviale $\rightsquigarrow$ **nessuna** informazione
 - ▶ σ -algebra discreta $\rightsquigarrow$ **massima** informazione
- $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ σ -algebre su Ω
 - ▶ $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}$ ha più informazione di $\mathcal{G}$
 - ▶ $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}$ è una σ -algebra $\rightsquigarrow$ informazione **in comune** tra $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$
 - ▶ $\mathcal{G} \cup \mathcal{F}$ **non è** in generale una σ -algebra

- ESERCIZIO. Partita di calcio: $\Omega = \{1, X, 2\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_1$ = informazione di chi osserva (solo) se la squadra di casa ha vinto o meno
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_2$ = informazione di chi osserva (solo) se la squadra in trasferta ha vinto o meno
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
 - ▶ verificare che $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ non è una σ -algebra

σ -Algebra

- Più in generale, se $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ è una famiglia arbitraria di σ -algebre su Ω , tale è

$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

- σ -algebra generata da un insieme $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di Ω
 - ▶ come costruire una σ -algebra che contiene gli eventi in $\mathcal{C}$ “e niente altro”?
 - ▶ costruzione “da fuori” utilizzando il risultato precedente

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra, } \mathcal{C} \subset \mathcal{G} \}$$

σ -Algebra

- La σ -algebra generata da $\mathcal{C}$ può essere caratterizzata come l'unico insieme di eventi $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ tale che
 - ▶ $\mathcal{F}$ è una σ -algebra
 - ▶ $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$
 - ▶ per ogni altra σ -algebra $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, riesce $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

σ -Algebra

- Quindi la σ -algebra generata da $\mathcal{C}$
 - ▶ è la più piccola σ -algebra che contiene $\mathcal{C}$
 - ▶ contiene tutti gli insiemi costruibili partendo da quelli di $\mathcal{C}$ (con operazioni numerabili)
- A parte alcuni casi “semplici”, non è in generale possibile descrivere gli insiemi di $\sigma(\mathcal{C})$
- Come definire la condivisione (unione) delle informazioni?

σ -Algebra

- Tre proprietà (ovvie) della σ -algebra generata

▶ $\mathcal{F}$ σ -algebra $\iff \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F})$

▶ $\mathcal{F}$ σ -algebra, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$

▶ $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$

- ESERCIZIO. Chi è $\sigma(\mathcal{C})$ quando (i) $\mathcal{C} = \emptyset$ (ii) $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$ (iii) $\mathcal{C} = \{\Omega\}$ (iv) $\mathcal{C} = \{A\}$ con $\emptyset \neq A \neq \Omega$

- **Partizione generata** da una famiglia di insiemi

- ▶ se $\mathcal{C} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$, la partizione generata da $\mathcal{C}$ è

$$\mathbb{P}_G(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcap_{\alpha \in I} A'_\alpha \neq \emptyset \mid A'_\alpha = A_\alpha \text{ o } A'_\alpha = \overline{A_\alpha}, \text{ per ogni } \alpha \in I \right\}$$

- ▶ $\mathbb{P}_G(\mathcal{C})$: partizione meno fine per cui ogni insieme di $\mathcal{C}$ si può ottenere come unione di suoi insiemi
- ▶ $\mathbb{P}_1$ è più fine di $\mathbb{P}_2$ se ogni insieme di $\mathbb{P}_2$ è unione di insiemi di $\mathbb{P}_1$

- Caso in cui si riesce a descrivere la σ -algebra generata

▶ Se $\mathbb{P} = (A_n)_{n \geq 1}$ è una partizione discreta, allora $(\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\})$

$$\sigma(\mathbb{P}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \mathbb{N}_+ \right\}$$

▶ Se $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$ insieme finito, riesce

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathbb{P}_G(\mathcal{C}))$$

- ESERCIZIO. Descrivere $\sigma(\{A, B\})$ con (i) A, B “generici” (ii) $A \subset B$ (iii) A, B incompatibili

- ESERCIZIO. Modello binomiale: il prezzo di un titolo, in ogni periodo, può salire o scendere di $u\%$, $d\%$; descrivere
 - ▶ uno spazio di probabilità adatto a rappresentare il movimento del prezzo su due periodi (tre date 0, 1, 2)
 - ▶ le partizioni e le corrispondenti σ -algebre per chi osserva il prezzo per uno o due periodi
 - ▶ la partizione e σ -algebra di chi osserva il prezzo al tempo due

σ -Algebra

- σ -Algebra di Borel in $\mathbb{R}$

- ▶ su $\Omega = \mathbb{R}$, si considera la σ -algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ dove

$$\mathcal{C} = \{\text{intervalli di } \mathbb{R}\}$$

- ▶ $\mathcal{B}$ contiene ogni insieme ottenibile dagli intervalli tramite unioni, intersezioni (numerabili), complementazioni, ...
 - ▶ ogni insieme di interesse pratico è in $\mathcal{B}$, tuttavia $\mathcal{B} \subsetneq 2^{\mathbb{R}}$
 - ▶ insiemi in $\mathcal{B}$: **boreliani**

σ -Algebra

- Riesce $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_i) \ i = 1, \dots, 5$ con

- ▶ $\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

- ▶ $\mathcal{C}_2 = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$

- ▶ $\mathcal{C}_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- ▶ $\mathcal{C}_4 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- ▶ $\mathcal{C}_5 = \{\text{insiemi aperti di } \mathbb{R}\}$

- Altre scelte di insiemi generatori sono possibili

σ -Algebra

- σ -Algebra di Borel in $\mathbb{R}^n$, indicata con $\mathcal{B}^n$

▶ $\mathcal{B}^n \equiv \mathcal{B}^{\otimes n} \equiv \mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}$ cioè

$$\mathcal{B}^n = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{B}\})$$

- ▶ si può mostrare che $\mathcal{B}^n$ è generata da **iper-rettangoli (limitati o illimitati)**

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^n &= \sigma(\{(-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n] \mid a_i \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\})\end{aligned}$$

- ▶ ogni insieme di interesse pratico è in $\mathcal{B}^n$, tuttavia $\mathcal{B}^n \subsetneq 2^{\mathbb{R}^n}$
- ▶ insiemi in $\mathcal{B}^n$: **boreliani**

Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $A, B \in \mathcal{F}$
 - ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A, B incompatibili
 - ▶ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 - ▶ [monotonia] se $A \subset B$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

e quindi $P(A) \leq P(B)$

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$
 - ▶ [finita additività] se $A_1, \dots, A_n$ sono a due a due disgiunti

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

- ▶ [formula di inclusione-esclusione]

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ & \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ successione di eventi
 - ▶ (A_n) è **monotona non decrescente** se $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni n ; si pone $\lim_n A_n = \cup_n A_n$ e si scrive $A_n \uparrow A$
 - ▶ (A_n) è **monotona non crescente** se $A_n \supset A_{n+1}$ per ogni n ; si pone $\lim_n A_n = \cap_n A_n$ e si scrive $A_n \downarrow A$
 - ▶ [**monotonia/continuità dal basso/alto**] se (A_n) è monotona

$$P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n)$$

- ▶ [**subadditività**]

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

Proprietà della Probabilità

- Spazio di probabilità **discreto**: (e.g. p. 22)
 - ▶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ (finito o numerabile)
 - ▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega$
 - ▶ ogni prob. P su questo spazio può essere data assegnando $p_1, p_2, \dots$ con

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \text{ per ogni } i \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

e ponendo, per $A \in \mathcal{F}$,

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$$

- ESEMPIO. Su $\Omega = \mathbb{N}$, $p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ con $\lambda > 0$; su $\Omega = \mathbb{N}_+$,
 $p_i = \frac{1}{2^i}$

Proprietà della Probabilità

- Equiprobabilità su uno spazio finito:

- ▶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

- ▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- ▶ $p_i = \frac{1}{n}$ per ogni i , così riesce per $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#A}{n} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

dove $\#A =$ numerosità di A

- Schema tipico di giochi in condizioni di simmetria: lancio di dadi, monete, estrazioni di carte, roulette, estrazioni da urne, ...

Proprietà della Probabilità

- ESERCIZIO. Lancio di due dadi
 - ▶ descrivere lo spazio di probabilità
 - ▶ calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ dove A = “la somma dei dadi è 7”, B = “il massimo dei dadi è 5”
- ESERCIZIO. Lancio di n monete
 - ▶ descrivere lo spazio di probabilità
 - ▶ calcolare le probabilità di E_i = “esce testa al lancio i ”, A_i = “esce testa per la prima volta al lancio i ”, B = “escono teste e croci in ugual numero”, C_i = “escono esattamente i teste”