Corso di Statistica
Verifica d'ipotesi

Domenico De Stefano

a.a. 2023/2024

Indice

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Partecipiamo al seguente gioco d'azzardo?

- Mario lancia una moneta
  - se esce testa vinco 1€;
  - se esce croce perdo 1€

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito	
1	Croce	

Ho perso, pazienza, continuo

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito		
1	Croce		Ho perso, pazienza, continuo
2	Croce		Ho perso di nuovo, continuo

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito	
1	Croce	
2	Croce	
3	Croce	

Ho perso, pazienza, continuo
Ho perso di nuovo, continuo
E tre, prima o poi la fortuna gira

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito		
1	Croce		Ho perso, pazienza, continuo
2	Croce		Ho perso di nuovo, continuo
3	Croce		E tre, prima o poi la fortuna gira
4	Croce		Insisto

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito	
1	Croce	
2	Croce	
3	Croce	
4	Croce	
5	Croce	

Ho perso, pazienza, continuo
Ho perso di nuovo, continuo
E tre, prima o poi la fortuna gira
Insisto
Insisto

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito		
1	Croce		Ho perso, pazienza, continuo
2	Croce		Ho perso di nuovo, continuo
3	Croce		E tre, prima o poi la fortuna gira
4	Croce		Insisto
5	Croce		Insisto
⋮	⋮		

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito		
1	Croce		Ho perso, pazienza, continuo
2	Croce		Ho perso di nuovo, continuo
3	Croce		E tre, prima o poi la fortuna gira
4	Croce		Insisto
5	Croce		Insisto
⋮	⋮		
10	Croce		Mah!?!

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito		
1	Croce		Ho perso, pazienza, continuo
2	Croce		Ho perso di nuovo, continuo
3	Croce		E tre, prima o poi la fortuna gira
4	Croce		Insisto
5	Croce		Insisto
⋮	⋮		
10	Croce		Mah!?!
⋮	⋮		

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito		
1	Croce		Ho perso, pazienza, continuo
2	Croce		Ho perso di nuovo, continuo
3	Croce		E tre, prima o poi la fortuna gira
4	Croce		Insisto
5	Croce		Insisto
⋮	⋮		
10	Croce		Mah!?!
⋮	⋮		
15	Croce		Continuo?

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito	Probabilità	
1	Croce		Ho perso, pazienza, continuo
2	Croce		Ho perso di nuovo, continuo
3	Croce		E tre, prima o poi la fortuna gira
4	Croce		Insisto
5	Croce		Insisto
⋮	⋮		
10	Croce		Mah!?!
⋮	⋮		
15	Croce		Continuo?

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

Lancio	Esito	Probabilità	
1	Croce	0.5	Ho perso, pazienza, continuo
2	Croce	0.25	Ho perso di nuovo, continuo
3	Croce	0.125	E tre, prima o poi la fortuna gira
4	Croce	0.062	Insisto
5	Croce	0.031	Insisto
⋮	⋮	⋮	
10	Croce	0.001	Mah!?!
⋮	⋮	⋮	
15	Croce	0.0000305	Continuo?

Logica della verifica d'ipotesi: facciamo un gioco

- Inizialmente partecipo al gioco perché, ritenendo che la moneta sia equilibrata, il gioco è equo.
- Ai primi giri, non ho ragione di pensare altrimenti, perché l'esito a me sfavorevole non è strano.
- Man mano che si va avanti e che continuo a perdere, la faccenda comincia a puzzare.
- Quello che accade è un po' troppo improbabile se la moneta è equilibrata.
- A un certo punto non credo più che la moneta sia equilibrata.
- Sono partito con un'ipotesi 'la moneta è equa', osservando un po' di esperimenti ad un certo punto rifiuto quell'ipotesi.

Generalità

- Nei test d'ipotesi la logica del ragionamento è diversa da quella degli intervalli di confidenza;
- d'altra parte, la "tecnica" è simile e infatti le formule sono analoghe.

Generalità: i.c. e v.i.

- Negli i.c. si selezionano acuni valori – un intervallo di valori – più verosimili per il parametro.

- Nella v.i. si confrontano – si mettono in discussione – alcuni specifici valori o gruppi di valori.

Generalità: i.c. e v.i.

- Negli i.c. si selezionano acuni valori – un intervallo di valori – più verosimili per il parametro.
    - cerco le risposte più attendibili (verosimili) alla domanda "Quanto vale il parametro?"
- Nella v.i. si confrontano – si mettono in discussione – alcuni specifici valori o gruppi di valori.

Generalità: i.c. e v.i.

- Negli i.c. si selezionano acuni valori – un intervallo di valori – più verosimili per il parametro.
  - cerco le risposte più attendibili (verosimili) alla domanda "Quanto vale il parametro?"
- Nella v.i. si confrontano – si mettono in discussione – alcuni specifici valori o gruppi di valori.
  - cerco la risposta alla domanda "È attendibile che il parametro valga TOT" dove TOT è un valore o insieme di valori con un particolare significato (sostanziale, cioè derivante dal problema che si sta studiando, non dai dati);
  - "il parametro valga TOT" è la mia ipotesi nulla indicata di solito con H_0;
  - la conclusione di un test è "accetto l'ipotesi nulla" oppure "rifiuto l'ipotesi nulla"

Operativamente...

come funziona un test di verifica d'ipotesi?

1. Ogni test si basa su determinate assunzioni di partenza. Quella fondamentale è che il campione sia casuale! (e spesso di deve anche assumere che la variabile di interesse nella popolazione abbia distribuzione normale)
2. Si formulano le ipotesi circa un fenomeno (tipicamente una variabile qualitativa o quantitativa). Le ipotesi riguarderanno un valore ipotizzato del parametro (media di un certa variabile nella popolazione, proporzione di una data modalità di una variabile qualitativa nella popolazione, ecc.). Ci basta specificare due ipotesi: ipotesi nulla H_0 e ipotesi alternativa H_1
3. ora servono i dati (relativi al fenomeno indagato) su cui "testare" l'ipotesi. E qui interviene il solito campione di n individui estratti casualmente dalla popolazione
4. Su tali dati si calcola un certa quantità detta test statistico (o statistica test). Questo valore esprime la distanza in termini di deviazioni standard della stima dal parametro che si avrebbe nel caso in cui H_0 fosse vera (maggiore è la distanza tanto più non dobbiamo "credere" ad H_0, ossia tanto più siamo leggittimati a rifiutarla!)
5. prendere la decisione se rifiutare o no H_0. Questa consiste nel valutare, in termini di probabilità le evidenze contro H_0 che ci forniscono i dati (il nostro campione)

Indice

Esempio: cambiamento medio del peso per ragazze anoressiche

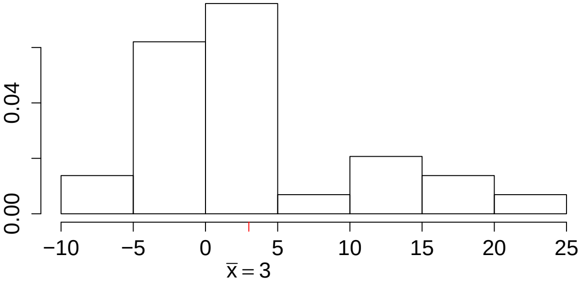
- In uno studio sperimentale si sono sottoposte 29 ragazze anoressiche a un trattamento detto "cognitivo comportamentale";
- si sono rilevati il peso prima del trattamento e il peso dopo;
- le differenze di peso osservate sono 1.7, 0.7, -0.1, -0.7, -3.5, 14.9, 3.5, 17.1, -7.6, 1.6, 11.7, 6.1, 1.1, -4, 20.9, -9.1, 2.1, 1.4, -0.3, -3.7, -1.4, -0.8, 2.4, 12.6, 1.9, 3.9, 0.1, 15.4, -0.7;
- (Agresti-finlay, esempio 5.5 e 6.4)
- Se il trattamento funziona, le pazienti dovrebbero mediamente aumentare di peso (semplificando un po')
- ha senso verificare dunque l'ipotesi "mediamente, il peso è uguale prima e dopo il trattamento", che corrisponde nella sostanza a "il trattamento non ha avuto effetto".

Esempio: cambiamento medio del peso per ragazze anoressiche, in termini statistici

Traduciamo in termini statistici

- abbiamo un campione di 29 ragazze;
- interessa verificare l'attendibilità di
  - "il trattamento non ha avuto effetto";
  - "mediamente, il peso è uguale prima e dopo il trattamento";
  - $H_0 : \mu = 0$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu > 0$.
- sulla base dei dati, è attendibile $H_0 : \mu = 0$?
- **NB**: il valore parametro (nel nostro caso μ) secondo l'ipotesi nulla (cioè quando H_0 è vera) si indica con μ_0 oppure con $\mu|H_0$ (in quest'ultimo caso leggasi, valore del parametro dato H_0 vera)
- Per semplificare supponiamo nota la varianza nella popolazione e pari a $\sigma^2 = 53.41$ (deviazione standard $\sigma = \sqrt{53.41} = 7.31$).

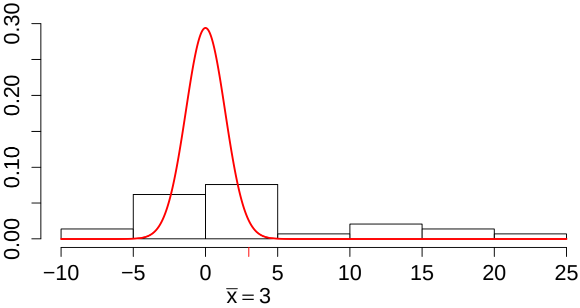
I dati e l'ipotesi



Se l'ipotesi di inefficacia è vera, la distribuzione campionaria della media è

$$N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

I dati e l'ipotesi

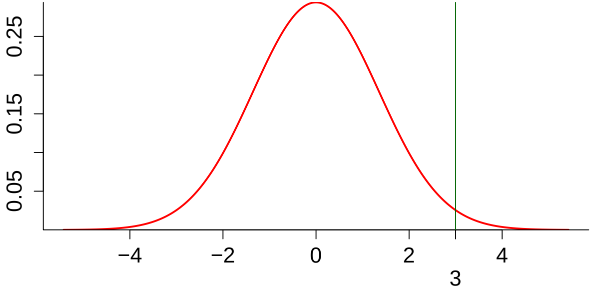


Calcoliamoci $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{53.41}{29} = 1.842$ (pertanto l'errore standard sarà: $\sqrt{1.842} = 1.357$) ottenendo la seguente distribuzione di riferimento:

$$N\left(0, 1.357^2\right)$$

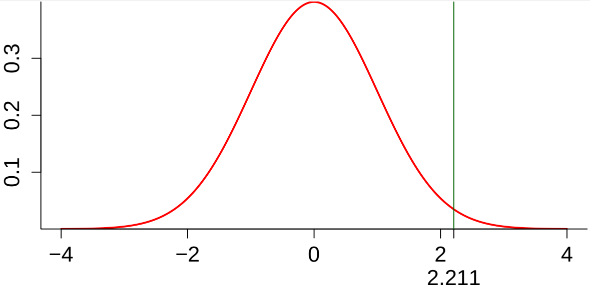
in rosso nella figura

I dati e l'ipotesi



- Se è vera l'ipotesi nulla, la stima ottenuta dai dati nel campione $\bar{x} = 3$ (fate i calcoli!) proviene dalla distribuzione $N\left(\mu_0 = 0, \frac{\sigma^2}{n} = 1.357^2\right)$.
- La questione che ci si pone è: quanto probabile è osservare una media campionaria distante dall'ipotesi almeno quanto 3 se l'ipotesi nulla è vera? o, in altri termini qual è la probabilità che $P(\bar{x} \geq 3)|H_0$ (sapendo che deve essere valutata su una normale)?

I dati e l'ipotesi

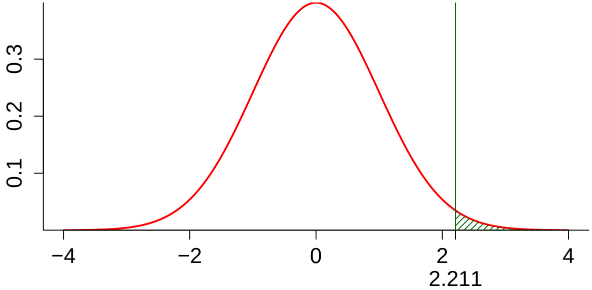


- Conviene ragionare con la normale standard (dove la standardizzazione sarà fatta usando la media ipotizzata in H_0, ossia $\mu_0 = 0$ e l'errore standard $\sigma/\sqrt{n}$ calcolato prima)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu|H_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 0}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.211$$

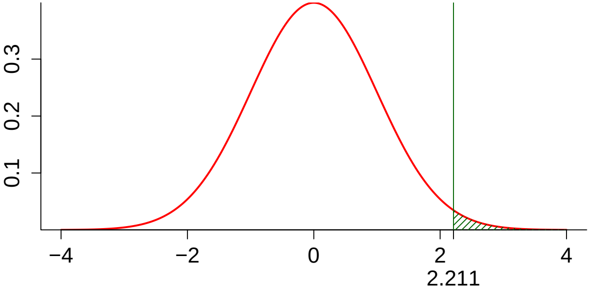
- Ora se è vera l'ipotesi H_0, questo valore proviene da una distribuzione $N(0,1)$.

I dati e l'ipotesi



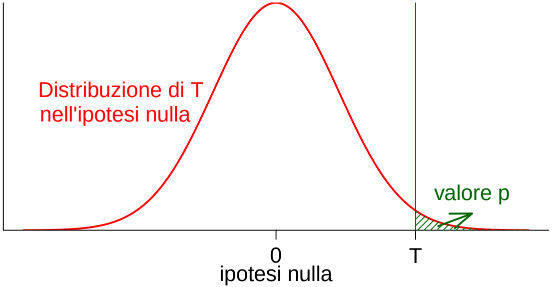
- La questione che ci si pone è quanto probabile è osservare un T distante da 0 almeno quanto 2.211 se l'ipotesi è vera?
- Cosa vuol dire "distante dall'ipotesi"?
- Dipende da qual è l'ipotesi alternativa (H_1) che abbiamo in mente. (C'è sempre.)
- Qui l'alternativa è che il trattamento sia efficace.

I dati e l'ipotesi



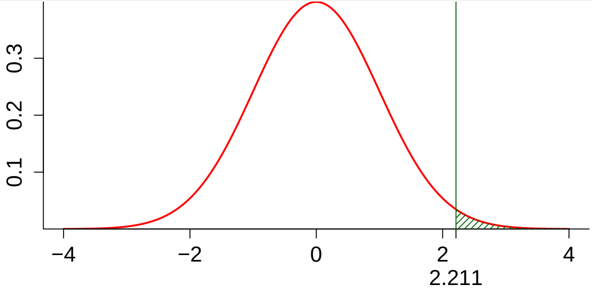
- La questione che ci si pone è quanto probabile è osservare un T distante da 0 almeno quanto 2.211 se l'ipotesi è vera?
- Qui l'alternativa è che il trattamento sia efficace.
- Cioè la media è positiva $H_1 : \mu > 0$ (le ragazze aumentano di peso in media).
- T più estrema significa quindi più grande di quella osservata: la probabilità rilevante è quella in figura ed è chiamata valore p.

I dati e l'ipotesi



- La questione che ci si pone è quanto probabile è osservare un T distante da 0 almeno quanto 2.211 se l'ipotesi è vera?
- Qui l'alternativa è che il trattamento sia efficace.
- Cioè la media è positiva $H_1 : \mu > 0$ (le ragazze aumentano di peso in media).
- T più estrema significa quindi più grande di quella osservata: la probabilità rilevante è quella in figura ed è chiamata valore p.

I dati e l'ipotesi



- La questione che ci si pone è quanto probabile è osservare un T distante da 0 almeno quanto 2.211 se l'ipotesi è vera?
- Se la media è 0 (ipotesi nulla vera!), la probabilità di osservare un T uguale o superiore (almeno quanto) a quello osservato, $T = 2.211$ (t_{oss}), è

$$P(T > t_{oss}) = P(T > 2.211) = 1 - \phi(2.211) = 0.0135$$

PS: in questo caso sto usando le tavole delle slides. Ricordate che le

Cosa si conclude? I

- Il valore p è una misura di quanto il campione si discosta dall'ipotesi nulla.
- In genere vogliamo una conclusione 'semplice', ipotesi nulla sì, ipotesi nulla no.
- Diremo che si accetta o rifiuta l'ipotesi nulla, rispettivamente.
- **IMPORTANTE**: Più è basso il valore p, più saremo inclini a 'rifiutare l'ipotesi nulla'.
- Quand'è che il valore p permette di rifiutare l'ipotesi?
- L'uso è prefissare un limite, tipicamente il 10, 5 o l'1% e rifiutare se il valore p è al di sotto, si dirà allora che si rifiuta l'ipotesi nulla al livello di significatività del 10, 5 o 1%
- Diamo conto dell'uso di prefissare il livello di significatività in quanto ancora rilevante, si ritiene però, oggi, preferibile fornire il risultato soltanto in termini del valore p.

Cosa si conclude? II

- L'uso è prefissare un limite, tipicamente il 10, 5 o l'1% e rifiutare se il valore *p* è al di sotto, si dirà allora che si rifiuta l'ipotesi nulla al livello di significatività α del 10, 5 o 1%
- Nel caso del trattamento per l'anoressia il valore *p* è 0.0135 e quindi
  - si **rifiuta** l'ipotesi nulla al livello di significatività del α =10%= 0.1;
  - si **rifiuta** l'ipotesi nulla al livello di significatività del α =5%= 0.05;
  - si **accetta** l'ipotesi nulla al livello significatività del α =1%= 0.01;
- se rifiutiamo l'ipotesi ad un certo livello di significatività commettiamo un errore: quello di rifiutare un'ipotesi nulla che, in effetti, era vera. Tale errore è proprio uguale al livello di significatività e si chiama: **Errore del I tipo** e si ha che $P(\text{Errore del I tipo}) = \alpha$
- Quindi, ad esempio, se l'ipotesi nulla viene respinta al livello di significatività 5%, allora abbiamo il 5% di probabilità di respingere un'ipotesi nulla che invece era vera

Cosa si conclude? III

- Ovviamante anche quando accettiamo H_0 potremmo commettere un **errore**: quello di accettare H_0 quando questa invece è falsa. Questo errore si chiama si chiama: **Errore del II tipo** (non ci occuperemo però del calcolo della probabilità di commetterlo)

I due tipi di errore: schema di sintesi

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	No Errore $(1-\alpha)$	Errore del II tipo $1-\beta$
rifiuto H_0	Errore del I tipo α	No Errore β

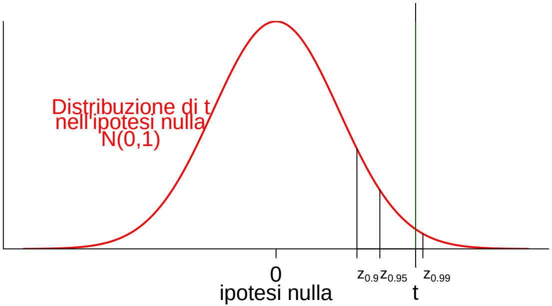
- Legenda: in rosso i possibili risultati della verifica delle ipotesi, in nero le probabilità di tali risultati
- Accettare e rifiutare sono le decisione che si prendono alla luce dei risultati forniti dai dati in nostro possesso (il campione)
- Gli stati di natura dell'ipotesi nulla possono essere "H_0 vera" oppure "H_0 falsa"

Livello di significatività prefissato: regione critica I

Se si ragiona in termini di livello prefissato il problema si può porre in modo leggermente diverso.

- Calcoliamo
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$
- Nell'ipotesi nulla H_0, questo è distribuito secondo una $N(0,1)$ (normale standard).
- Si rifiuta l'ipotesi nulla H_0 al livello α se
$$1 - \Phi(t) < \alpha$$
cioè se t è maggiore di $z_{1-\alpha}$ (quantile $1-\alpha$ della $N(0,1)$).

Livello di significatività prefissato: regione critica II



Livello di significatività prefissato: regione critica III

- Si rifiuta l'ipotesi nulla al livello α se

$$t > z_{1-\alpha}$$

cioè

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

cioè ancora

$$\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n}$$

questa è detta regione critica o regione di rifiuto.

Generalizzazioni

Dobbiamo generalizzare in due direzioni

- Ipotesi:
    - unilaterale destra
    - unilaterale sinistra
    - bilaterale
- Parametro: le diverse possibilità sono le stesse già viste per gli i.c.
    - media;
        - σ^2 nota;
        - σ^2 non nota;
    - proporzione;

Indice

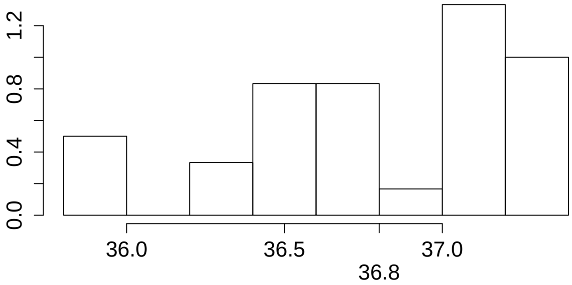
Quando si ha la febbre?

- Chi decide qual è la temperatura corporea 'normale'?
- Carl Wunderlich nel XIX secolo, basandosi su un gran numero di misure, ottenne una temperatura normale di $37.0^\circ C$
- (Era il valore medio di milioni di misure.)
- Nel 1992 viene fatto un secondo studio, volto a controllare quello di Wunderlich del quale si dubita per via
  - della precisione dei termometri dell'epoca;
  - delle modalità di misurazione.
- (Shoemaker & College (1996) *What's Normal? – Temperature, Gender, and Heart Rate*, Journal of Statistics Education v.4, n.2)
- (Mackowiak, Wasserman, Levine (1992) *A Critical Appraisal of 98.6 Degrees F, the Upper Limit of the Normal Body Temperature, and Other Legacies of Carl Reinhold August Wunderlich*, Journal of the American Medical Association, 268, 1578-1580.)

Il problema e le ipotesi

- La popolazione è quella degli 'uomini adulti' (ideale).
- Il parametro è la temperatura media (della popolazione).
- C'è un ipotesi iniziale: Wunderlich ha ragione, cioè che la media sia $37.0^{\circ} C$.
- Si raccolgono dei dati per vedere se Wunderlich ha ragione: le temperature di 30 uomini adulti.
- (N.B.: non è esattamente il campione di Shoemaker et al, si sono preservate le conclusioni.)
- Dobbiamo confrontare quel campione con l'ipotesi Wunderlich

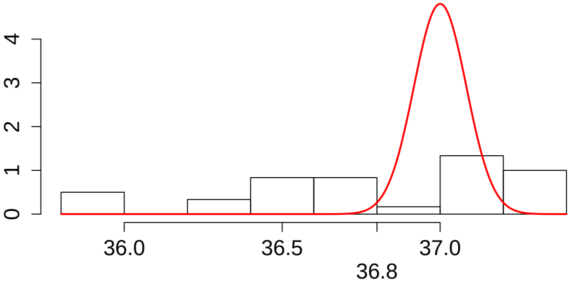
I dati



Si ha, per il campione

- media (stimata) $\bar{x} = 36.8$,
- varianza (stimata) $s^2 = 0.2057471$

I dati e l'ipotesi

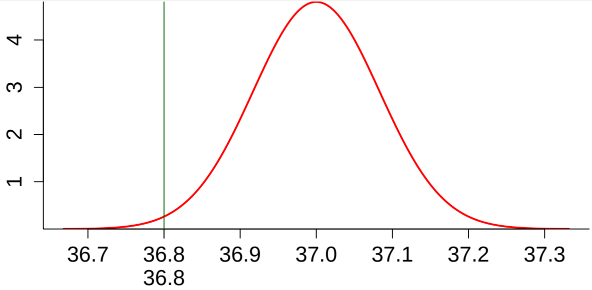


Se l'ipotesi Wunderlich è vera, la distribuzione campionaria della media è

$$N\left(37, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

σ non è noto, useremo $S = \sqrt{0.2057471}$.

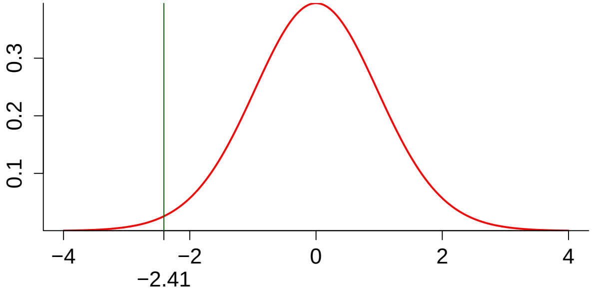
I dati e l'ipotesi



- La questione che ci si pone è quanto probabile è osservare una media campionaria distante dall'ipotesi quanto 36.8 se l'ipotesi è vera?
- Qui l'alternativa è che la media sia diversa: $\mu \neq 37$, quindi distante significa più grande o più piccola.
- Calcoliamo

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{36.8 - 37}{0.4535936/\sqrt{30}} = -2.41$$

I dati e l'ipotesi

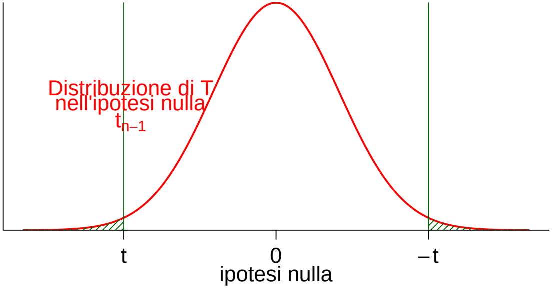


- Calcoliamo

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{36.8 - 37}{0.4535936/\sqrt{30}} = -2.41$$

- Se l'ipotesi nulla è vera, questa è una t con $n-1$ g.d.l.

Ipotesi e osservazione: valore p, test bilaterale



- Essendo il problema una verifica bilaterale, contano le due aree indicate.
- Il valore p è allora

$$2P(T > |-2.41|) = 2 \times 0.0113 = 0.0226$$

Test unilaterale destro, riassunto I

- Il campione viene da una popolazione $N(\mu, \sigma^2)$;
- l'ipotesi è $\mu = \mu_0$ contro $\mu > \mu_0$;
- definiamo

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- il valore p è

$$1 - \Phi\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi(t)$$

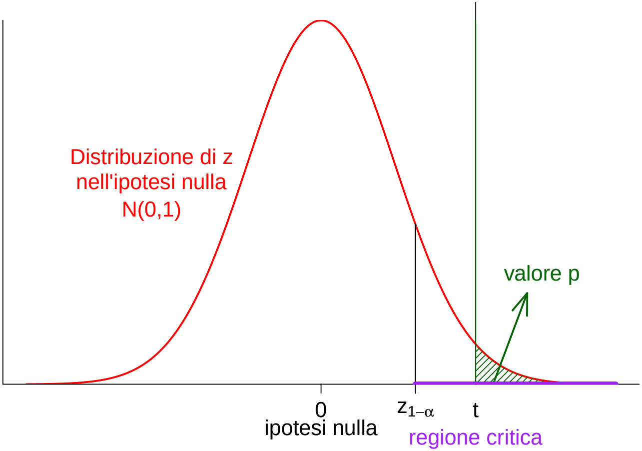
- La regione critica o di rifiuto al livello α è

$$t > z_{1-\alpha}$$

  cioè

$$\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n}$$

Test unilaterale destro, riassunto II



Test unilaterale sinistro, riassunto I

- Il campione viene da una popolazione $N(\mu, \sigma^2)$;
- l'ipotesi è $\mu = \mu_0$ contro $\mu < \mu_0$;
- definiamo

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- il valore p è

$$\Phi\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi(t)$$

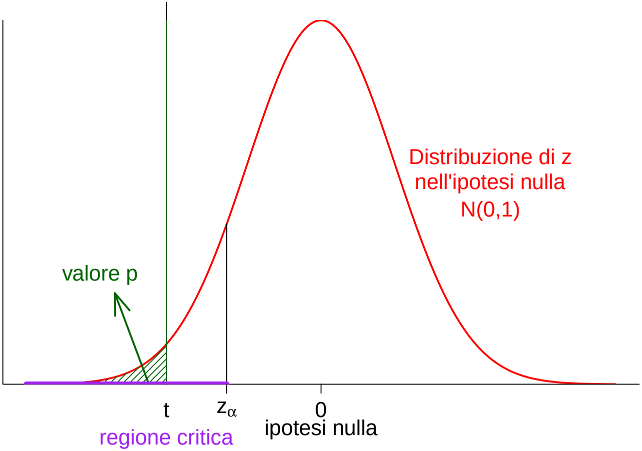
- La regione critica o di rifiuto al livello α è

$$t < z_\alpha$$

cioè

$$\bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$$

Test unilaterale sinistro, riassunto II



Test bilaterale, riassunto I

- Il campione viene da una popolazione $N(\mu, \sigma^2)$;
- l'ipotesi è $\mu = \mu_0$ contro $\mu \neq \mu_0$;
- definiamo

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- il valore p è

$$2\left(1 - \Phi\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right)\right) = 2(1 - \Phi(|t|))$$

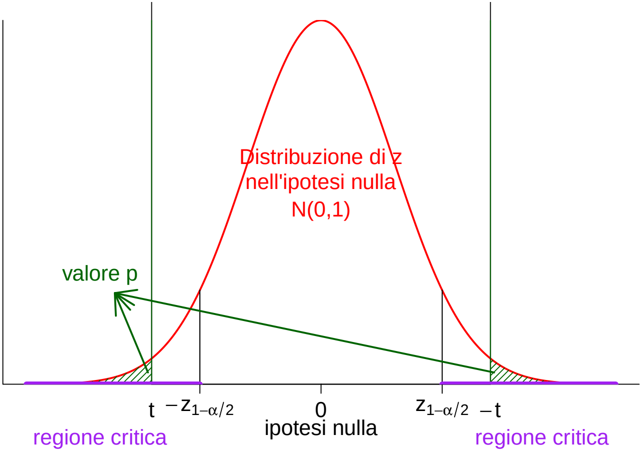
- La regione critica o di rifiuto al livello α è

$$|t| > z_{1-\alpha/2}$$

cioè

$$\bar{X} < \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \text{ oppure } \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

Test bilaterale, riassunto II



Test, interpretazione I

- La regione di rifiuto o critica ha una semplice interpretazione in termini di campionamento ripetuto.
- Osserviamo che in una verifica d'iptoesi possono succedere diverse cose:

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	✔	✗
rifiuto H_0	✗	✔

- Se la regione critica è di livello α, la probabilità che, estraendo un campione, questo cada nella regione di rifiuto quando è vera H_0 è α.
- In altre parole, la probabilità di sbagliare nel senso di 'rifiutare l'ipotesi nulla quando l'ipotesi nulla è vera' è α.

Indice

Altri parametri

- media μ;

$$H_0 : \mu = \mu_0; \quad H_1 : \mu > / < / \neq \mu_0$$

- proporzione π;

$$H_0 : \pi = \pi_0; \quad H_1 : \pi > / < / \neq \pi_0$$

N.B.: μ_0, π_0 sono noti! L'unico calcolo da fare è quello della standardizzazione!

Statistica T in generale

Se cambia il parametro, cambiano gli ingredienti della statistica T, che mantiene la stessa logica

$$T = \frac{\begin{bmatrix}\text{STIMA}\\ \text{(dal campione)}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{IPOTESI}\\ \text{(su popolazione)}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\text{s.e. stima}\\ \text{secondo}\\ \text{l'ipotesi}\end{bmatrix}} = \begin{cases} \frac{\bar{X}-\mu_0}{\text{sd}(\bar{X})} \\ \\ \frac{\hat{\pi}-\pi_0}{\text{sd}(\hat{\pi})} \\ \\ \\ \end{cases}$$

Indice

Diversi parametri e sistemi d'ipotesi

Confronto con la distribuzione standardizzata, calcolo il valore p

	Unilaterale Destro	Unilaterale Sinistro	Bilaterale
Proporzione Media (σ^2 noto)	$1 - \Phi(t)$	$\Phi(t)$	$2(1 - \Phi(\lvert t \rvert))$
Media (σ^2 non noto)	$1 - F_{t_{n-1}}(t)$	$F_{t_{n-1}}(t)$	$2(1 - F_{t_{n-1}}(\lvert t \rvert))$

Diversi parametri e sistemi d'ipotesi

Confronto con la distribuzione standardizzata, determino la regione di rifiuto

	Unilaterale		Bilaterale
	Destro	Sinistro	
Proporzione Media (σ^2 noto)	$t > z_{1-\alpha}$	$t < z_{\alpha}$	$\lvert t \rvert > z_{1-\alpha/2}$
Media (σ^2 non noto)	$t > t_{n-1,1-\alpha/2}$	$t < t_{n-1,\alpha/2}$	$\lvert t \rvert > t_{n-1,1-\alpha/2}$

Modello	Quantità di riferimento	Paragrafo	Es.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ σ^2 noto	$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$	...	...
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ σ^2 non noto	$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	...	...
$X \sim \text{Bin}(\pi, n)$	$T = \frac{\hat{\pi}-\pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}} \overset{\text{app}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$	...	...

H_0	H_1	valore p	regione critica
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$P(T > t^{\text{OSS}})$	$t^{\text{OSS}} > z_{1-\alpha}$ o $t_{\bullet,1-\alpha}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$P(T < t^{\text{OSS}})$	$t^{\text{OSS}} < z_{\alpha}$ o $t_{\bullet,\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$2P(T > \lvert t^{\text{OSS}}\rvert)$	$\lvert t^{\text{OSS}}\rvert > z_{1-\alpha/2}$ o $t_{\bullet,1-\alpha/2}$