

# Statistica - probabilità

14 maggio 2020

## Probabilità

**Esercizio 1** Un sacchetto contiene una pallina nera e una rossa. Un secondo sacchetto contiene invece una pallina bianca e una rossa.

- a. Descrivere tutti i possibili eventi che si hanno dall'esperimento di estrarre due palline. Una dal primo sacchetto e una dal secondo sacchetto (potete anche cercare di riprodurre l'esperimento fisicamente)
- b. Qual è la probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore?
- c. Qual è la probabilità che una pallina sia verde?

**Soluzione.**

[a.]

Tutti i possibili eventi (semplici) che derivano da questo esperimento casuale sono le seguenti coppie, dove il primo membro della coppia è l'esito dell'estrazione dalla prima urna, il secondo l'esito dell'estrazione dalla seconda urna:

$$\{(n, r), (n, b), (r, b), (r, r)\}$$

dove: n=nera, r=rossa, b=bianca

[b.]

Dato che gli eventi possibili sono 4 e che l'evento entrambe le palline sono dello stesso colore si verifica solo in un caso la sua probabilità è:

$$P((r,r)) = 1/4$$

[c.]

Evento impossibile, per cui con probabilità 0:  $P(\text{pallina verde}) = 0$

---

**Esercizio 2** I componenti di una macchina industriale hanno bisogno di sostituzioni regolari. La probabilità che un componente A ha bisogno di essere sostituito entro l'anno è 0.25. La probabilità che un componente B ha bisogno di essere sostituito entro l'anno è 0.15. La probabilità che entrambi debbano essere sostituiti è 0.08. Si calcoli la probabilità che entro l'anno

- a. Uno dei due componenti deve essere sostituito
- b. A oppure B ma non entrambi devono essere sostituiti
- c. Che solo A deve essere sostituito
- d. Nessuno dei due componenti deve essere sostituito

**Soluzione.**

[a.]

La probabilità descritta equivale a voler sapere la probabilità che deve essere sostituito il componente A oppure il componente B oppure entrambi (dato che non sono incompatibili e sappiamo che  $P(A \cap B) = P(A \cap B) = 0.08$ ). Ricordiamo che la particella “oppure” in probabilità vuol dire “unione” e cioè somma di probabilità:

$$P(A \cup B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.15 - 0.08 = 0.32$$

[b.]

Dato che l'oppure include anche l'intersezione, se volessimo sapere qual è la probabilità che solo uno dei due componenti deve essere sostituito ma non entrambi ossia vogliamo:

$$P(A \text{ ma non } B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.25 + 0.15 - 2(0.08) = 0.24$$

[c.]

Solo A deve essere sostituito vuol dire la probabilità di sostituire A al netto dell'intersezione (cioè di sostituire sia A che B):

$$P(A \text{ ma non } B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.25 - 0.08 = 0.17$$

[d.]

Che nessuno dei due debba essere sostituito equivale alla probabilità del complementare dell'unione:

$$P(\text{non } (A \cup B)) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.25 + 0.15 - 0.08) = 1 - 0.32 = 0.68$$

---

**Esercizio 3** Se  $P(A) = P(B) = P(B|A) = 1/2$ , allora A e B sono indipendenti?

**Soluzione.**

Dalla definizione di eventi indipendenti sappiamo che due eventi A e B sono indipendenti se:  $P(B|A) = P(B)$ , ossia il verificarsi di A non modifica la probabilità di P(B).

Nel caso in questione abbiamo  $P(B|A) = 1/2$  così come  $P(B) = 1/2$ . Pertanto la relazione di sopra è soddisfatta e i due eventi sono indipendenti.

Il fatto che A e B siano indipendenti vuol dire inoltre che  $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$

**Esercizio 4** L'anno scorso i 150 operai di una impresa friulana hanno ricevuto: nessun aumento del salario, un lieve aumento oppure un elevato aumento.

La seguente tabella di contingenza mostra la frequenze tra gli operai a tempo determinato e quelli assunti a tempo indeterminato

|                     | Nessun aumento | Lieve aumento | Elevato aumento |
|---------------------|----------------|---------------|-----------------|
| Tempo determinato   | 25             | 85            | 5               |
| Tempo indeterminato | 4              | 8             | 23              |

- Qual è la probabilità di osservare un operaio a tempo determinato?
- Qual è la probabilità di osservare un operaio a tempo determinato o un operaio che ha ricevuto nessun aumento?
- Qual è la probabilità che un operaio sia a tempo indeterminato e abbia ricevuto un elevato aumento del salario?
- Qual è la probabilità che un operaio sia a tempo indeterminato e abbia ricevuto un qualunque aumento del salario?
- Tra gli operai a tempo indeterminato, qual è la probabilità che abbiano ricevuto nessun aumento?
- Tra gli operai che hanno ricevuto nessun aumento, qual è la probabilità che essi siano a tempo determinato?

**Soluzione.**

Per calcolare le probabilità richieste calcoliamo le frequenze marginali di riga (totali di riga) e colonna (totali di colonna):

|                     | Nessun aumento | Lieve aumento | Elevato aumento |     |
|---------------------|----------------|---------------|-----------------|-----|
| Tempo determinato   | 25             | 85            | 5               | 115 |
| Tempo indeterminato | 4              | 8             | 23              | 35  |
|                     | 29             | 93            | 28              | 150 |

---

[a.]

La probabilità richiesta corrisponde alla frequenza relativa marginale della modalità “Tempo determinato”, ovvero:

$$P(\text{Tempo determinato}) = \frac{25 + 85 + 5}{150} = \frac{115}{150} = 0.767$$

[b.]

La probabilità richiesta corrisponde probabilità dell'unione tra gli eventi operaio a tempo determinato o un operaio che ha ricevuto nessun aumento. Essendo i due eventi compatibili occorrerà anche togliere la probabilità dell'intersezione che, nel caso di tabelle di contingenza, corrisponde alla frequenza relativa congiunta  $P(\text{Tempo determinato} \cap \text{Nessun aumento}) = 25/150$ . Pertanto avremo:

$$P(\text{Tempo determinato} \cup \text{Nessun aumento}) =$$

$$= P(\text{Tempo determinato}) + P(\text{Nessun aumento}) - P(\text{Tempo determinato} \cap \text{Nessun aumento}) =$$

$$= \frac{(25 + 85 + 5)}{150} + \frac{(25 + 4)}{150} - \frac{(25)}{150} = \frac{115}{150} = \frac{(115)}{150} + \frac{(29)}{150} - \frac{(25)}{150} = 0.767 + 0.193 - 0.167 = 0.793$$

[c.]

Questa è la probabilità della seguente intersezione (che in una tabella di contingenza si calcola come una semplice frequenza relativa congiunta):

$$P(\text{Tempo indeterminato} \cap \text{Elevato aumento}) = 23/150 = 0.153$$

[d.]

Questa è una somma di probabilità delle seguenti intersezioni considerando che ottenere un qualunque aumento di salario equivale ad aver ottenuto un lieve aumento oppure un elevato aumento (in una tabella di contingenza è una somma di frequenze relative congiunte):

$$P(\text{Tempo indeterminato} \cap \text{Lieve aumento}) + P(\text{Tempo indeterminato} \cap \text{Elevato aumento}) = \frac{8}{150} + \frac{23}{150} = 0.206$$

[e.]

Questa è una probabilità condizionata, considerando solo gli operai a tempo indeterminato, pertanto il totale di riferimento non è più 150 ma 35:

$$P(\text{Nessun aumento} \mid \text{tempo indeterminato}) = \frac{4}{35} = 0.114$$

[f.]

Questa è una probabilità condizionata, considerando solo coloro che non hanno avuto nessun aumento, pertanto il totale di riferimento non è più 150 ma 29:

$$P(\text{Tempo determinato} \mid \text{Nessun aumento}) = \frac{25}{29} = 0.862$$

**Esercizio 5** Il 5% delle persone ha la pressione alta. Il 75% delle persone con pressione alta beve alcolici, mentre solo il 50% delle persone con pressione normale beve alcolici. Qual è la percentuale di bevitori che ha la pressione alta?

Suggerimento: Definite i seguenti eventi

A = il soggetto ha la pressione Alta

N = il soggetto ha la pressione Normale

B = il soggetto beve alcolici

... e cercate di individuare che altro tipo di probabilità avete dalla traccia.

[Soluzione:  $P(A|B) = 0.07$ ]

**Soluzione.**

Il primo passo è definire tutte le probabilità che abbiamo come date.

La prima è una probabilità non condizionata, ovvero quella relativa all'evento A (= pressione alta), pari a  $P(A) = 0.05$ . Pertanto coloro che hanno pressione normale (evento N) è  $P(N) = 1 - P(A) = 1 - 0.05 = 0.95$ .

Inoltre sappiamo che il 75% delle persone con pressione alta beve alcolici, cioè:  $P(B|A) = 0.75$ . Pertanto tra coloro che hanno la pressione alta il restante 25% non beve alcolici, cioè:  $P(\text{non}B|A) = 0.25$ .

Infine sappiamo che solo il 50% delle persone con pressione normale beve alcolici, cioè:  $P(B|N) = 0.5$ . Per cui tra coloro che hanno la pressione normale l'altro 50% non beve alcolici, cioè:  $P(\text{non}B|N) = 0.5$ .

Ora abbiamo tutte le probabilità che servono per trovare  $P(A|B)$ . Dato che vogliamo conoscere  $P(A|B)$  partendo da  $P(B|A)$  dobbiamo utilizzare il teorema di Bayes.

Ricordate che in questo caso Bayes sarà:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Come spesso accade per Bayes, dobbiamo calcolare la probabilità non condizionata al denominatore, cioè  $P(B)$  (la probabilità non condizionata di essere bevitori). Per fare ciò dovremmo utilizzare il teorema delle probabilità totali. Che è la seguente somma nel caso del nostro  $P(B)$ :

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|N)P(N)$$

Abbiamo tutte le quantità necessarie, quindi:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|N)P(N) = 0.75 \times 0.05 + 0.5 \times 0.95 = 0.51$$

Ricordiamo che un addendo nella formula delle probabilità totali non è altro che il numeratore di Bayes.

Ora abbiamo anche tutte le quantità per calcolare  $P(A|B)$  mediante la formula di Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.75 \times 0.05}{0.51} = 0.07$$

Quindi la probabilità di avere la pressione alta dato che il soggetto è un bevitore è solo del 7%.

**Esercizio 6** Il produttore di un certo strumento di controllo sostiene che il suo strumento ha un'alta affidabilità, essendo  $P(A|B) = P(\text{non}A|\text{non}B) = 0.95$ , dove: A = “lo strumento rileva che il componente è difettoso”; B = “il componente è difettoso”.

Voi vorrete utilizzare questo strumento per rilevare i componenti difettosi della produzione giornaliera di componenti, sapendo che vengono prodotti 5% di componenti difettosi al giorno.

a. Quanto vale  $P(B|A)$ ?

[Soluzione: a)  $P(B|A) = 1/2$ ]

**Soluzione.**

[a.]

Il venditore ci dice che lo strumento è altamente affidabile in quanto nel 95% dei casi classifica un oggetto come difettoso quando realmente lo è ( $P(B|A)$ ) e classifica un oggetto come funzionante quando realmente funziona ( $P(\text{non}A|\text{non}B)$ ).

Tuttavia, noi ci dobbiamo chiedere quanto possiamo fidarci dello strumento. Ovvero quanto sbagliamo se effettivamente consideriamo difettoso un componente dato che questo è stato classificato come difettoso dallo strumento. Cioè vogliamo calcolare  $P(B|A)$ . E visto che conosciamo  $P(A|B)$ , dobbiamo usare il teorema di Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Come spesso accade abbiamo bisogno di calcolare la probabilità al denominatore,  $P(A)$ . Secondo il teorema delle probabilità totali avremo:

---


$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\text{non}B)P(\text{non}B) = 0.95 \times 0.05 + 0.05 \times 0.95 = 0.095$$

Adesso sappiamo che la probabilità non condizionata di classificare un oggetto come difettoso (indipendentemente dal fatto che questo lo sia o meno) è del 9.5%.

Possiamo usare il teorema Bayes (come al solito un addendo del teorema della probabilità totali è al numeratore della formula di Bayes):

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.95 \times 0.05}{0.095} = 0.5$$

Fidarsi dello strumento che ci viene venduto come affidabile al 95%, dato che produciamo il 5% di pezzi difettosi è come lanciare una moneta! (lo strumento è inutile).

**Esercizio 7** Prima di partire per le vacanze chiedete al vostro coinquilino di annaffiare la vostra bellissima pianta. Essendo voi esperti giardinieri, sapete che la pianta senza acqua ha il 90% delle probabilità di morire. E sapete che, anche se viene annaffiata regolarmente, ha comunque un 20% di probabilità di morire. Inoltre, conoscendo il vostro coinquilino, stimate una probabilità del 30% che egli si dimentichi di annaffiarla.

- Trovate le corrette probabilità condizionate note nel problema
- Qual è la probabilità che la vostra pianta sopravviva? (Usate il teorema delle probabilità totali!)
- Se al vostro rientro la pianta è morta, qual è la probabilità che il vostro coinquilino si sia dimenticato di annaffiarla?
- Se il vostro amico si dimentica di annaffiare la pianta qual è la probabilità che la troviate morta al vostro rientro?

[(Alcune) Soluzioni: b) 0.59; c) 0.658]

[a.]

Tutte le condizionate necessarie se indichiamo con  $M$  = la pianta è morta;  $\text{non}M$  = la pianta sopravvive;  $A$  = la pianta viene annaffiata;  $\text{non}A$  = la pianta non viene annaffiata, sono:

Probabilità di morire dato che non viene annaffiata:  $P(M|\text{non}A) = 0.9$

Pertanto, se la pianta non viene annaffiata allora la probabilità di sopravvivere sarà:  $P(\text{non}M|\text{non}A) = 1 - P(M|\text{non}A) = 1 - 0.9 = 0.1$

Probabilità di morire anche se viene annaffiata:  $P(M|A) = 0.2$

Dunque la probabilità di sopravvivere se viene annaffiata è:  $P(\text{non}M|A) = 1 - P(M|A) = 1 - 0.2 = 0.8$

[b.]

---

la probabilità non condizionata di sopravvivere è data dal teorema delle probabilità totali. Quindi stimando che il vostro coinquilino dimentichi di annaffiarla nel 30% dei casi ( $P(\text{non}A) = 0.30$ ):

$$P(\text{non}M) = P(\text{non}M|A)P(A) + P(\text{non}M|\text{non}A)P(\text{non}A) = 0.8 \times 0.70 + 0.1 \times 0.30 = 0.59$$

La vostra pianta ha buone possibilità di sopravvivere! e quindi  $P(M) = 1 - P(\text{non}M) = 1 - 0.59 = 0.41$

[c.]

Se invece al vostro rientro trovate la pianta morta potrete decidere se è stato il vostro coinquilino a dimenticarsi di annaffiarla.

Ossia vogliamo conoscere la probabilità  $P(\text{non}A|M)$ . E per questo useremo il teorema di Bayes:

$$P(\text{non}A|M) = \frac{P(M|\text{non}A)P(\text{non}A)}{P(M)}$$

Abbiamo tutte le quantità necessarie pertanto:

$$P(\text{non}A|M) = \frac{0.9 \times 0.3}{0.41} = 0.658$$

Incolpare il vostro coinquilino di non averla annaffiata sarà giusto con elevata probabilità, cioè circa il 66%.

**Esercizio 9** Un esperimento consiste nel lancio di 2 palline dentro 4 scatole, in modo tale che abbiano la stessa probabilità di cadere in una qualsiasi delle scatole. Sia  $X$  il numero di palline nella prima scatola.

Qual è la variabile casuale associata a questo esperimento? (elencare i valori possibili)

**Soluzione.**

L'esperimento avrà come esiti 0 palline in qualunque scatola, 1 pallina in qualunque scatola, 2 palline in qualunque scatola.

I valori possibili della variabile aleatoria  $X$ , numero di palline nella prima scatola, saranno pertanto: 0, 1 e 2 (anche per la prima scatola valgono gli stessi esiti).