A.A. 2025-2026 ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA PER LE MACCHINE

Lucia Parussini

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università degli Studi di Trieste

Via Valerio 10 - 34127 Trieste - ITALY

E-mail: lparussini@units.it

Cinematica dei fluidi

Approccio LAGRANGIANO

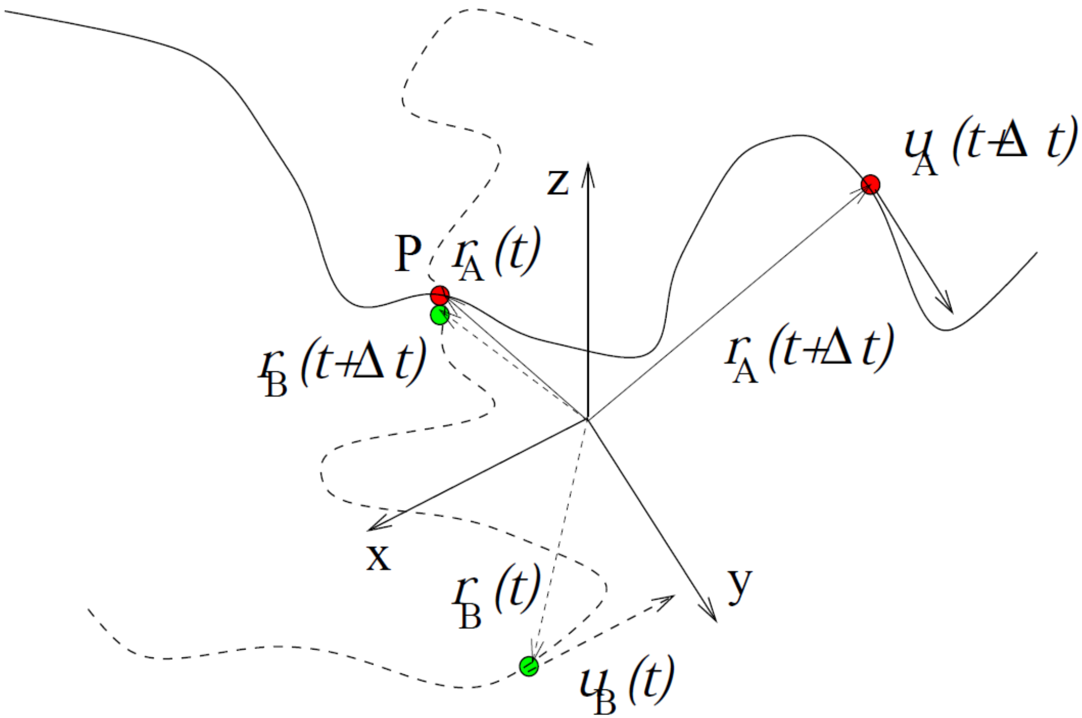
$$\varphi = \varphi(x_0, y_0, z_0, t)$$

Approccio EULERIANO

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t)$$

Cinematica dei fluidi

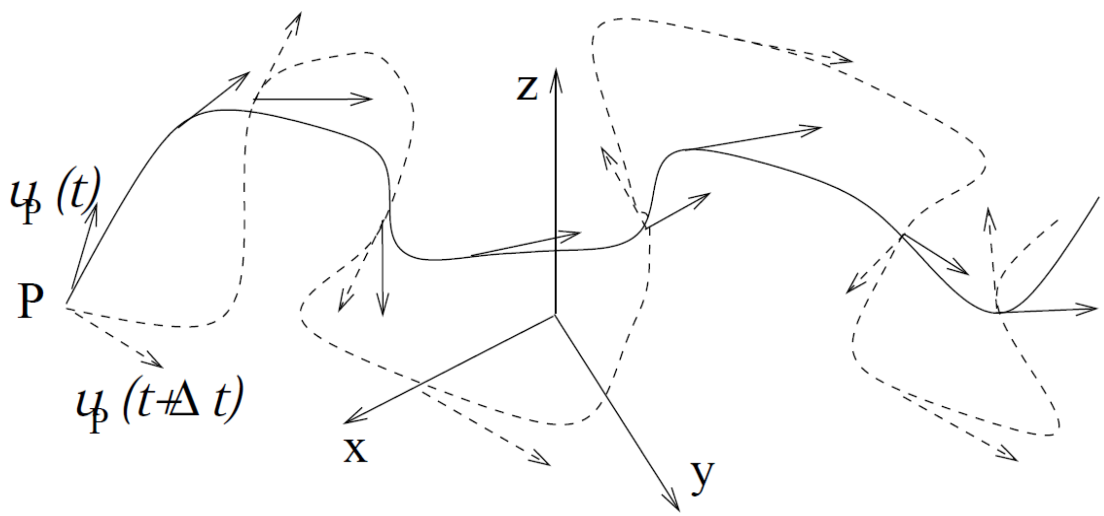
Traiettoria



Traiettorie lagrangiane per due particelle fluide *A* e B

Cinematica dei fluidi

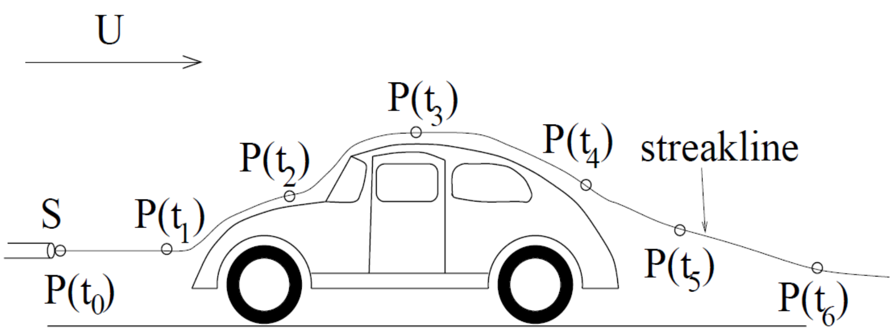
Linea di corrente



Linee di corrente in due diversi istanti di tempo

Cinematica dei fluidi

Streaklines o linee di fumo



Esempio di streakline

Esempio di streaklines intorno ad un modello di camion in un tunnel ad acqua

Cinematica dei fluidi

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$$

Derivata parziale rispetto al tempo $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

Derivata totale rispetto al tempo

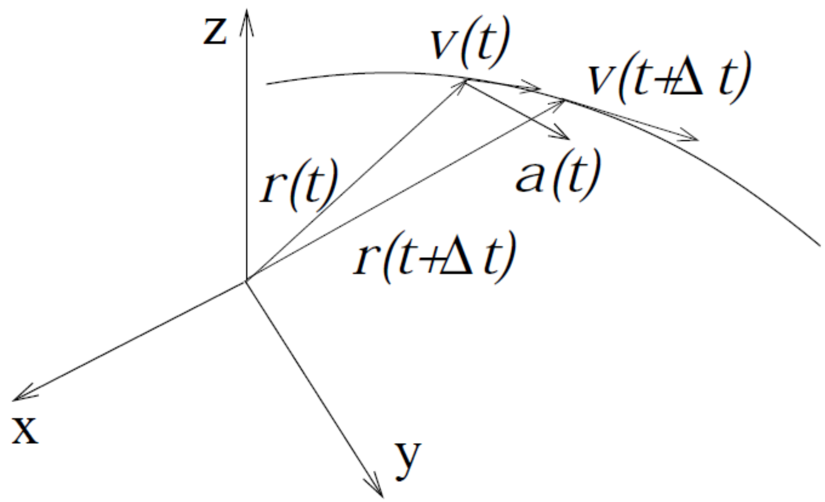
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Derivata sostanziale o materiale rispetto al tempo

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\varphi$$

Cinematica dei fluidi

Derivata materiale



Posizione, velocità ed accelerazione lungo la traiettoria di una particella fluida.

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Cinematica dei fluidi

Derivata materiale

Nella descrizione **lagrangiana** la velocità è solamente funzione del tempo, ossia $\mathbf{v}(t)$, in quanto si tratta della velocità misurata da un osservatore a cavallo sempre della stessa particella fluida durante il suo moto.

Nella descrizione **euleriana** la velocità è funzione del tempo e della stazione di osservazione, ossia $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, in quanto misurata in punti di osservazione fissi.

Questa differenza può sembrare sottile ma cambia completamente il punto di vista del fenomeno e porta ad una profonda differenza nella definizione di accelerazione.

$$\mathbf{a}(\mathbf{r},t)=\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}=\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{dt}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)$$ OPERATORE DI DERIVATA MATERIALE

Cinematica dei fluidi

Derivata materiale

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

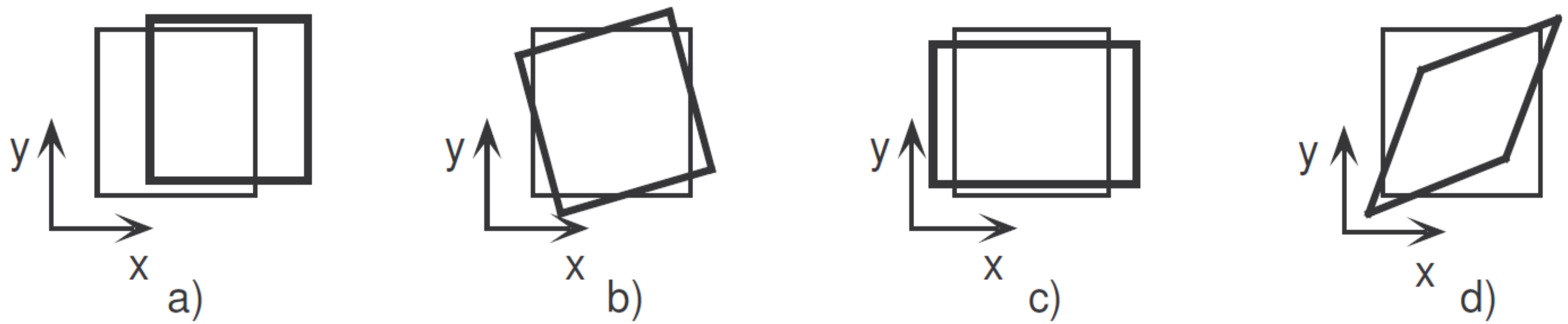
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

- le componenti di accelerazione esistono anche nel caso di velocità indipendente dal tempo (*accelerazione convettiva)*
- le equazioni della fluidodinamica ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ scritta per un fluido) sono accoppiate spazialmente
- l'accelerazione è una funzione non lineare delle velocità

Cinematica dei fluidi

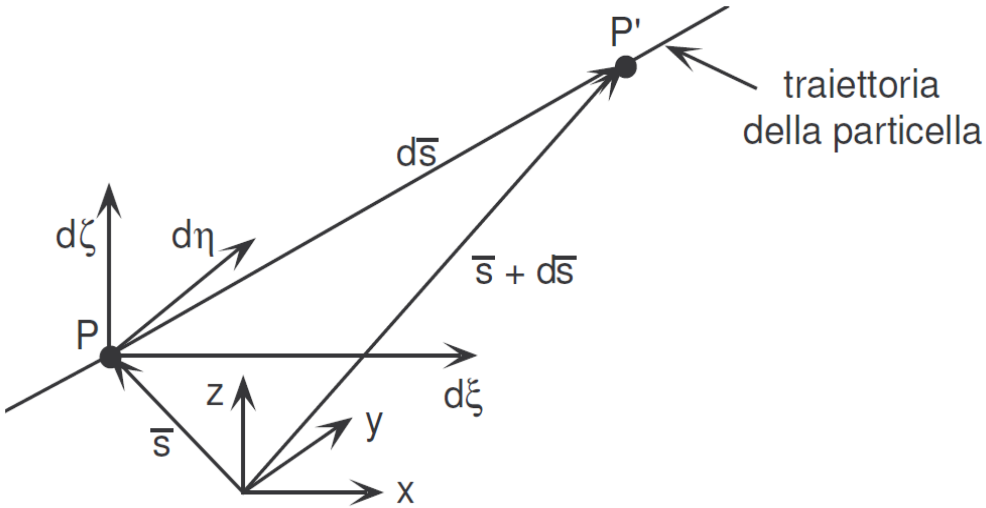
Analisi del moto attorno a un punto

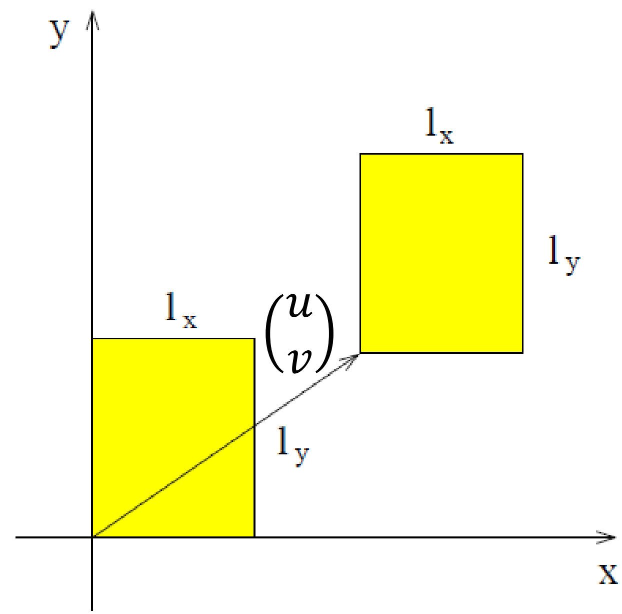


<u>Ipotesi: piccoli spostamenti e deformazioni</u>

Cinematica dei fluidi

Traslazione rigida





$$d\mathbf{s} = d\xi\hat{\mathbf{i}} + d\eta\hat{\mathbf{j}} + d\zeta\hat{\mathbf{k}}$$

Velocità assiale $$\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}} = \frac{\partial\xi}{\partial t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\eta}{\partial t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\hat{\mathbf{k}}$$

Tutta la regione si muove con la stessa velocità $\mathbf{u}$ uniforme nello spazio.

Cinematica dei fluidi

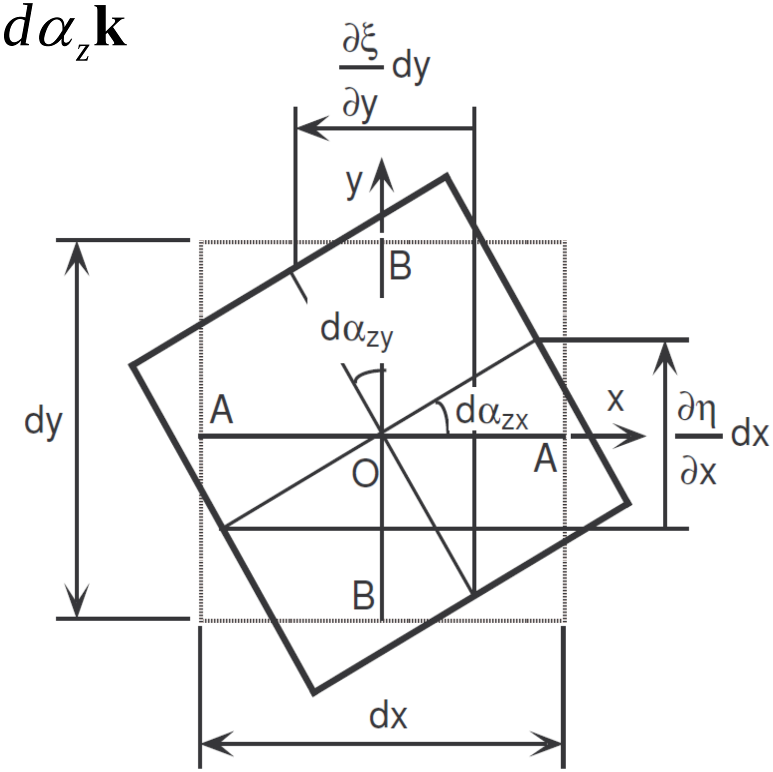
Rotazione rigida $d\boldsymbol{\alpha} = d\alpha_x \hat{\mathbf{i}} + d\alpha_y \hat{\mathbf{j}} + d\alpha_z \hat{\mathbf{k}}$

$$d\alpha_{zx} = d\alpha_{zy}$$

$$d\alpha_{zx} \cong \sin(d\alpha_{zx}) = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$d\alpha_{zy} \cong \sin(d\alpha_{zy}) = \frac{-\frac{\partial \xi}{\partial y} dy}{dy} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\boxed{d\alpha_z = \frac{1}{2}(d\alpha_{zx} + d\alpha_{zy}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)}$$

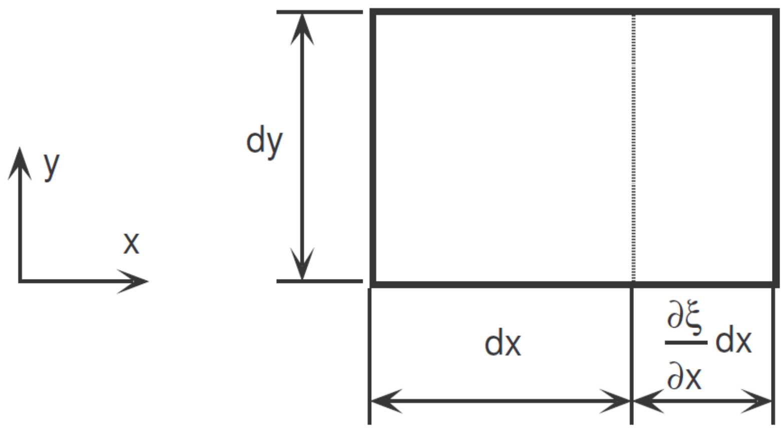


Velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Cinematica dei fluidi

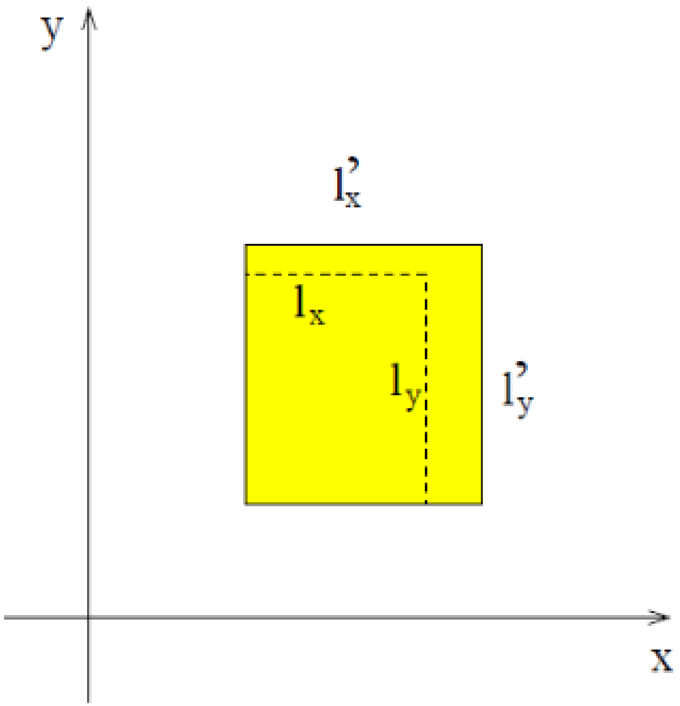
Deformazione assiale



L'elemento fluido subisce una variazione di lunghezza dei suoi lati, senza tuttavia ruotare ne variare l'angolo tra i lati del rettangolo.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}}$$



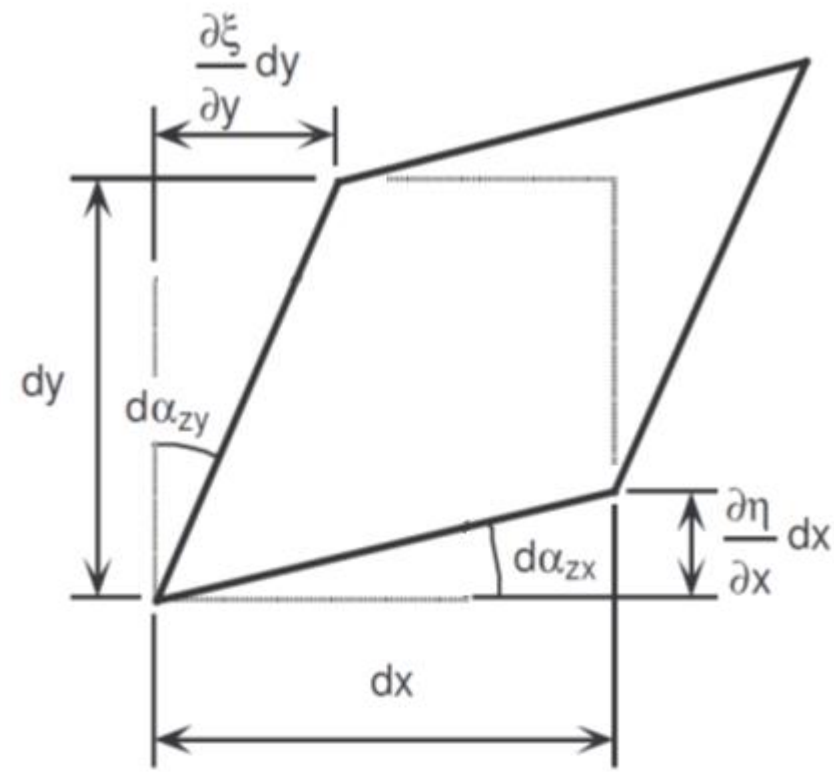
Cinematica dei fluidi

Deformazione angolare

$$d\alpha_{zx} \cong \tan(d\alpha_{zx}) = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$d\alpha_{zy} \cong \tan(d\alpha_{zy}) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}dy}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

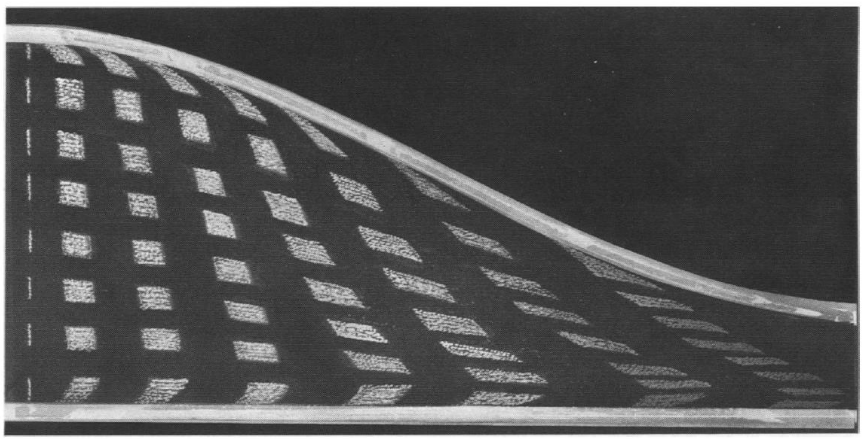
$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(d\alpha_{zx} + d\alpha_{zy}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)}$$



$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$

Cinematica dei fluidi

Velocità di deformazione



Deformazione di elementi di fluido (marcati con un tracciante) durante il loro moto all'interno di un canale convergente.

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \dot{\varepsilon}_{yx}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \dot{\varepsilon}_{zy}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \dot{\varepsilon}_{xz}$$

Cinematica dei fluidi

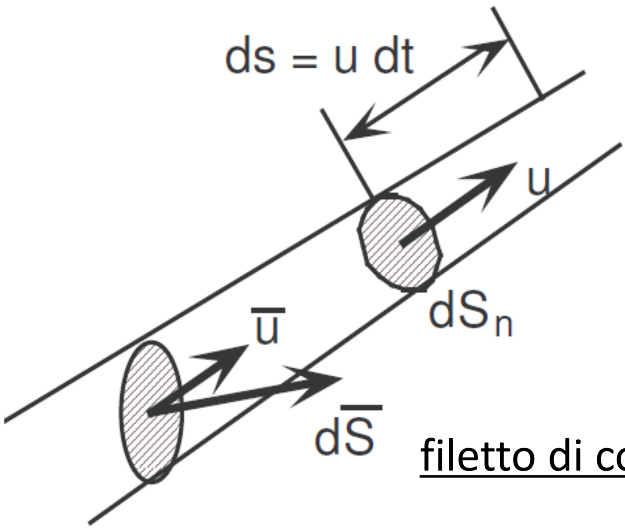
Portata massica

$$dG_m = \frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho\frac{ds}{dt}dS_n = \rho u dS_n = \rho\mathbf{u}\cdot d\mathbf{S}$$

$$G_m = \int_S \rho\mathbf{u}\cdot d\mathbf{S}$$

Portata volumetrica

$$G_v = \frac{G_m}{\rho}$$



filetto di corrente

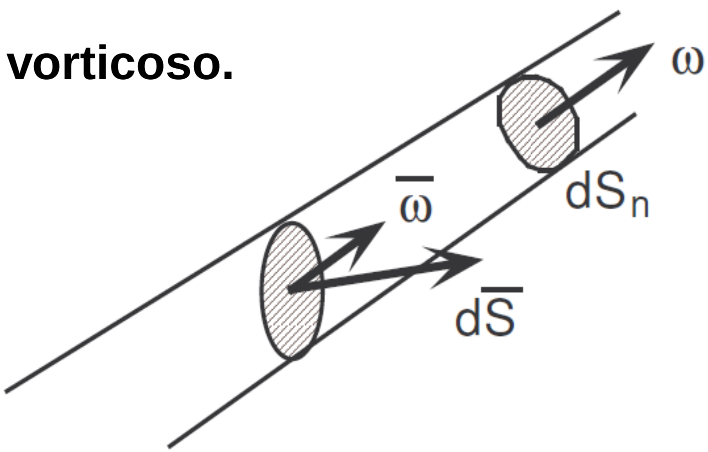
Cinematica dei fluidi

Vorticità $$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

linee vorticose: linee la cui tangente ha in ogni punto la direzione del vettore $\boldsymbol{\omega}$.

Le linee vorticose che passano attraverso una linea chiusa individuano un **tubo vorticoso** che può estendersi fino ai confini del campo vettoriale oppure può chiudersi come un anello nel suo interno.

Un tubo di sezione infinitesima è detto **filetto vorticoso.**



Cinematica dei fluidi

<u>Equazione di continuità</u>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$