

A.A. 2025-2026 ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA PER LE MACCHINE

Lucia Parussini

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università degli Studi di Trieste

Via Valerio 10 - 34127 Trieste - ITALY

E-mail: lparussini@units.it

Dinamica dei fluidi

EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITA' DI MOTO

La differenza fra la quantità di moto del fluido che in un tempo infinitesimo entra in un volume infinitesimo fisso nello spazio e la quantità di moto che ne esce più le forze agenti sul volume infinitesimo e sulla sua superficie esterna è rappresentata dalla quantità di moto che nello stesso tempo si accumula nello stesso volume infinitesimo.

Dinamica dei fluidi

Quantità di moto infinitesima

$$d\mathbf{Q} = dm\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} dm u \\ dm v \\ dm w \end{Bmatrix}$$

Portata di quantità di moto infinitesima

$$d\dot{\mathbf{Q}} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} = dG_m\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} dG_m u \\ dG_m v \\ dG_m w \end{Bmatrix}$$

Portata massica infinitesima

$$dG_m = \frac{dm}{dt} = \rho\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$$

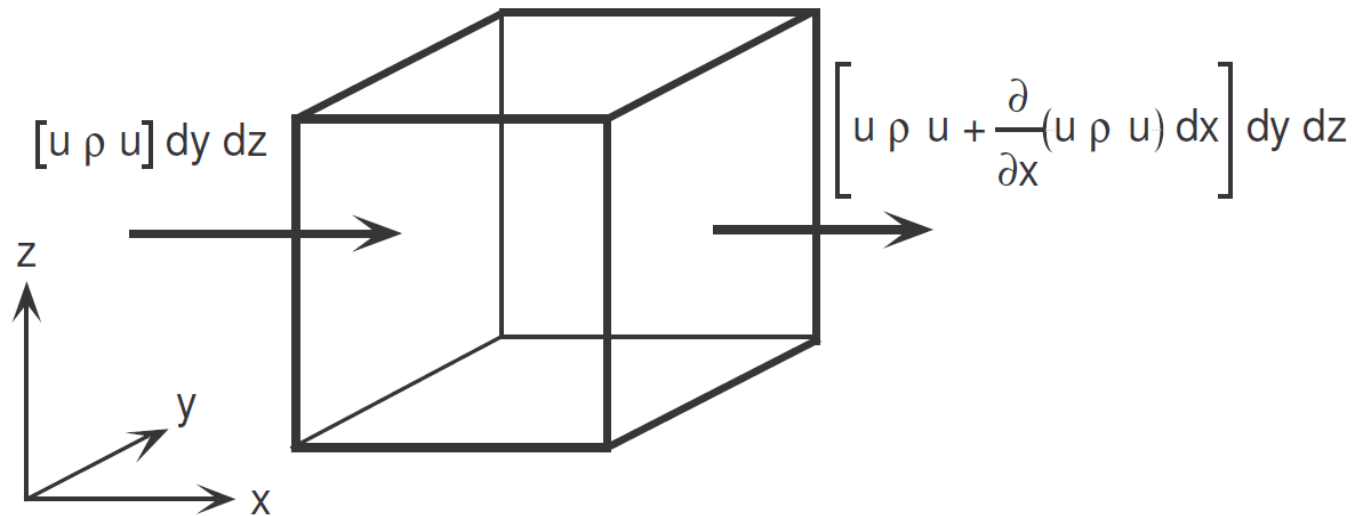
Dinamica dei fluidi

$$dG_{m_x} = \rho u dy dz \quad dG_{m_y} = \rho v dx dz \quad dG_{m_z} = \rho w dx dy$$

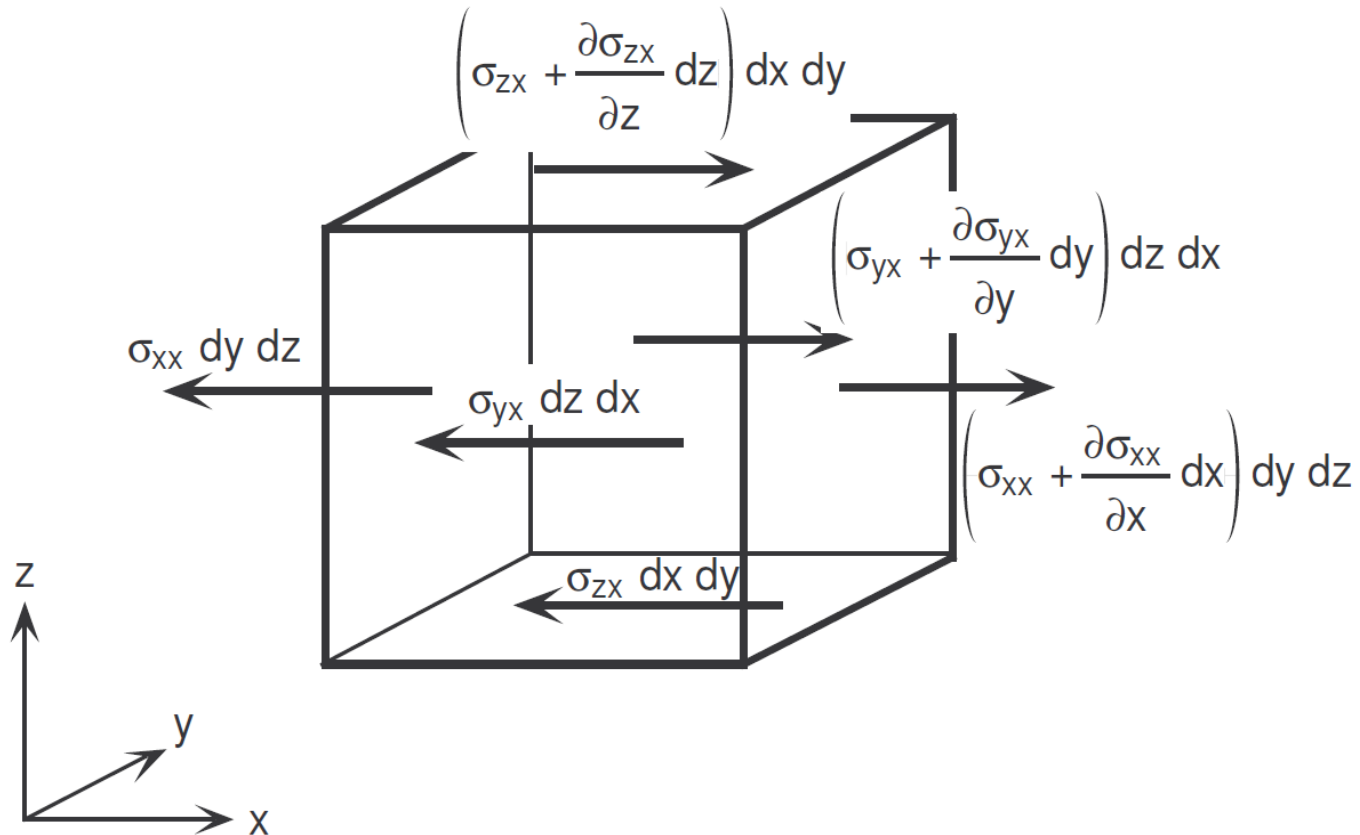
$$\overline{\dot{\mathbf{Q}}} = \begin{pmatrix} d\dot{Q}_{xx} & d\dot{Q}_{xy} & d\dot{Q}_{xz} \\ d\dot{Q}_{yx} & d\dot{Q}_{yy} & d\dot{Q}_{yz} \\ d\dot{Q}_{zx} & d\dot{Q}_{zy} & d\dot{Q}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\rho u dy dz & v\rho u dy dz & w\rho u dy dz \\ u\rho v dx dz & v\rho v dx dz & w\rho v dx dz \\ u\rho w dx dy & v\rho w dx dy & w\rho w dx dy \end{pmatrix}$$

Dinamica dei fluidi

Portata di quantità di moto passante in direzione x



Dinamica dei fluidi



Forze dovute allo stato di tensione lungo l'asse x

Dinamica dei fluidi

Forze di volume lungo l'asse x

$$F_x = F_{mx} dm = \rho F_{mx} dV$$

Quantità di moto in x accumulatasi nell'intervallo infinitesimo nel volume di controllo

$$\frac{\partial}{\partial t}(dQ_x) = \frac{\partial}{\partial t}(dmu) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho dV u) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)dV + \frac{\partial}{\partial t}(dV)(\rho u) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)dV$$

Dinamica dei fluidi

Lungo l'asse x

Differenza tra portata di quantità di moto entrante e uscente dal volume di controllo infinitesimo

$$-\left(\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z}\right)dV = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}u)dV$$

Forze di superficie

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\right)dV$$

Forze di volume

$$F_x = \rho F_{mx} dV$$

Quantità di moto accumulatasi nell'intervallo infinitesimo nel volume di controllo

$$\frac{\partial}{\partial t}(dQ_x) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)dV$$

Dinamica dei fluidi

Lungo l'asse x

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} u) = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \rho F_{mx}$$

Essendo:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} u) = \rho \frac{Du}{Dt}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho F_{mx}$$

Per analogia ricaviamo:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{F}_m$$

EQUAZIONI DI
CONSERVAZIONE DELLA
QUANTITA' DI MOTO

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

In un fluido in quiete:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -p$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

In un fluido in moto:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\mathbf{I} + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^*$$

equazione costitutiva

relazione tra il tensore deviatorico $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^*$ e il tensore delle velocità di deformazione $\overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}$

$$\overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{x}\hat{x}}^* & \sigma_{\hat{x}\hat{y}}^* & \sigma_{\hat{x}\hat{z}}^* \\ \sigma_{\hat{y}\hat{x}}^* & \sigma_{\hat{y}\hat{y}}^* & \sigma_{\hat{y}\hat{z}}^* \\ \sigma_{\hat{z}\hat{x}}^* & \sigma_{\hat{z}\hat{y}}^* & \sigma_{\hat{z}\hat{z}}^* \end{pmatrix}$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

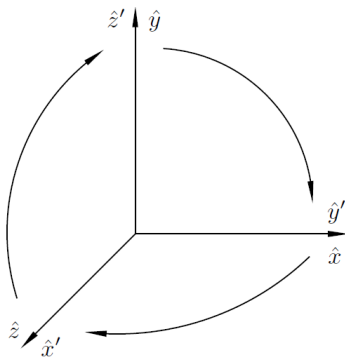
Linearità: tutti gli elementi del tensore deviatorico sono funzioni lineari dei tre elementi del tensore di velocità di deformazione, ad esempio:

$$\sigma_{\hat{x}\hat{x}}^* = a_1 \dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + a_2 \dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + a_3 \dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$

Isotropia: la forma delle equazioni che legano gli elementi del tensore deviatorico agli elementi del tensore velocità di deformazione sono indipendenti dalla scelta di coordinate cartesiane, ovvero vi è l'invarianza delle relazioni costitutive rispetto a qualsiasi rotazione arbitraria del sistema di riferimento: in pratica il materiale si comporta ugualmente in tutte le direzioni uscenti dal punto considerato.

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

$$\sigma_{\hat{y}\hat{y}}^* = b_1 \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + b_2 \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + b_3 \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$



$$\hat{x}' = \hat{z} \quad \hat{u}' = \hat{w}$$

$$\hat{y}' = \hat{x} \quad \hat{v}' = \hat{u}$$

$$\hat{z}' = \hat{y} \quad \hat{w}' = \hat{v}$$

$$\dot{\epsilon}_{\hat{x}'\hat{x}'} = \frac{\partial \hat{u}'}{\partial \hat{x}'} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$

$$\dot{\epsilon}_{\hat{y}'\hat{y}'} = \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$\dot{\epsilon}_{\hat{z}'\hat{z}'} = \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}}$$

$$\sigma_{\hat{y}'\hat{y}'}^* = b_1 \dot{\epsilon}_{\hat{x}'\hat{x}'} + b_2 \dot{\epsilon}_{\hat{y}'\hat{y}'} + b_3 \dot{\epsilon}_{\hat{z}'\hat{z}'}$$

$$\sigma_{\hat{x}\hat{x}}^* = \sigma_{\hat{y}'\hat{y}'}^*$$

$$\sigma_{\hat{x}\hat{x}}^* = b_1 \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}} + b_2 \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + b_3 \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}}$$

$$\sigma_{\hat{x}\hat{x}}^* = a_1 \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + a_2 \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + a_3 \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$

$$b_1 = a_3$$

$$b_2 = a_1$$

$$b_3 = a_2$$



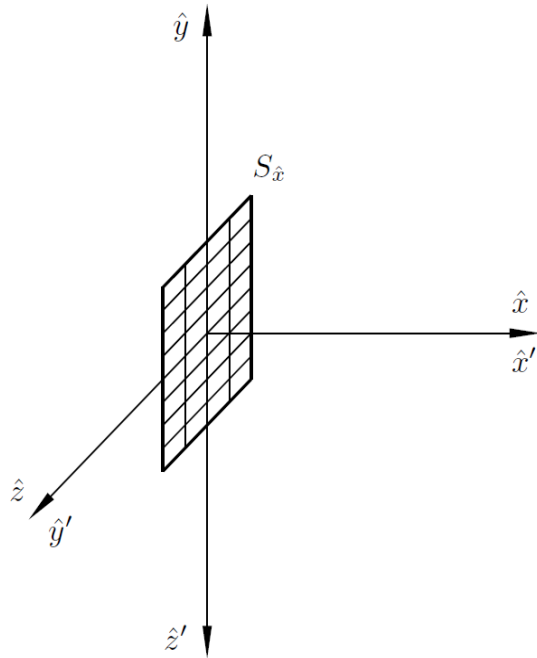
$$\sigma_{\hat{y}\hat{y}}^* = a_3 \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + a_1 \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + a_2 \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$

$$\text{Similmente: } \sigma_{\hat{z}\hat{z}}^* = a_2 \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + a_3 \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + a_1 \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

Dimostriamo:

$$a_2 = a_3$$



$$\begin{aligned}\hat{x}' &= \hat{x} & \hat{u}' &= \hat{u} \\ \hat{y}' &= \hat{z} & \hat{v}' &= \hat{w} \\ \hat{z}' &= -\hat{y} & \hat{w}' &= -\hat{v}\end{aligned}$$

$$\dot{\epsilon}_{\hat{x}'\hat{x}'} = \frac{\partial \hat{u}'}{\partial \hat{x}'} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$\dot{\epsilon}_{\hat{y}'\hat{y}'} = \frac{\partial \hat{v}'}{\partial \hat{y}'} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$

$$\dot{\epsilon}_{\hat{z}'\hat{z}'} = \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \hat{z}'} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}}$$

$$\sigma_{\hat{x}'\hat{x}'}^* = a_1 \dot{\epsilon}_{\hat{x}'\hat{x}'} + a_2 \dot{\epsilon}_{\hat{y}'\hat{y}'} + a_3 \dot{\epsilon}_{\hat{z}'\hat{z}'}$$

$$\sigma_{\hat{x}'\hat{x}'}^* = a_1 \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + a_3 \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + a_2 \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}} = \sigma_{\hat{x}\hat{x}}^*$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \lambda + 2\mu \\
 a_2 &= a_3 = \lambda
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 \sigma_{\hat{x}\hat{x}}^* &= (\lambda + 2\mu)\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + \lambda\dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + \lambda\dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}} \\
 \sigma_{\hat{y}\hat{y}}^* &= \lambda\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + (\lambda + 2\mu)\dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + \lambda\dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}} \\
 \sigma_{\hat{z}\hat{z}}^* &= \lambda\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + \lambda\dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + (\lambda + 2\mu)\dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}}
 \end{aligned}$$

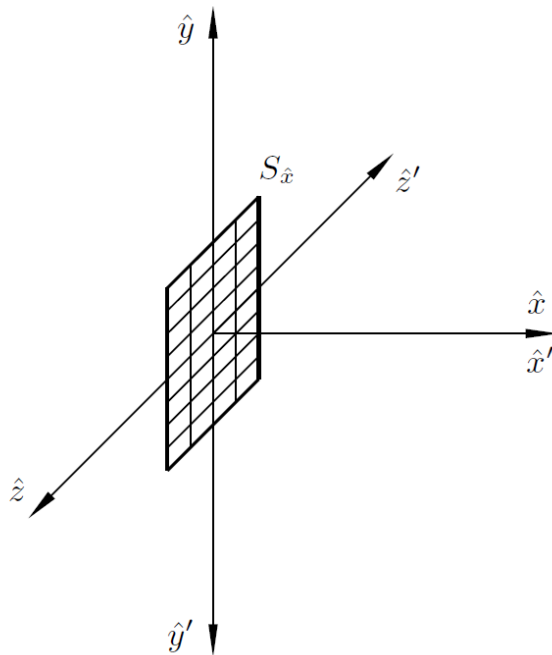
$$\begin{aligned}
 \sigma_{\hat{x}\hat{x}}^* &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + \dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + \dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}}) + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} = \lambda\nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} = \lambda\dot{e} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} \\
 \sigma_{\hat{y}\hat{y}}^* &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + \dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + \dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}}) + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} = \lambda\nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} = \lambda\dot{e} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} \\
 \sigma_{\hat{z}\hat{z}}^* &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + \dot{\varepsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + \dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}}) + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}} = \lambda\nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}} = \lambda\dot{e} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{\hat{z}\hat{z}}
 \end{aligned}$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

Dimostriamo:

$$\sigma_{\hat{x}\hat{y}}^* = 0$$

$$\sigma_{\hat{x}\hat{y}}^* = c_1 \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + c_2 \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + c_3 \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$



$$\begin{aligned}\hat{x}' &= \hat{x} & \hat{u}' &= \hat{u} \\ \hat{y}' &= -\hat{y} & \hat{v}' &= -\hat{v} \\ \hat{z}' &= -\hat{z} & \hat{w}' &= -\hat{w}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{\hat{x}'\hat{x}'} &= \frac{\partial \hat{u}'}{\partial \hat{x}'} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} \\ \dot{\epsilon}_{\hat{y}'\hat{y}'} &= \frac{\partial \hat{v}'}{\partial \hat{y}'} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} \\ \dot{\epsilon}_{\hat{z}'\hat{z}'} &= \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \hat{z}'} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}\end{aligned}$$

$$\sigma_{\hat{x}'\hat{y}'}^* = c_1 \dot{\epsilon}_{\hat{x}'\hat{x}'} + c_2 \dot{\epsilon}_{\hat{y}'\hat{y}'} + c_3 \dot{\epsilon}_{\hat{z}'\hat{z}'}$$

$$\sigma_{\hat{x}'\hat{y}'}^* = c_1 \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} + c_2 \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} + c_3 \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}}$$

$$\sigma_{\hat{x}'\hat{y}'}^* = \sigma_{\hat{x}\hat{y}}^*$$

$$\sigma_{\hat{x}'\hat{y}'}^* = -\sigma_{\hat{x}\hat{y}}^*$$

$$\longrightarrow \sigma_{\hat{x}'\hat{y}'}^* = \sigma_{\hat{x}\hat{y}}^* = 0$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{x}\hat{x}}^* & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{y}\hat{y}}^* & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{z}\hat{z}}^* \end{pmatrix} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{\hat{x}\hat{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{\hat{y}\hat{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{\hat{z}\hat{z}} \end{pmatrix} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + 2\mu \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^* = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + 2\mu \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix}$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix}$$

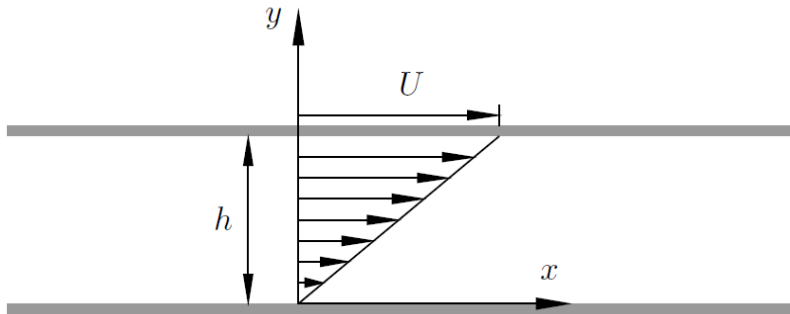
$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

$$\sigma_{yx} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{yx} = 2\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Significato fisico del coefficiente di viscosità:

Moto di Couette



$$u = \frac{U}{h} y$$

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U}{h}$$

$$F = \mu \frac{U}{h} S$$

Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

Ipotesi di Stokes: si assume che la pressione termodinamica p sia uguale in valore assoluto alla media aritmetica delle tensioni normali, nonostante una variazione di volume raggiunga un valore finito, e che le espansioni e compressioni cui un sistema è sottoposto siano trasformazioni reversibili in condizioni isoterme.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{2}{3}\mu(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\longrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{2}{3}\mu}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u}\right)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Equazioni di Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{F}_m$$

EQUAZIONI DI
CONSERVAZIONE DELLA
QUANTITA' DI MOTO

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho F_{mx}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho F_{my}$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho F_{mz}$$

Equazioni di Navier-Stokes

Per le ipotesi di Stokes:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} & \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} & \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} & \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \rho F_{mx} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \rho F_{my} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \rho F_{mz}\end{aligned}$$

Equazioni di Navier-Stokes

Equazione di continuità:
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Equazione di conservazione dell'energia:
$$\rho \frac{D}{Dt} (c_p T) - \dot{q} - \lambda \Delta T - \frac{Dp}{Dt} - \mu \Phi = 0$$

Equazione di stato dei gas:
$$\frac{p}{\rho} = RT$$

Coefficiente di viscosità dinamica:
$$\mu = f(T)$$

Condizioni al contorno

Condizioni iniziali

Equazioni di Navier-Stokes

Per flussi incomprimibili:

Equazione di continuità:

$$\cancel{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Equazione di conservazione dell'energia: $\rho \frac{D}{Dt} (c_p T) - \dot{q} - \lambda \Delta T - \frac{Dp}{Dt} - \mu \Phi = 0$

Equazione di stato dei gas:

$$\cancel{\frac{p}{\rho} = RT}$$

Coefficiente di viscosità dinamica:

$$\mu = f(T)$$

Condizioni al contorno

Condizioni iniziali

Equazioni di Navier-Stokes

Per flussi incomprimibili e isotermini:

Equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Equazione di conservazione dell'energia: $\rho \frac{D}{Dt} (c_p T) - \dot{q} - \lambda \Delta T - \frac{Dp}{Dt} - \mu \Phi = 0$

Coefficiente di viscosità dinamica:

$$\mu = f(T)$$

Condizioni al contorno

Condizioni iniziali

Equazioni di Navier-Stokes

Per flussi incomprimibili e isotermini:

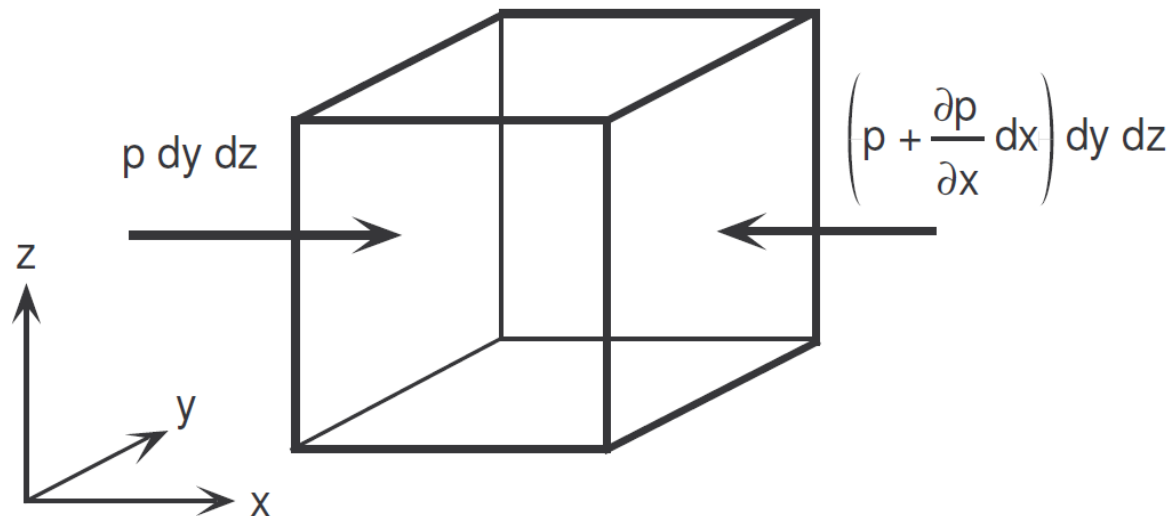
$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho F_{mx} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho F_{my} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho F_{mz}\end{aligned}$$

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{termine instazionario}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}}_{\text{termine convettivo}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{termine forzante}} + \underbrace{\mu \Delta \mathbf{u}}_{\text{termine viscoso}} + \underbrace{\rho \mathbf{F}_m}_{\text{termine forzante}}$$

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Equazioni di Eulero

Forze di pressione lungo l'asse x
(per un *flusso non viscoso* sono le uniche forze di superficie)



Equazioni di Eulero

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_{mx}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_{my}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho w) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_{mz}$$



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{F}_m$$

Equazioni di Eulero

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho \mathbf{u}) = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$



$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{F}_m$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_{mx}$$

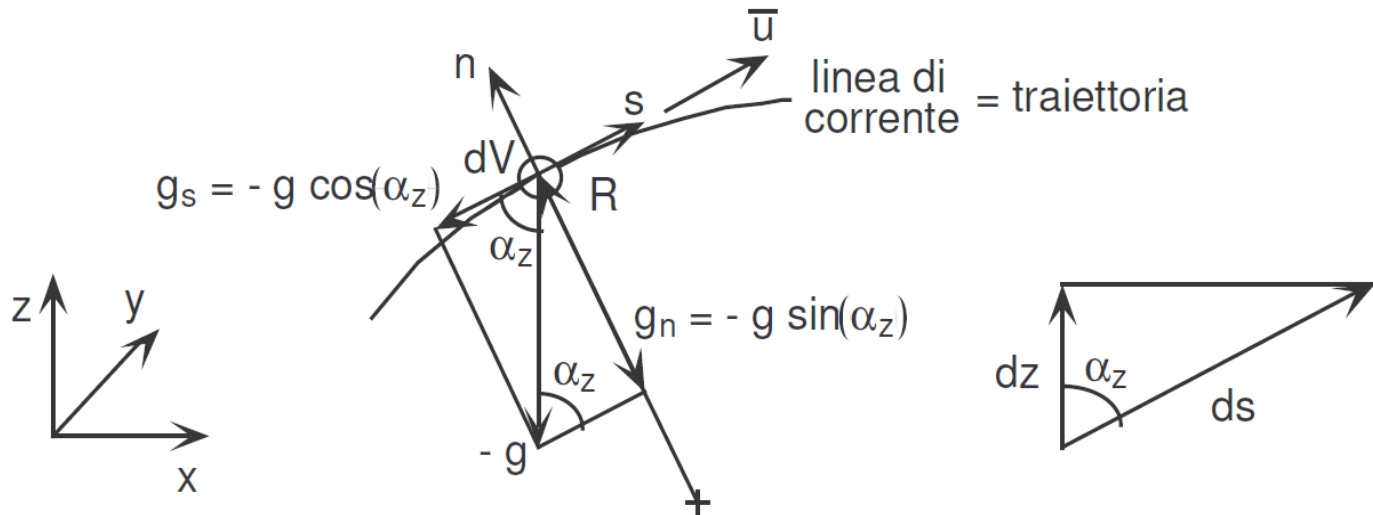
$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_{my}$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_{mz}$$

EQUAZIONI DI EULERO

Equazione di Bernoulli

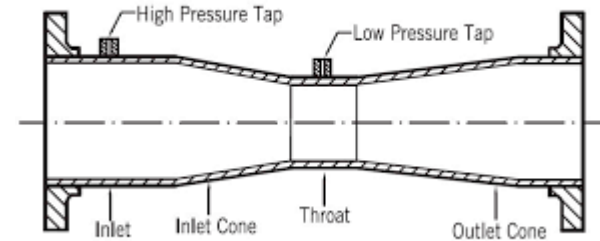
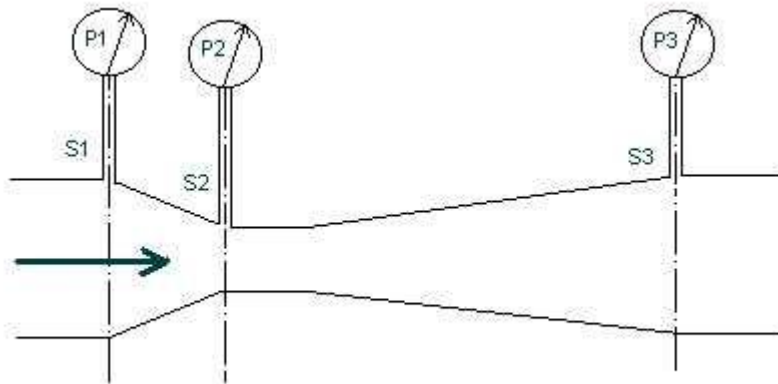
Particella di fluido in moto lungo una linea di corrente



EQUAZIONE DI BERNOULLI

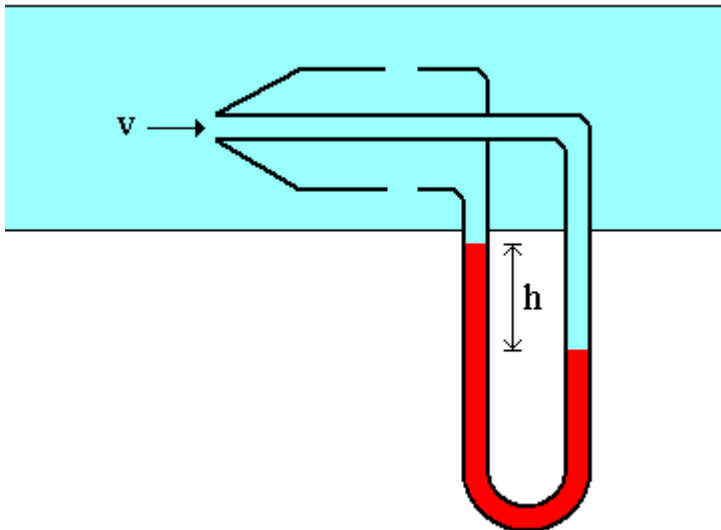
Equazione di Bernoulli

Tubo di Venturi



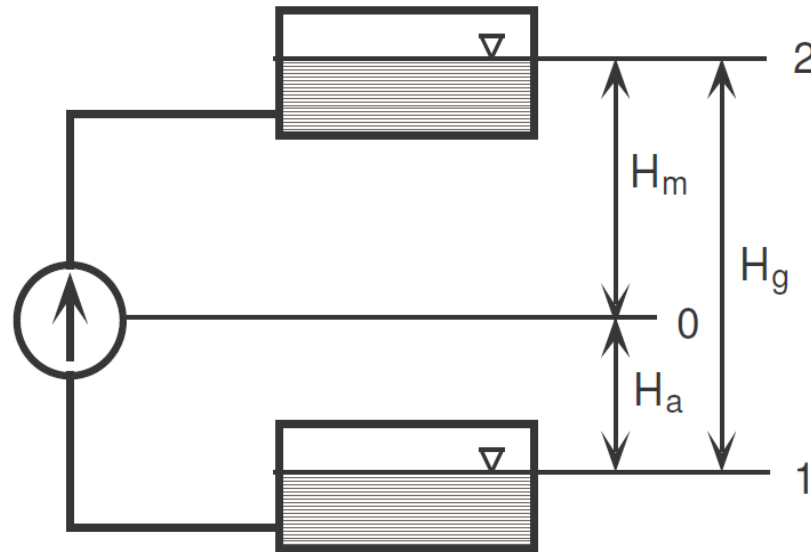
Equazione di Bernoulli

Tubo di Pitot-Prandtl



Teorema di Bernoulli modificato

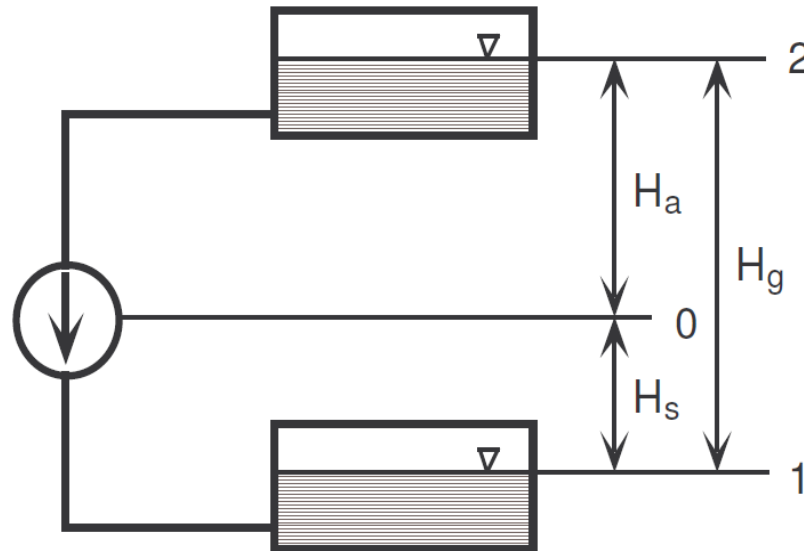
PREVALENZA DI UN IMPIANTO



Schema di un impianto idraulico di sollevamento.

Teorema di Bernoulli modificato

SALTO DI UN IMPIANTO



Schema di un impianto idraulico di caduta.