

A.A. 2025-2026 ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA PER LE MACCHINE

Lucia Parussini

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università degli Studi di Trieste

Via Valerio 10 - 34127 Trieste - ITALY

E-mail: lparussini@units.it

Flussi di Fanno

Questo tipo di flusso si ha ad esempio nei gasdotti, dove i gas vengono trasportati in condotti per lunghe distanze. E' di importanza pratica quando i gasdotti sono collegati a serbatoi ad alta pressione che possono essere collocati a distanza.

Nei flussi reali, si ha attrito a parete per la viscosità del fluido e quindi tensione a parete. Finora abbiamo assunto un gas termodinamicamente perfetto e non viscoso, quindi effetti viscosi non possono essere tenuti in conto con questa formulazione. Tuttavia in realtà gli effetti viscosi sono confinati nello strato limite a parete, quindi possiamo ancora assumere che il flusso sia non viscoso e considerare la forza d'attrito esercitata a parete come una forza esterna imposta.

Flussi di Fanno

Equazioni che governano il flusso

in forma integrale

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

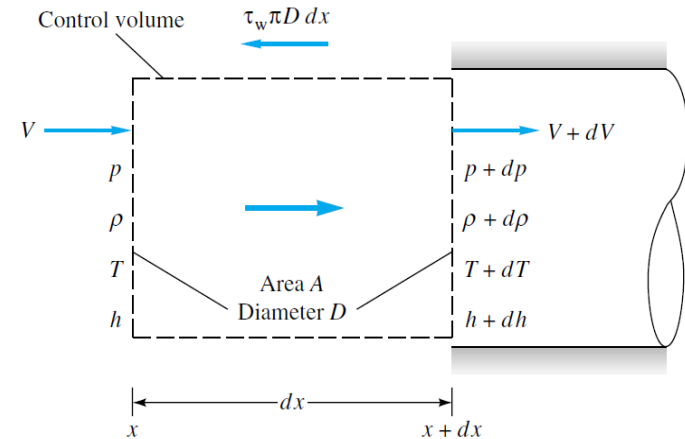
$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 + \frac{1}{D} \int_0^L \frac{\rho u^2}{2} f dx$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \ln \frac{v_2}{v_1} \quad \text{o}$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad \text{o}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$



in forma differenziale

$$\frac{du}{u} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$u du + \frac{dp}{\rho} + f \frac{u^2}{2} \frac{dx}{D} = 0$$

$$dh + u du = 0$$

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad \text{o} \quad T ds = de + p dv$$

Flussi di Fanno

Equazione di Fanno

$$\rho u = G$$

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0$$



$$u = G / \rho = Gv$$

$$h = h_0 - \frac{u^2}{2}$$

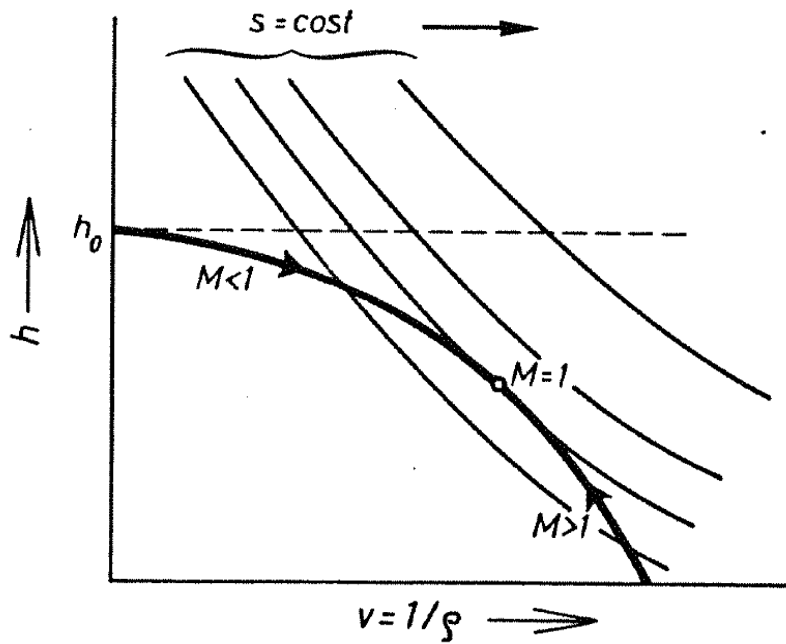


Equazione di FANNO

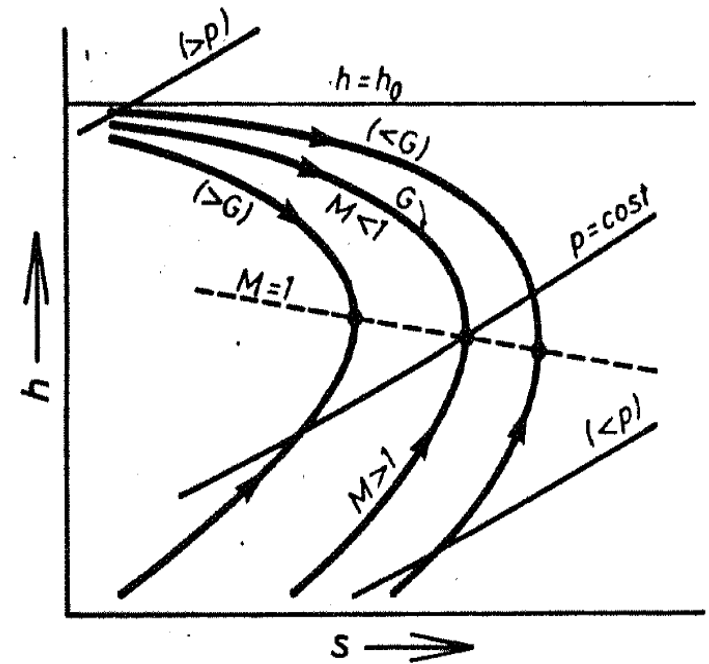
$$h = h_0 - \frac{G^2}{2} v^2$$

Flussi di Fanno

Curva di Fanno



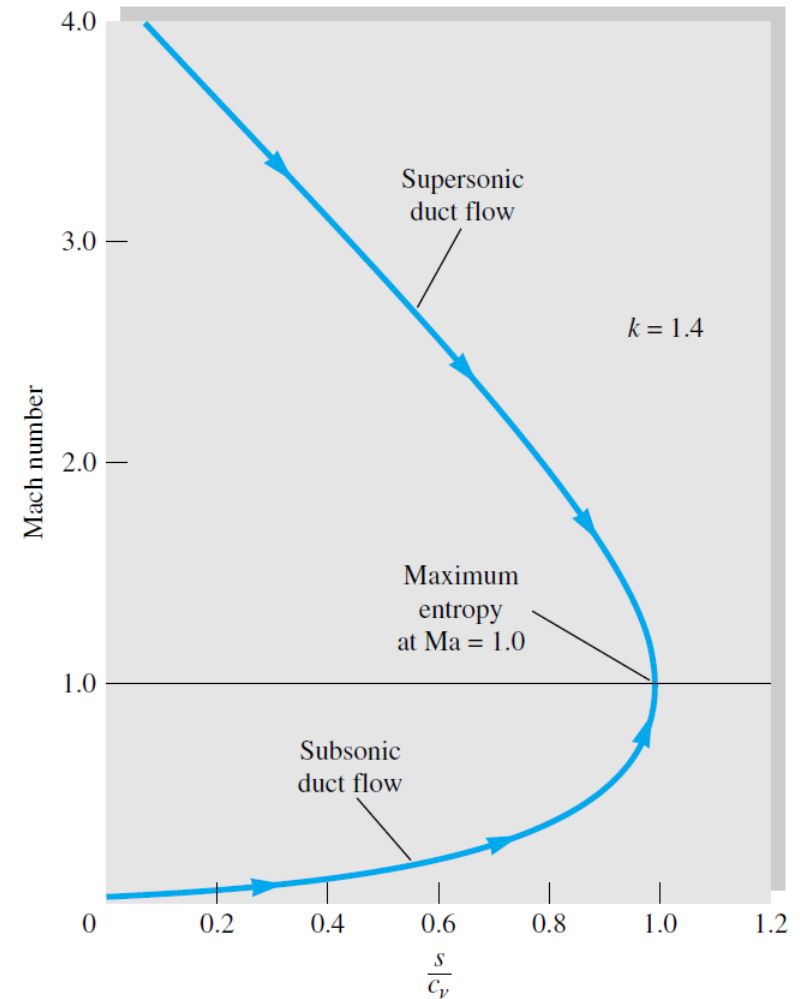
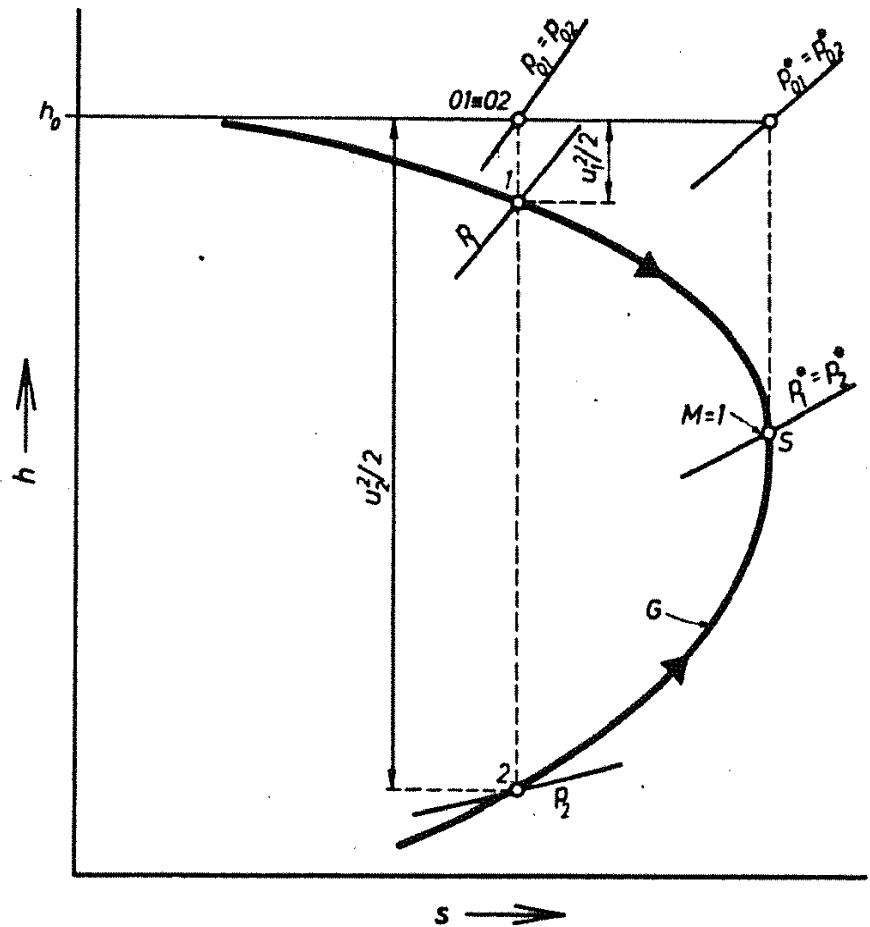
Curve di Fanno nel piano $h-v$.



Curve di Fanno nel piano $h-s$.

Flussi di Fanno

Curva di Fanno



Flussi di Fanno

Stato limite: stato di massima entropia

$$dh + u du = 0 \rightarrow dh + u^2 \frac{du}{u} = 0 \rightarrow u^2 = - \frac{dh}{\frac{du}{u}}$$

$$\frac{du}{u} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \rightarrow \frac{du}{u} = - \frac{d\rho}{\rho}$$

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \rightarrow dh = Tds + \frac{dp}{\rho}$$

$$u^2 = \frac{Tds + \frac{dp}{\rho}}{\frac{d\rho}{\rho}}$$

$$u^2 = \rho T \frac{ds}{d\rho} + \frac{dp}{d\rho}$$

Nel punto di massima entropia è $ds=0$

$$u^2 \Big|_{\max s} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s = a^2$$

Flussi di Fanno

Variazione delle variabili termodinamiche con M

dall'equazione dell'energia

$$dh + u du = 0$$

$$c_p dT + u^2 \frac{du}{u} = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{\gamma R T}$$

$$\frac{c_p}{\gamma R} \frac{dT}{T} + \frac{u^2}{\gamma R T} \frac{du}{u} = 0$$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) M^2 \frac{du}{u} = 0$$

dalla definizione di numero di Mach

$$\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{da}{a}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$$



$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dT}{T} = - \frac{(\gamma - 1) M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

Flussi di Fanno

Variazione delle variabili termodinamiche con M

dall'equazione di stato dei gas

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}$$

dall'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{du}{u}$$



$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1 + (\gamma-1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

Flussi di Fanno

Variazione delle variabili termodinamiche con M

dalla definizione di pressione di ristagno

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$$



$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

Flussi di Fanno

Variazione delle variabili termodinamiche con M

dalla conservazione della quantità di moto

$$u du + \frac{dp}{\rho} + f \frac{u^2}{2} \frac{dx}{D} = 0 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{a^2} \left(= \frac{1}{\gamma R T} = \frac{1}{\gamma p / \rho} \right)$$

$$\frac{u^2}{a^2} \frac{du}{u} + \frac{dp}{\gamma p} + f \frac{u^2}{a^2} \frac{1}{2} \frac{dx}{D} = 0$$

$$M^2 \frac{du}{u} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} + \frac{M^2}{2} f \frac{dx}{D} = 0$$

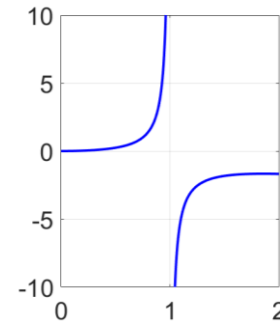


$$\boxed{\frac{dM}{M} = - \frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D}}$$

Flussi di Fanno

Variazione delle variabili termodinamiche con M

$$\frac{dM}{M} = \frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D}$$



$f dx/D > 0$ nella direzione del moto, quindi

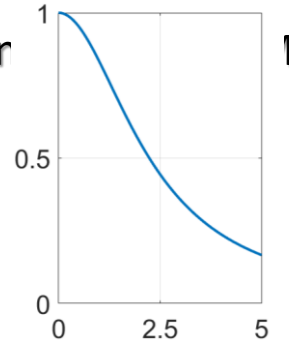
se $M < 1$, $dM > 0$

se $M > 1$, $dM < 0$

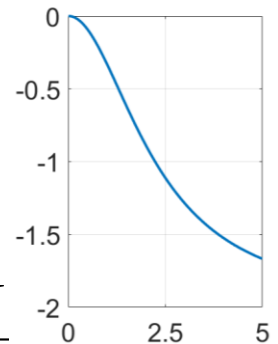
Flussi di Fanno

Variazione delle variabili termodinamiche

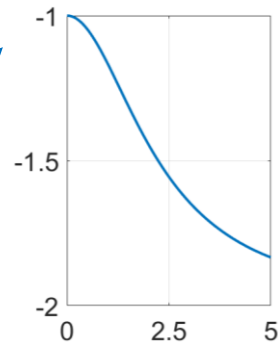
$$\frac{du}{u} = -\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$



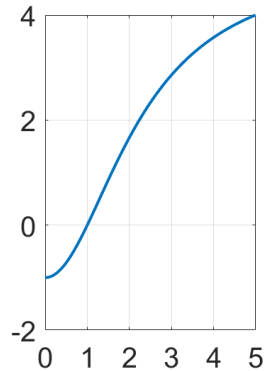
$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma-1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$



$$\frac{dp}{p} = -\frac{1 + (\gamma-1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$



$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$



$$M < 1 \quad dM > 0 \quad du > 0 \quad d\rho < 0 \quad dT < 0 \quad dp < 0 \quad dp_0 < 0$$

$$M > 1 \quad dM < 0 \quad du < 0 \quad d\rho > 0 \quad dT > 0 \quad dp > 0 \quad dp_0 < 0$$

$M < 1$	$M \uparrow$	$u \uparrow$	$\rho \downarrow$	$T \downarrow$	$p \downarrow$	$p_0 \downarrow$
$M > 1$	$M \downarrow$	$u \downarrow$	$\rho \uparrow$	$T \uparrow$	$p \uparrow$	$p_0 \downarrow$

Flussi di Fanno

Lunghezza massima

$$f \frac{dx}{D} = \frac{2(1-M^2)}{\gamma M^3 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM$$

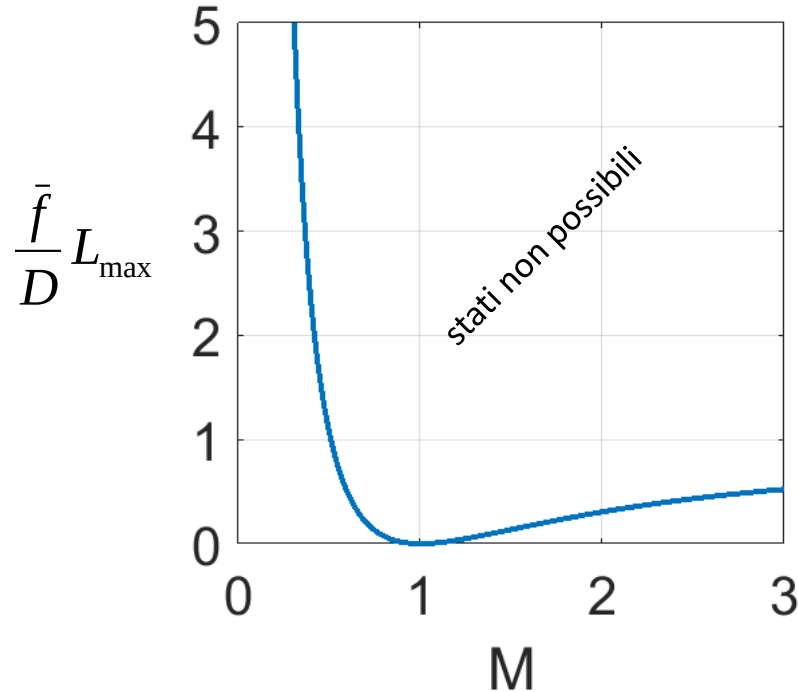
$$f \frac{dx}{D} = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{1}{M^3} - \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{M} + \frac{\frac{\gamma+1}{2} M}{M^2 + \frac{2}{\gamma-1}} \right) dM$$

$$\int_0^{L_{\max}} \frac{f}{D} dx = \int_M^1 \frac{2}{\gamma} \left(\frac{1}{M^3} - \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{M} + \frac{\frac{\gamma+1}{2} M}{M^2 + \frac{2}{\gamma-1}} \right) dM$$

$$\frac{\bar{f}}{D} L_{\max} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1-M^2}{M^2} + \frac{\gamma+1}{2} \ln \frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \quad \text{con } \bar{f} = \frac{\int_0^{L_{\max}} f dx}{L_{\max}} \text{ fattore medio d'attrito}$$

Flussi di Fanno

Parametro limite d'attrito $\frac{\bar{f}}{D} L_{\max}$



$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{f}}{D} L_{\max} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} \ln \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - 1 \right)$$

$$M_1 \rightarrow M_2$$

$$L_{12} = L_{\max}|_{M_1} - L_{\max}|_{M_2}$$

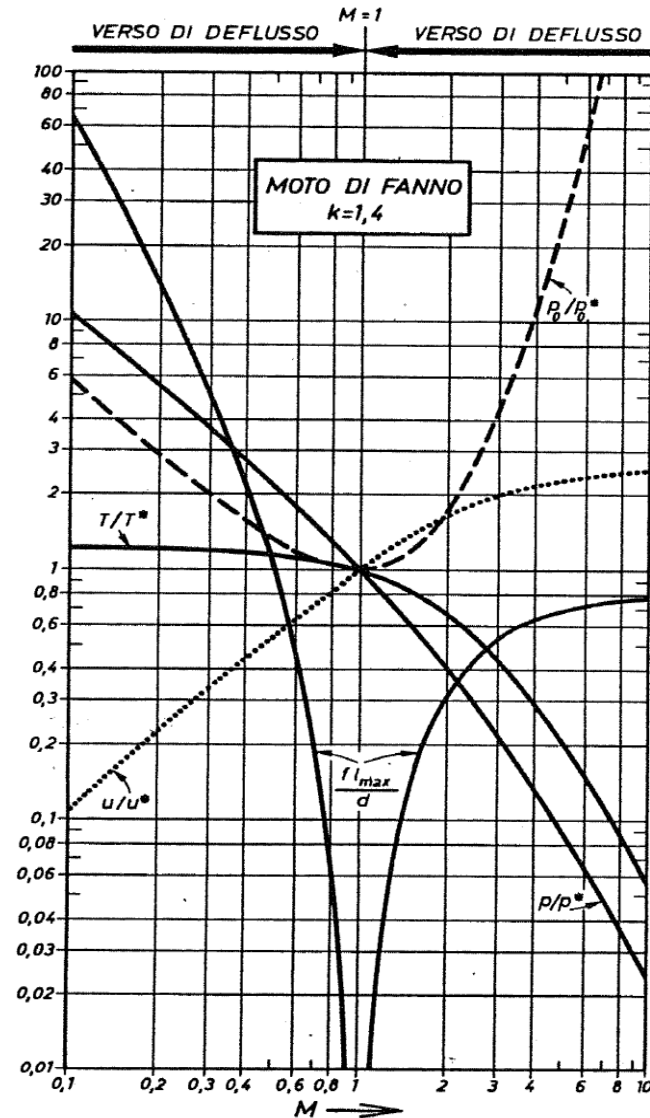
Flussi di Fanno

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{u^*}{u} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

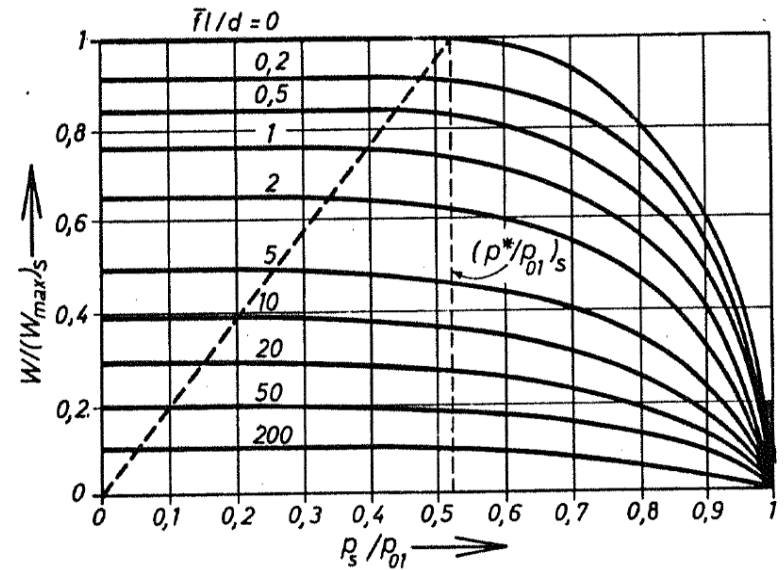
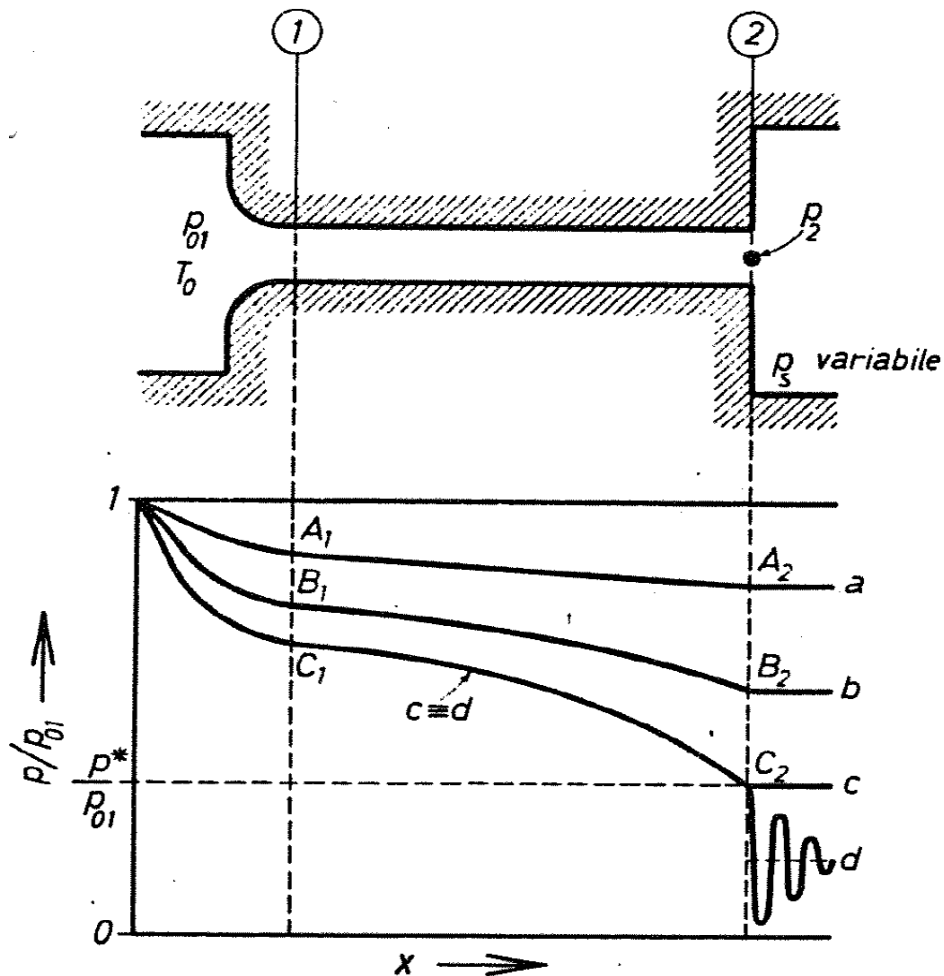
$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



Flussi di Fanno

Condizioni di ristagno iniziali fissate: condotto alimentato da un convergente



Flussi di Fanno

Condizioni di ristagno iniziali fissate: condotto alimentato da un convergente-divergente

