A.A. 2025-2026 ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA PER LE MACCHINE

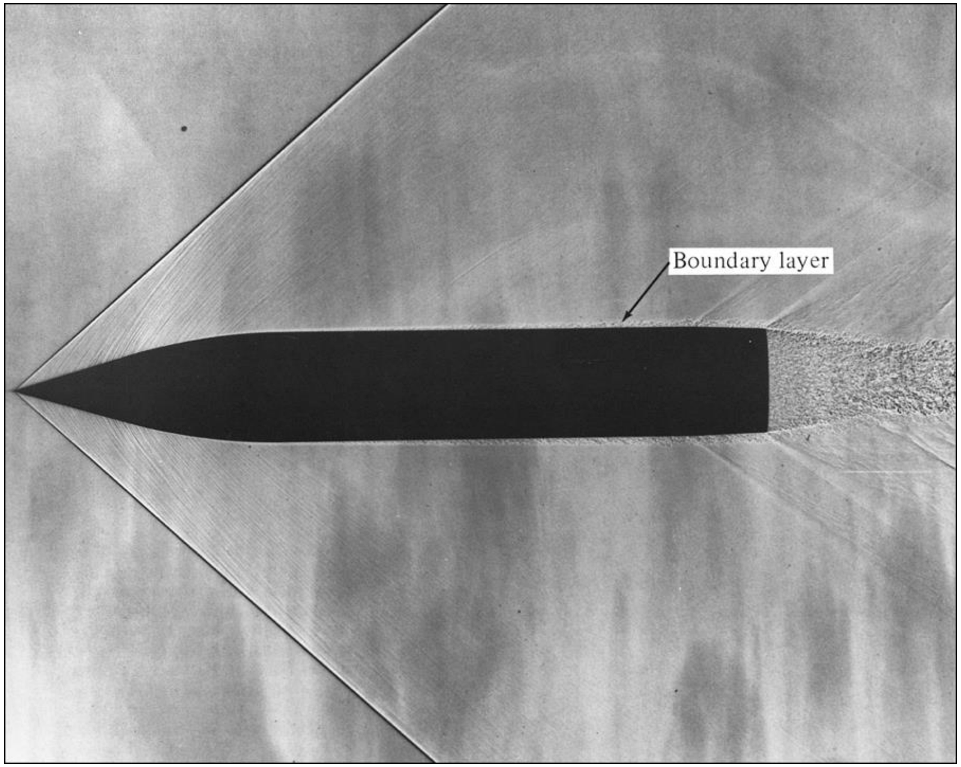
Lucia Parussini

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università degli Studi di Trieste

Via Valerio 10 - 34127 Trieste - ITALY

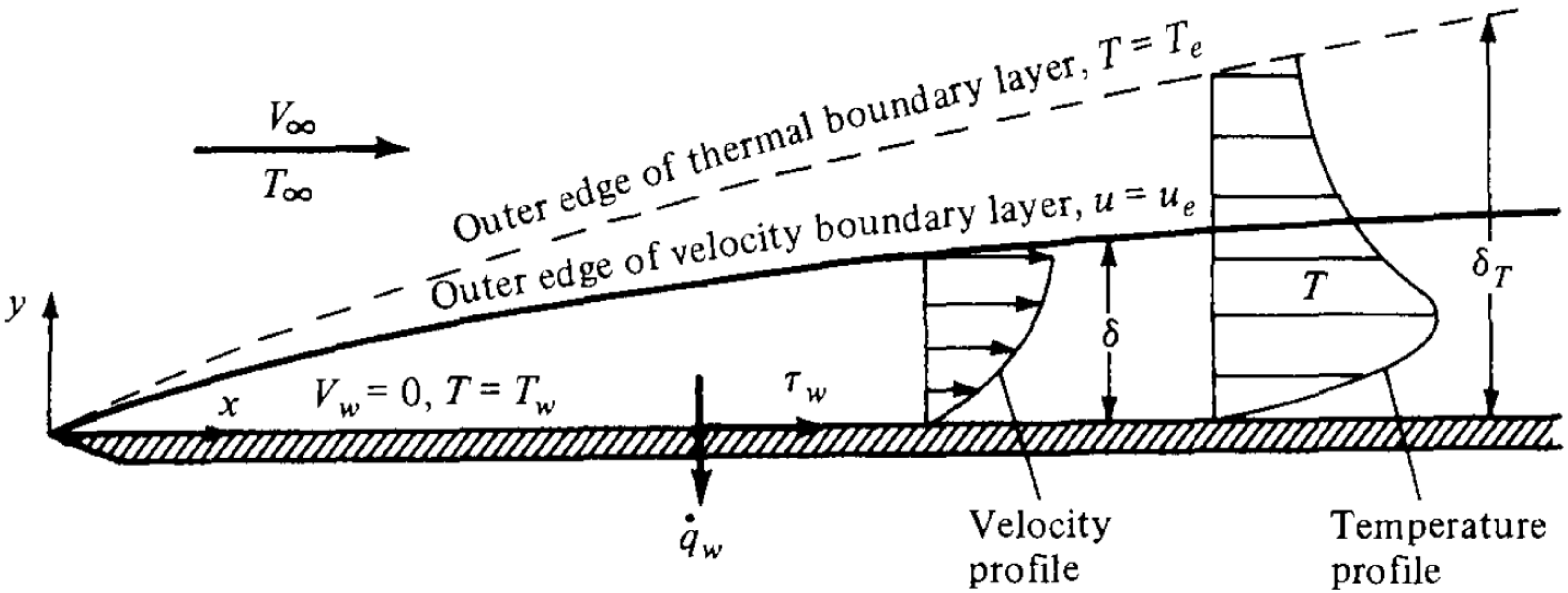
E-mail: lparussini@units.it

Strato limite comprimibile



Strato limite su un corpo aerodinamico.

Strato limite comprimibile



STRATO LIMITE CINEMATICO regione dove gli effetti viscosi sono importanti e i termini viscosi hanno lo stesso ordine di grandezza di quelli di inerzia

STRATO LIMITE TERMICO regione influenzata dalla temperatura del corpo dove i termini diffusivi hanno lo stesso ordine di grandezza di quelli convettivi

Più è alto il numero di Reynolds, più è sottile lo strato limite.

Strato limite comprimibile

Equazione che governano il flusso compressibile

- bidimensionale
- stazionario
- forze di massa trascurabili
- senza generazione di calore $\rho\dot{q} = 0$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u}\right)$$

$$\rho u \frac{\partial(c_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(c_p T)}{\partial y} - u\frac{\partial p}{\partial x} - v\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)$$

Strato limite comprimibile

Equazione che governano il flusso compressibile

- bidimensionale
- stazionario
- forze di massa trascurabili
- senza generazione di calore $\rho\dot{q} = 0$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

INERZIA VISCOSO

$$\boxed{\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)}$$

$$\boxed{\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u}\right)}$$

CONVETTIVO COMPRESSIONE CONDUTTIVO DISSIPATIVO

$$\boxed{\rho u \frac{\partial (c_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (c_p T)}{\partial y}} \boxed{- u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)} + \boxed{\mu\left(2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)}$$

Strato limite comprimibile

Equazione che governano il flusso compressibile: adimesionalizzazione

$$u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad p^* = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} \quad T^* = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty} \quad k^* = \frac{k}{k_\infty} \quad {c_p}^* = \frac{c_p}{c_{p\infty}}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L}$$

Strato limite comprimibile

Equazione che governano il flusso compressibile adimensionalizzate

Consideriamo un flusso stazionario, comprimibile, viscoso, bidimensionale trascurando le forze di massa e assumendo nessun flusso di calore generato:

$$\frac{\partial\left(\rho^* u^*\right)}{\partial x^*}+\frac{\partial\left(\rho^* v^*\right)}{\partial y^*}=0$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}\left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*}-\frac{2}{3}\mu^* \nabla\cdot\mathbf{u}^*\right)+\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)\right)\right)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*}+\rho^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\mu^*\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y^*}\left(2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}-\frac{2}{3}\mu^* \nabla\cdot\mathbf{u}^*\right)\right)$$

$$\rho^*\left(u^* \frac{\partial\left(c_p^* T^*\right)}{\partial x^*}+v^* \frac{\partial\left(c_p^* T^*\right)}{\partial y^*}\right)=Ec_\infty\left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*}+v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty \mathrm{Pr}_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}\left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right)+\frac{\partial}{\partial y^*}\left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)\right)+$$

$$\frac{Ec_\infty}{\mathrm{Re}_\infty}\mu^*\left(2\left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2+\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2\right)+\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2\right)$$

Strato limite comprimibile

Equazione che governano il flusso compressibile adimensionalizzate

$$\mathrm{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty}$$

Numero di Reynolds: rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscose

$$Ec_\infty = \frac{U_\infty^2}{c_{p_\infty} T_\infty} = (\gamma - 1) M_\infty^2$$

Numero di Eckert: relazione tra l'energia cinetica del fluido e l'entalpia

$$\mathrm{Pr}_\infty = \frac{\mu_\infty c_{p_\infty}}{k_\infty}$$

Numero di Prandtl: rapporto della diffusività cinematica rispetto alla diffusività termica per un fluido viscoso

Strato limite comprimibile

Equazioni dello strato limite $\quad \delta << L \quad \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} << 1$

$$\frac{\partial\left(\rho^* u^*\right)}{\partial x^*} + \frac{\partial\left(\rho^* v^*\right)}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{O(1)O(1)}{O(1)} + \frac{O(1)v^*}{O(\varepsilon)} = 0 \quad \rightarrow \quad v^* = O(\varepsilon)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0}$$

Strato limite comprimibile

Equazioni dello strato limite $\delta << L \quad \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} << 1$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}\left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3}\mu^* \nabla \cdot \mathbf{u}^*\right) + \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)\right)\right)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = O(1) \qquad \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = O(1) \qquad \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = O(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*}\left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3}\mu^* \nabla \cdot \mathbf{u}^*\right) = O(1) \qquad \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right) = O(1)$$

$$O(1) + O(1) = O(1) + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\left(O(1) + O\left(1/\varepsilon^2\right) + O(1)\right)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} = O\left(\varepsilon^2\right) \longrightarrow O(1) + O(1) = O(1) + O\left(\varepsilon^2\right)\left(O(1) + O\left(1/\varepsilon^2\right) + O(1)\right)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)$$

$$\boxed{\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

Strato limite comprimibile

Equazioni dello strato limite $\qquad \delta << L \quad \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} << 1$

$$\rho^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\mu^*\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y^*}\left(2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3}\mu^* \nabla \cdot \mathbf{u}^*\right)\right)$$

$$O(\varepsilon) + O(\varepsilon) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + O\left(\varepsilon^2\right)\left(O(\varepsilon) + O(1/\varepsilon) + O(1/\varepsilon)\right) \rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = O(\varepsilon)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0}$$

Strato limite comprimibile

Equazioni dello strato limite $\delta << L \quad \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} << 1 \qquad \delta_T << L \quad \varepsilon_T = \dfrac{\delta_T}{L} << 1$

$$\rho^*\left(u^*\frac{\partial\left(c_p^*T^*\right)}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial\left(c_p^*T^*\right)}{\partial y^*}\right)=Ec_\infty\left(u^*\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial p^*}{\partial y^*}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty \mathrm{Pr}_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}\left(k^*\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right)+\frac{\partial}{\partial y^*}\left(k^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)\right)+$$

$$\frac{Ec_\infty}{\mathrm{Re}_\infty}\mu^*\left(2\left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2+\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2\right)+\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2\right)$$

$$O(1)O(1)+O(\varepsilon)O(1/\varepsilon_T)=Ec_\infty\left(O(1)+O\left(\varepsilon^2\right)\right)+\frac{1}{\mathrm{Pr}_\infty}O\left(\varepsilon^2\right)\left(O(1)+O\left(1/\varepsilon_T^{\,2}\right)\right)+$$

$$Ec_\infty O\left(\varepsilon^2\right)\left(O(1)+O(1)+O\left(1/\varepsilon^2\right)+O(1)+O\left(\varepsilon^2\right)+O(1)\right)$$

$$\rho^*\left(u^*\frac{\partial\left(c_p^*T^*\right)}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial\left(c_p^*T^*\right)}{\partial y^*}\right)=Ec_\infty u^*\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty \mathrm{Pr}_\infty}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(k^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)+\frac{Ec_\infty}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\rho\left(u\frac{\partial\left(c_pT\right)}{\partial x}+v\frac{\partial\left(c_pT\right)}{\partial y}\right)=u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

Strato limite comprimibile

Equazioni dello strato limite $\quad \delta << L \quad \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} << 1 \qquad \delta_T << L \quad \varepsilon_T = \dfrac{\delta_T}{L} << 1$

$$\rho^*\left(u^*\frac{\partial\left(c_p{}^*T^*\right)}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial\left(c_p{}^*T^*\right)}{\partial y^*}\right)=Ec_\infty u^*\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty\,\mathrm{Pr}_\infty}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(k^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)+\frac{Ec_\infty}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2\right)$$

$$O(1)+O(\delta/\delta_T)=Ec_\infty O(1)+\frac{1}{\mathrm{Pr}_\infty}O\left(\delta^2/\delta_T{}^2\right)+Ec_\infty O(1)$$

Il termine di COMPRESSIONE e il termine DISSIPATIVO hanno un ordine di grandezza pari a quello del numero di Eckert.

All’interno dello strato limite termico il termine CONDUTTIVO deve avere lo stesso ordine di grandezza del termine CONVETTIVO:

$$\delta/\delta_T << 1 \quad O(1) \;\rightarrow\; \frac{1}{\mathrm{Pr}_\infty}O\left(\delta^2/\delta_T^2\right)=O(1) \;\rightarrow\; \mathrm{Pr}_\infty = O\left(\delta^2/\delta_T^2\right) \;\rightarrow\; \delta/\delta_T = O\left(\sqrt{\mathrm{Pr}_\infty}\right)$$

$$\delta/\delta_T >> 1 \quad O(\delta/\delta_T) \;\rightarrow\; \frac{1}{\mathrm{Pr}_\infty}O\left(\delta^2/\delta_T^2\right)=O(\delta/\delta_T) \;\rightarrow\; \mathrm{Pr}_\infty = O(\delta/\delta_T) \;\rightarrow\; \delta/\delta_T = O(\mathrm{Pr}_\infty)$$

$$\delta/\delta_T \cong 1 \quad O(1)=O(\delta/\delta_T) \;\rightarrow\; \frac{1}{\mathrm{Pr}_\infty}O(1)=O(1) \;\rightarrow\; \mathrm{Pr}_\infty = O(1)$$

Strato limite comprimibile

Equazioni dello strato limite $\delta << L \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} << 1 \qquad \delta_T << L \quad \varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} << 1$

$\delta / \delta_T << 1$ metalli liquidi

$\delta / \delta_T >> 1$ liquidi

$\delta / \delta_T \cong 1$ gas

$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$ con $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$

Il numero di Prandtl è il rapporto tra la diffusività cinematica ν e la diffusività termica α.

Se Pr>1 il frenamento dovuto alla parete (che corrisponde a una riduzione della quantità di moto) diffonde nel fluido più di quanto non diffonda la temperatura, se Pr<1 viceversa.

Strato limite comprimibile

Equazioni dello strato limite

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{dp_e}{dx}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial(c_pT)}{\partial x}+v\frac{\partial(c_pT)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+u\frac{dp_e}{dx}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$p=\rho RT \qquad h=c_pT$$

$$\mu=\mu(T) \qquad k=k(T)$$

$$y=0 \quad \rightarrow \quad u=0, v=0, T=T_w$$

$$y\rightarrow\infty \quad \rightarrow \quad u\rightarrow u_e, T\rightarrow T_e$$

Strato limite comprimibile

Flusso subsonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata bassa.

$$\Pr_\infty \cong 1$$

$$Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} << 1 \quad \left(Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} = \frac{(\gamma - 1) V_\infty^2}{\gamma R T_\infty} = (\gamma - 1) M_\infty^2 \right)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)$$

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial \left(c_p^* T^* \right)}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \left(c_p^* T^* \right)}{\partial y^*} \right) = Ec_\infty u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty \Pr_\infty} \frac{\partial}{\partial y^*}\left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) + \frac{Ec_\infty}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)$$

Strato limite comprimibile

Flusso subsonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata bassa.

$$\Pr_\infty \cong 1$$

$$Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} << 1 \quad \left(Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} = \frac{(\gamma - 1) V_\infty^2}{\gamma R T_\infty} = (\gamma - 1) M_\infty^2 \right)$$

$$= \frac{dp_e}{dx} = 0$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)$$

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial \left(c_p^* T^* \right)}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \left(c_p^* T^* \right)}{\partial y^*} \right) = \cancel{Ec_\infty u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*}} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty \Pr_\infty} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) + \cancel{\frac{Ec_\infty}{\mathrm{Re}_\infty} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)}$$

Strato limite comprimibile

Flusso subsonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata bassa.

$$\mathrm{Pr}_\infty \cong 1$$

$$Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} << 1 \quad \left(Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} = \frac{(\gamma-1)V_\infty^2}{\gamma R T_\infty} = (\gamma-1) M_\infty^2 \right)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial \left(c_p^* T^* \right)}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial \left(c_p^* T^* \right)}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y^*}\left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)$$

Le equazioni sono identiche (se consideriamo c_p, μ e k costanti pari al valore indisturbato).

Strato limite comprimibile

Flusso subsonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata bassa.

$$\mathrm{Pr}_\infty \cong 1$$

$$Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} << 1 \quad \left(Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} = \frac{(\gamma - 1) V_\infty^2}{\gamma R T_\infty} = (\gamma - 1) M_\infty^2 \right)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Le equazioni sono identiche (se consideriamo c_p, μ e k costanti pari al valore indisturbato).

Strato limite comprimibile

Flusso subsonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata bassa.

Definendo la temperatura adimensionale tale che

$$T^* = (T - T_w)/(T_\infty - T_w)$$

anche le condizioni al contorno sono identiche.

$$y^* = 0 \quad \rightarrow \quad u^* = 0 \quad T^* = 0$$

$$y^* = \infty \quad \rightarrow \quad u^* = 1 \quad T^* = 1$$

Quindi la soluzione T^* è identica alla soluzione u^*: <u>ANALOGIA TERMICA</u>

$$T^* = (T - T_w)/(T_\infty - T_w) \quad u^* = u/V_\infty \quad \rightarrow \quad (T - T_w)/(T_\infty - T_w) = u/V_\infty \quad \rightarrow \quad T = \frac{u}{V_\infty}(T_\infty - T_w) + T_w$$

Strato limite comprimibile

Flusso subsonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata bassa.

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \qquad q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_{y=0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{T_\infty - T_w}{V_\infty} \frac{\tau_w}{\mu}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{k}{\mu} \frac{T_w - T_\infty}{V_\infty} \tau_w}$$

Strato limite comprimibile

Flusso subsonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata bassa.

$$\tau_w = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c_f \qquad q_w = h(T_w - T_\infty)$$

c_f fattore d'attrito
per una lastra piana flusso laminare $c_f = 0.664/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$
h coefficiente di scambio termico (trasmittanza termica convettiva) *[W/(m^{2}K)]*
(aria tra 10 e 100 *W/(m^{2}K)*, acqua tra 500 e 10000 *W/(m^{2}K)*)

$$q_w = \frac{k}{\mu}\frac{T_w - T_\infty}{V_\infty}\tau_w \quad \rightarrow \quad h(T_w - T_\infty) = \frac{k}{\mu}\frac{T_w - T_\infty}{V_\infty}\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c_f \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2}\frac{k}{\mu}\rho_\infty V_\infty c_f$$

$$\frac{hx}{k} = \frac{1}{2}c_f \frac{\rho_\infty V_\infty x}{\mu} \longrightarrow \boxed{Nu_x = \frac{1}{2}c_f \mathrm{Re}_x}$$

ANALOGIA DI REYNOLDS

Strato limite comprimibile

Flusso subsonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata bassa.

$$\tau_w = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c_f \qquad q_w = h(T_w - T_\infty)$$

c_f fattore d'attrito
per una lastra piana flusso laminare $c_f = 0.664$
h coefficiente di scambio termico (trasmittanza
(aria tra 10 e 100 $W/(m^2K)$, acqua tra 500 e 100

Numero di Nusselt hL/k: esprime il rapporto tra il flusso di calore scambiato per convezione e il flusso di calore scambiato per conduzione

$$q_w = \frac{k}{\mu}\frac{T_w - T_\infty}{V_\infty}\tau_w \quad \rightarrow \quad h(T_w - T_\infty) = \frac{k}{\mu}\frac{T_w - T_\infty}{V_\infty}\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c_f \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2}\frac{k}{\mu}\rho_\infty V_\infty c_f$$

$$\frac{hx}{k} = \frac{1}{2}c_f\frac{\rho_\infty V_\infty x}{\mu} \longrightarrow \boxed{Nu_x = \frac{1}{2}c_f \operatorname{Re}_x}$$

ANALOGIA DI REYNOLDS

Strato limite comprimibile

Flusso supersonico su lastra piana

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ e temperatura T_∞ lungo una lastra piana avente temperatura uniforme T_w. Sia l'asse x parallelo alla lastra e l'asse y ortogonale alla lastra.

Supponiamo il fluido sia gas con velocità indisturbata alta.

$$\mathrm{Pr}_\infty \cong 1$$

$$Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} >> 1 \quad \left(Ec_\infty = \frac{V_\infty^2}{c_p T_\infty} = \frac{(\gamma - 1) V_\infty^2}{\gamma R T_\infty} = (\gamma - 1) M_\infty^2 \right)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \qquad \text{essendo} \quad \frac{dp_e}{dx} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial(c_p T)}{\partial x} + v \frac{\partial(c_p T)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Strato limite comprimibile

Flusso supersonico su lastra piana

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\quad /\cdot u\quad\rightarrow\quad \rho u\frac{\partial\left(u^2/2\right)}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\left(u^2/2\right)}{\partial y}=u\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\rho u\frac{\partial\left(c_pT\right)}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\left(c_pT\right)}{\partial y}+\rho u\frac{\partial\left(u^2/2\right)}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\left(u^2/2\right)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\rho u\frac{\partial}{\partial x}\left(c_pT+u^2/2\right)+\rho v\frac{\partial}{\partial y}\left(c_pT+u^2/2\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\rho u\frac{\partial\left(c_pT_0\right)}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\left(c_pT_0\right)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Per un gas caloricamente perfetto, $dh=c_pdT$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{c_p}\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{1}{c_p}\frac{\partial}{\partial y}\left(c_pT_0-\frac{u^2}{2}\right)$$

Strato limite comprimibile

Flusso supersonico su lastra piana

$$\rho u \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial}{\partial y}\left(c_p T_0 - \frac{u^2}{2} \right)\right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Si noti che:

$$\frac{k}{c_p} \frac{\partial}{\partial y}\left(c_p T_0 - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\mu k}{\mu c_p} \frac{\partial}{\partial y}\left(c_p T_0 - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\mu}{\Pr} \frac{\partial}{\partial y}\left(c_p T_0 - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\mu}{\Pr}\left(\frac{\partial (c_p T_0)}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\rho u \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\Pr} \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial y} - \frac{\mu}{\Pr} u \frac{\partial u}{\partial y} + \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\longrightarrow \quad \rho u \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\Pr} \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial y} + \left(1 - \frac{1}{\Pr} \right) \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Strato limite comprimibile

Flusso supersonico su lastra piana

Ricordiamo che: $\Pr \cong 1$, quindi

$$\rho u \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial (c_p T_0)}{\partial y} \right)$$

che è identica all'equazione di conservazione della quantità di moto nello strato limite in direzione x:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Quindi se u è soluzione dell'equazione di continuità e dell'equazione di conservazione della quantità di moto nello strato limite in direzione x, è:

$$T_0 = au + b$$

con a e b costanti determinate dalle condizioni al contorno:

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0 \quad T_0 = T = T_w$$

$$y = \infty \quad \rightarrow \quad u = V_\infty \quad T_0 = T_{0\infty} = T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2c_p}$$

$$\longrightarrow \qquad a = \frac{T_{0\infty} - T_w}{V_\infty} \qquad b = T_w$$

Strato limite comprimibile

Flusso supersonico su lastra piana

$$T_0 = au + b \quad \longrightarrow \quad T_0 = \frac{T_{0\infty} - T_w}{V_\infty} u + T_w \quad \longrightarrow \quad \boxed{T = -\frac{1}{2c_p} u^2 + \frac{T_{0\infty} - T_w}{V_\infty} u + T_w}$$

$$q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

dove $\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_{y=0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(-\frac{u}{c_p} + \frac{T_{0\infty} - T_w}{V_\infty} \right)_{y=0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{T_{0\infty} - T_w}{V_\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{q_w = \frac{k}{V_\infty} (T_w - T_{0\infty}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}}$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} > 0,$

se $T_w > T_{0\infty}$ $q_w > 0$ calore ceduto dalla parete al fluido

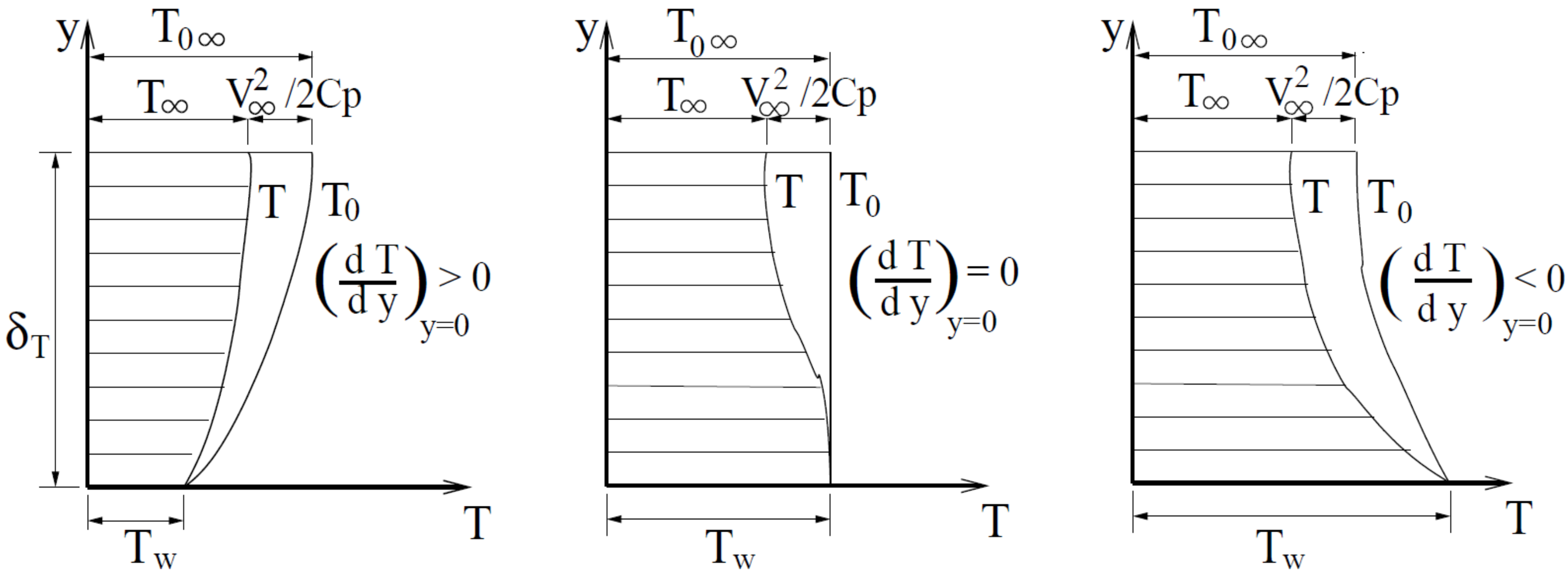
se $T_w < T_{0\infty}$ $q_w < 0$ calore ceduto dal fluido alla parete

$q_w = 0 \quad \rightarrow \quad T_w = T_{0\infty} > T_\infty$

RISCALDAMENTO AERODINAMICO

Strato limite comprimibile

Flusso supersonico su lastra piana



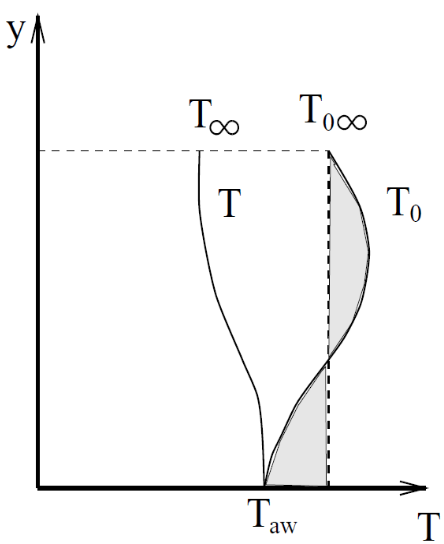
Andamenti qualitativi della temperatura e della temperatura totale all'interno dello strato limite. Solo nel caso di parete adiabatica la temperatura totale si mantiene costante all'interno dello strato limite.

Strato limite comprimibile

Flusso supersonico su lastra piana

Se $\Pr < 1$ $\quad T_{aw} = T_\infty + r\frac{V_\infty^2}{2c_p} \quad T_{aw} = T_\infty\left(1 + r\frac{\gamma - 1}{2}M_\infty^2\right) \quad < \quad T_{0\infty} = T_\infty\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_\infty^2\right)$

Nell'ipotesi di parete adiabatica il valore medio di T_0 all'interno dello strato limite deve essere uguale a $T_{0\infty}$ in quanto il fluido non cede e non riceve calore.



<u>FATTORE DI RECUPERO</u>

$$\boxed{r = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_{0\infty} - T_\infty}}$$

È il rapporto di aumento della temperatura dovuto all'attrito e quello dovuto a una compressione adiabatica.

Per la lastra piana: $\boxed{r = \sqrt{\Pr}}$

Strato limite comprimibile

Soluzione delle equazioni dello strato limite per un flusso su lastra piana

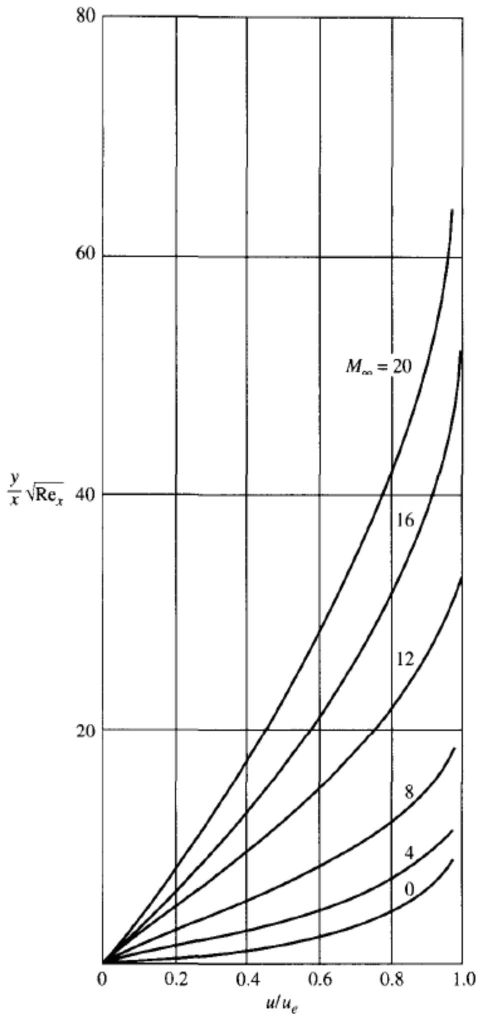
$$\eta = \frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

$$u^* = \frac{u}{V_\infty}$$

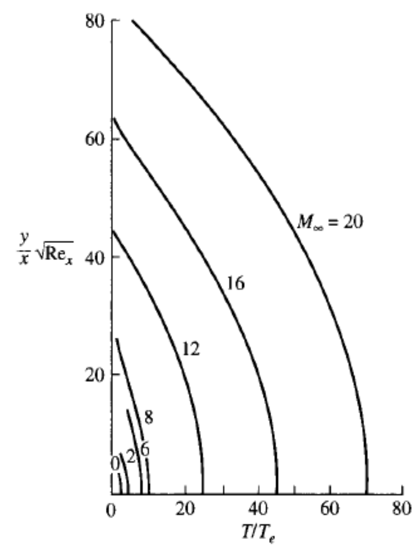
$$T^* = \frac{T}{T_\infty}$$

SOLUZIONE NUMERICA

Al crescere di M la distribuzione di velocità tende a diventare sempre più rettilinea e lo spessore dello strato limite aumenta. Ciò è dovuto alla diminuzione di densità in conseguenza dell'aumento di temperatura all'interno dello strato limite.

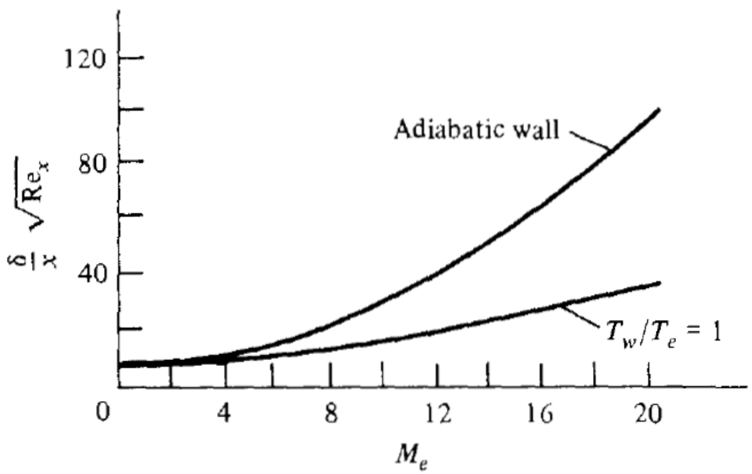


Profili di velocità e di temperatura in uno strato limite comprimibile laminare su una lastra piana isolata termicamente.



Strato limite comprimibile

Soluzione delle equazioni dello strato limite per un flusso su lastra piana



Spessore dello strato limite comprimibile laminare su una lastra piana fredda, evidenziando l'effetto del numero di Mach e della temperatura a parete. Pr=0.75

La teoria dello strato limite comprimibile turbolento non viene trattata. In effetti non esiste una teoria pura per questo argomento, che richiede gran parte di dati empirici.