

A.A. 2025-2026 ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA PER LE MACCHINE

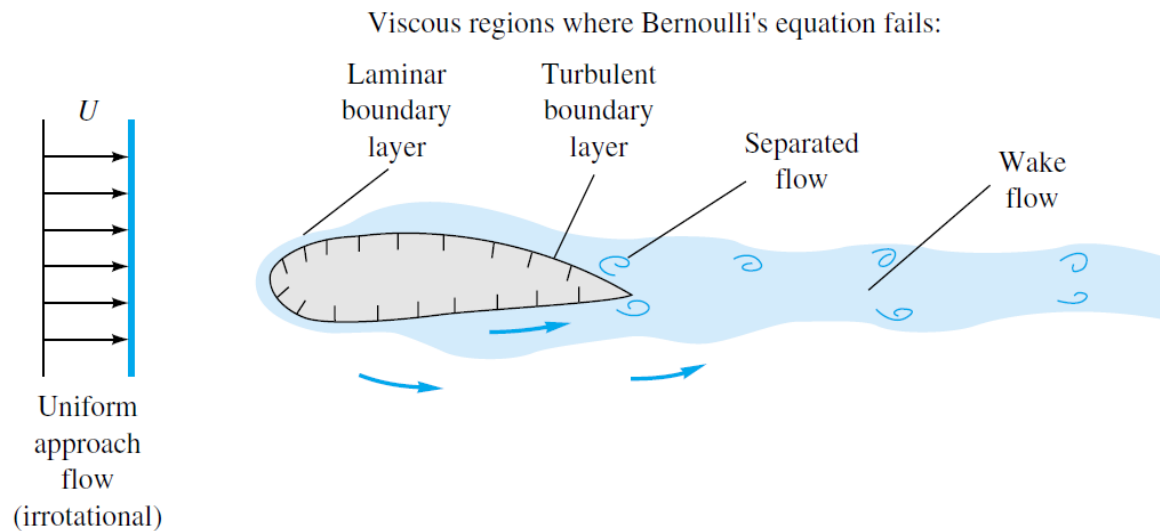
Lucia Parussini

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università degli Studi di Trieste

Via Valerio 10 - 34127 Trieste - ITALY

E-mail: lparussini@units.it

Moto a potenziale



Flusso subsonico attorno a un corpo con $U \ll a$: flusso a potenziale non viscoso e irrotazionale al di fuori dello strato limite dove sono valide le equazioni di Bernoulli e Laplace.

Moto a potenziale

Se $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = 0$ allora: $\mathbf{u} = \nabla \phi$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$$

$\Delta \phi = 0$ Equazione di LAPLACE

ϕ **FUNZIONE POTENZIALE**

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\Delta \phi(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\Delta \phi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

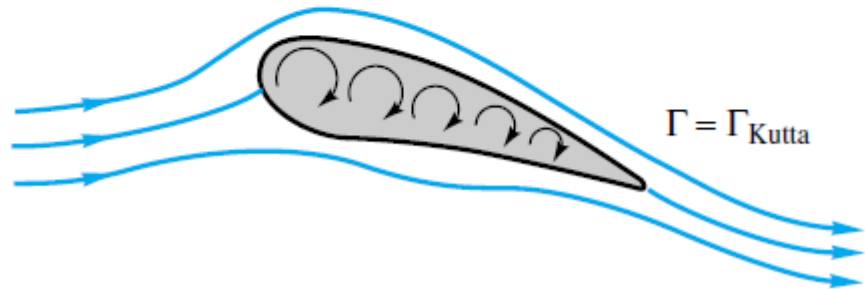
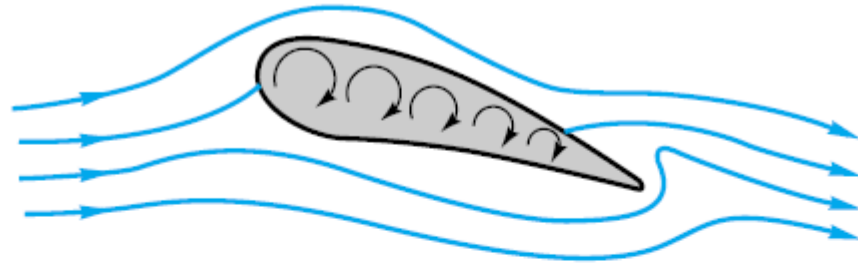
$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} &= 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta \psi = 0$ ψ **FUNZIONE DI CORRENTE**

Moto a potenziale

Condizioni al contorno

- Condizione asintotica
- Condizione a parete
- Condizione di Kutta



Moto a potenziale

Equazione di Bernoulli instazionaria

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{u} = 0}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2) + \nabla p - \rho \mathbf{g} = 0 \quad \boxed{\mathbf{u} = \nabla \phi}$$

$$\rho \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} \nabla(|\nabla \phi|^2) + \nabla p - \rho \mathbf{g} = 0 \quad \mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{e}}_z \rightarrow \nabla(\rho g z) = -\rho \mathbf{g}$$

$$\nabla \left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + p + \rho g z \right] = 0$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + p + \rho g z = \text{cost.}}$$

Moto a potenziale

Paradosso di D'Alembert

Consiste nell'osservare che in un fluido sotto le ipotesi di modello a potenziale, che implicano che il flusso sia irrotazionale (quindi a vorticità nulla), non possono svilupparsi forze aerodinamiche poiché esse si ricavano proprio per integrazione della vorticità.

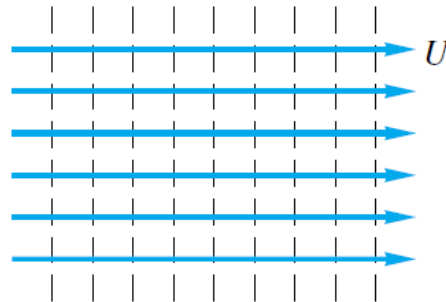
Moto a potenziale

SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Corrente uniforme

$$\phi = Ux$$

$$\psi = Uy$$



Linee solide: linee di corrente, linee
tratteggiate: linee equipotenziale.

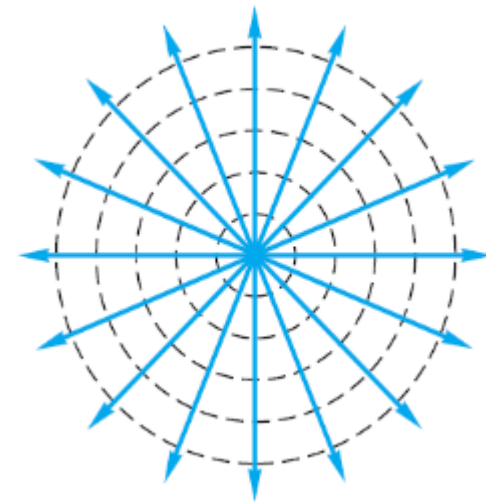
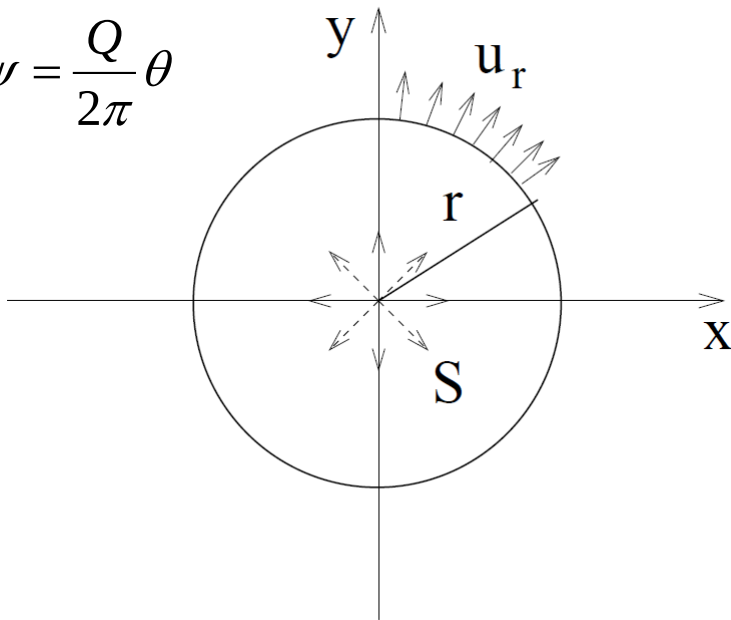
Moto a potenziale

SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Sorgente

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$$



Linee solide: linee di corrente, linee
tratteggiate: linee equipotenziale.

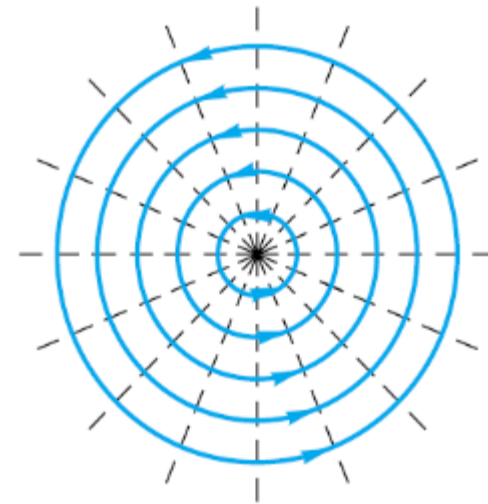
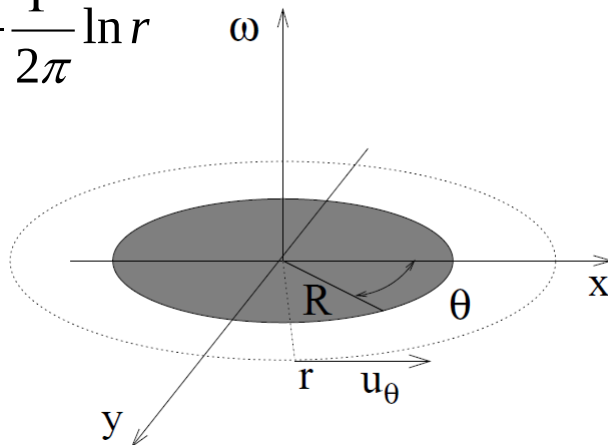
Moto a potenziale

SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Singularità di vortice libero

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

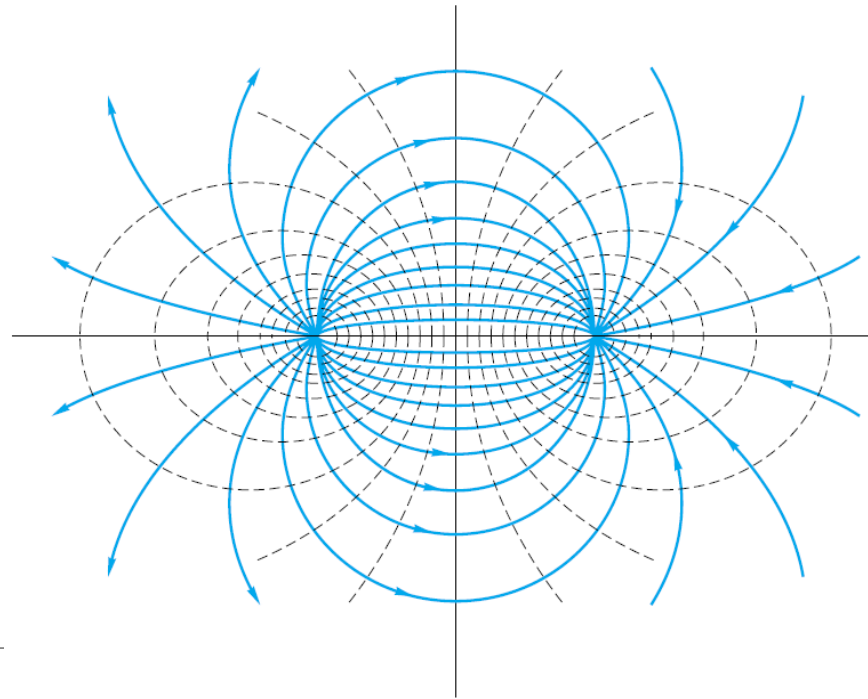
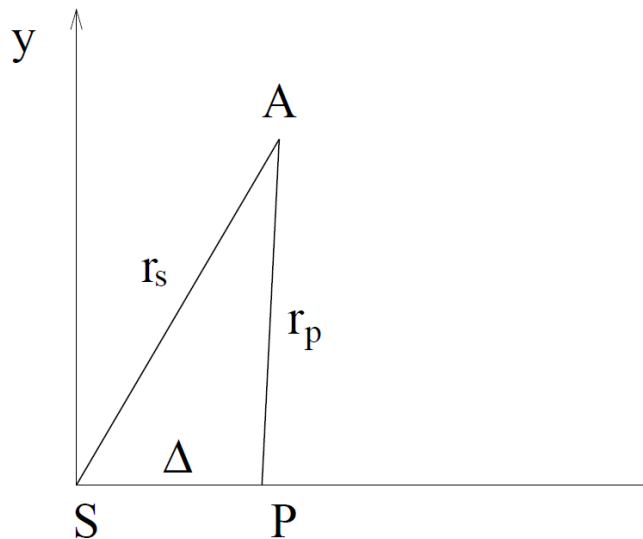


Linee solide: linee di corrente, linee tratteggiate: linee equipotenziale.

Moto a potenziale

SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Dipolo
$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_s}{r_p}$$

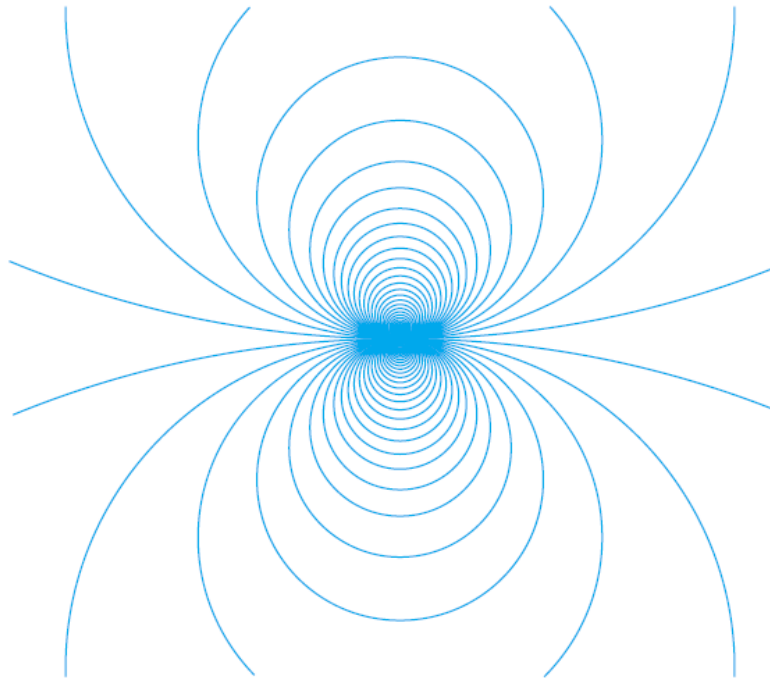


Linee solide: linee di corrente, linee
tratteggiate: linee equipotenziale.

Moto a potenziale

SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Doppietta $\phi = \frac{kx}{r^2}$



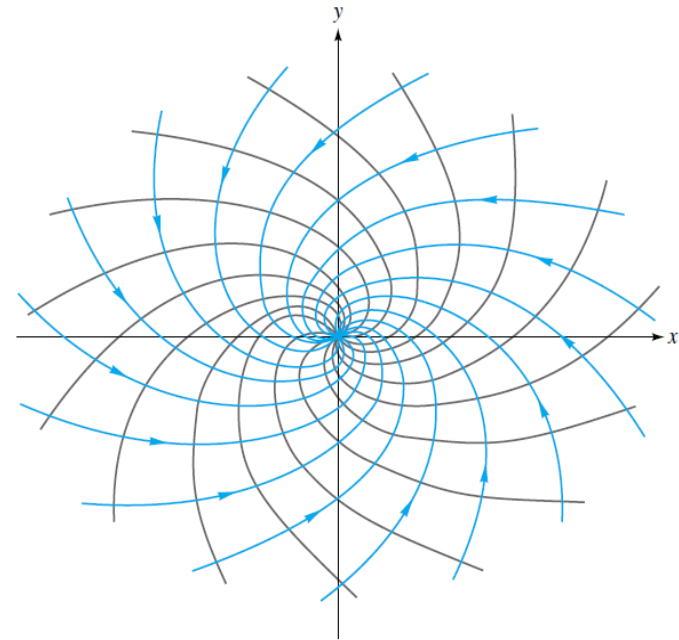
Linee solide: linee di corrente.

Moto a potenziale

SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Pozzo + vortice
$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Linee di corrente e linee equipotenziale formano due famiglie ortogonali di spirali logaritmiche. Questa è una simulazione piuttosto realistica di un tornado (dove il flusso del pozzo va nella direzione positiva dell'asse z verso l'atmosfera) o un vortice allo scarico della vasca da bagno. Al centro di un vortice reale (viscoso), dove l'equazione predice una velocità infinita, il flusso che circola in realtà è altamente rotazionale e approssima una rotazione solida con velocità *finita*.



Linee solide: linee di corrente, linee tratteggiate: linee equipotenziale.

Moto a potenziale

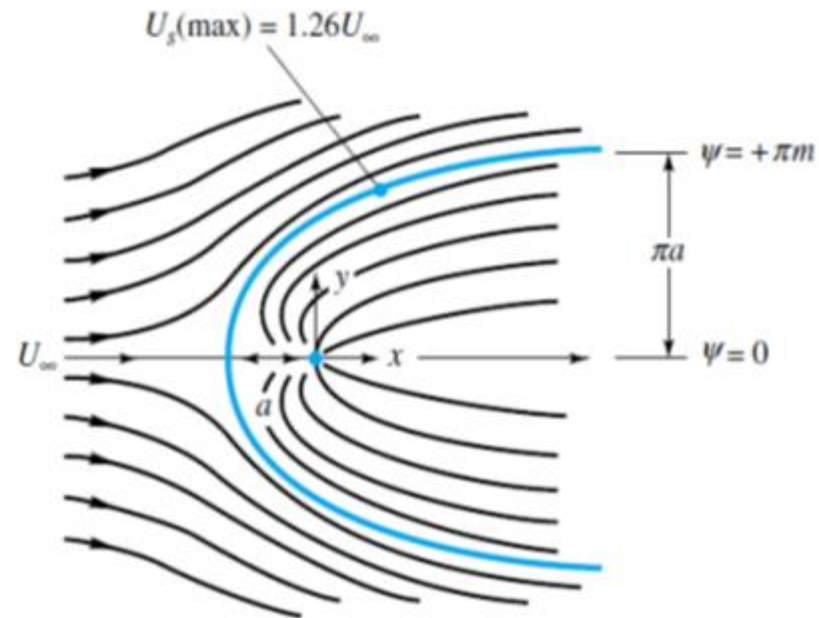
SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Semicorpo di Rankine

$$\phi = Ur \cos \theta + m \ln r$$

$$\psi = Ur \sin \theta + m \theta$$

$$r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

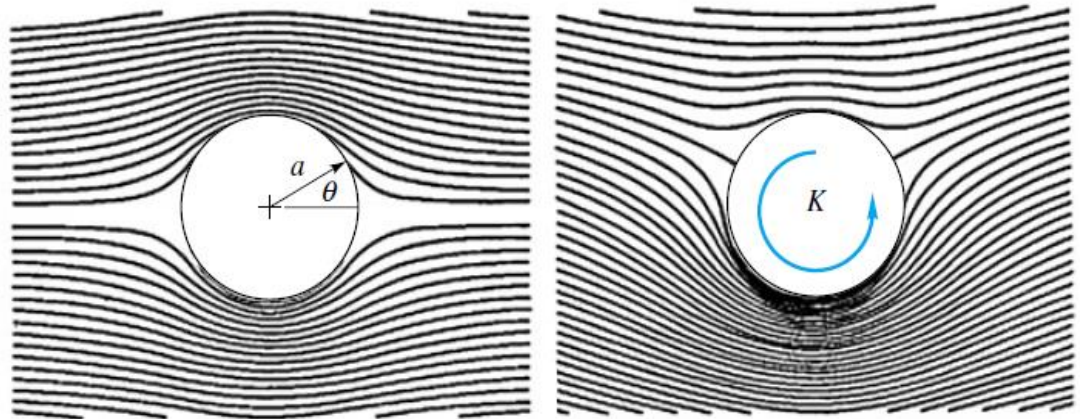
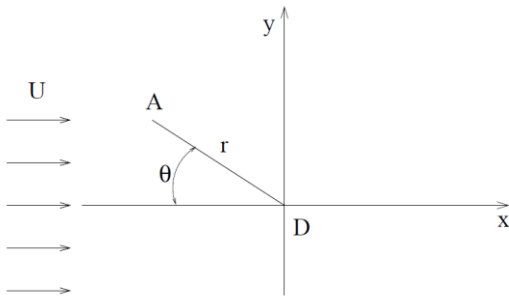


Se valutiamo la velocità lungo la superficie superiore del corpo troviamo un valore massimo a $\theta=63^\circ$ dove per il teorema di Bernoulli la pressione è minima. Dopo questo punto il flusso decelera e la pressione aumenta. In un flusso reale lo strato limite si inspessisce e può separare.

Moto a potenziale

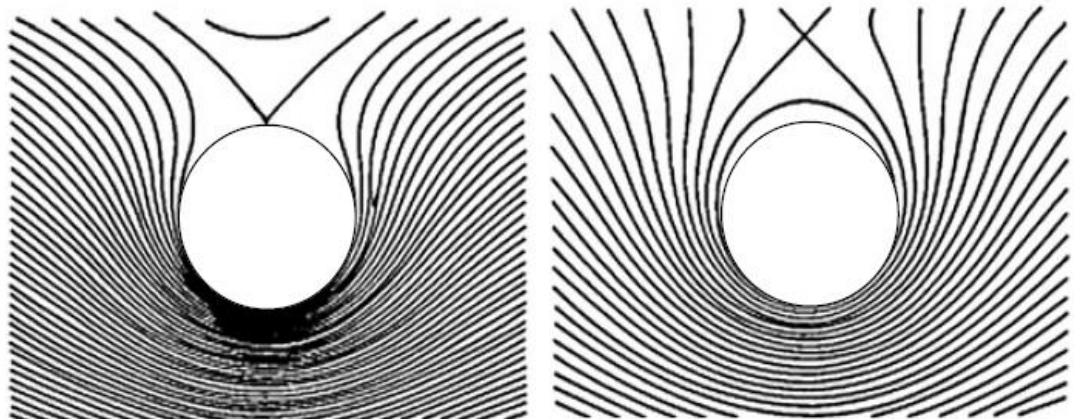
SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Flusso attorno a un cilindro



$$\phi = -\left(Ur + \frac{k}{r}\right)\cos\theta$$

$$\phi = -\left(Ur + \frac{k}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$



Moto a potenziale

SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Flusso attorno a un cilindro

Il risultato trovato sulla forza è un caso particolare del teorema di Kutta-Joukowski che dà come espressione della forza $\mathbf{F} = \rho \mathbf{U} \times \Gamma$ in cui Γ è un vettore che ha la circolazione come intensità e la stessa direzione e verso della vorticità associata.

Il risultato più importante di questo teorema è che non è possibile generare una forza (di pressione) su un corpo se non si ha una circolazione netta.

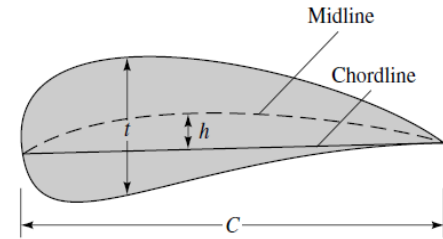
A questo punto appare chiaro l'effetto del vortice libero che generando una circolazione nel cilindro è in grado di produrre una forza, altrimenti impossibile nell'ambito della teoria potenziale.

La generazione della forza indotta dalla rotazione di un cilindro investito da una corrente è anche nota come **effetto Magnus** che ha notevoli implicazioni nella balistica (moto di proiettili e missili in rapida rotazione, lanci e tiri «ad effetto» nello sport, etc.).

Moto a potenziale

SOLUZIONI BIDIMENSIONALI

Flusso attorno a un profilo alare



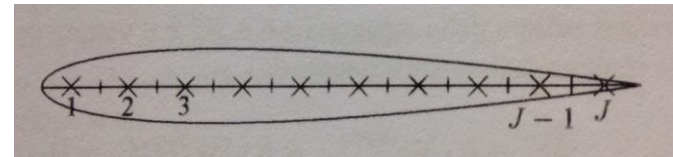
Il potenziale attorno a un profilo simmetrico posto a incidenza nulla può essere visto come la somma del potenziale della corrente uniforme indisturbata e dei potenziali di un'opportuna distribuzione di J doppiette poste all'interno del corpo:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi^{unif}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^J k_j \phi_j^{dopp}$$

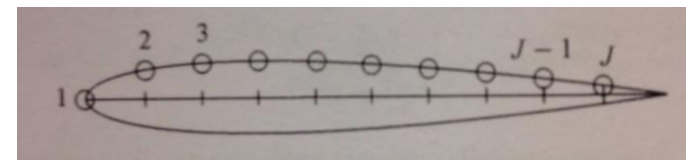
$$\phi_j^{dopp} = \phi(\mathbf{r} - \mathbf{d}_j)$$

$$\phi(\mathbf{r} - \mathbf{d}_j) = \frac{x - d_j}{(x - d_j)^2 + y^2}$$

$$\phi^{unif}(\mathbf{r}) = Ux$$



$$\phi(x, y) = Ux + \sum_{j=1}^J k_j \frac{x - d_j}{(x - d_j)^2 + y^2}$$



$$\nabla \phi|_{C_j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad j = 1, \dots, J$$

Moto a potenziale

<https://potentialflow.com/>