dipartimento
di ingegneria
e architettura

A.A. 2025-2026 ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA PER LE MACCHINE

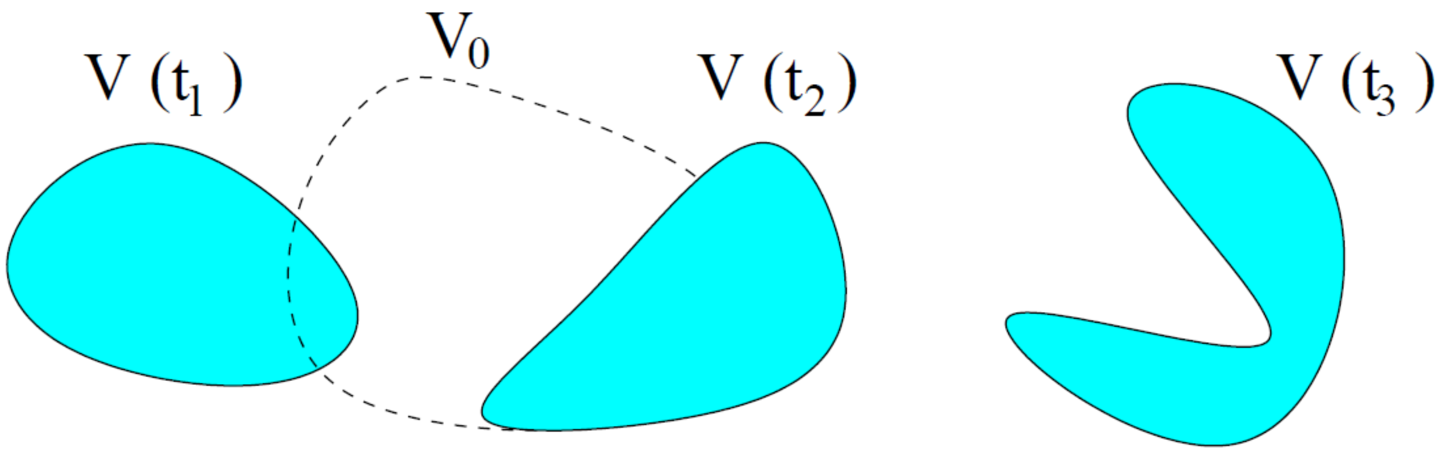
Lucia Parussini

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università degli Studi di Trieste

Via Valerio 10 - 34127 Trieste - ITALY

E-mail: lparussini@units.it

Teorema del trasporto di Reynolds

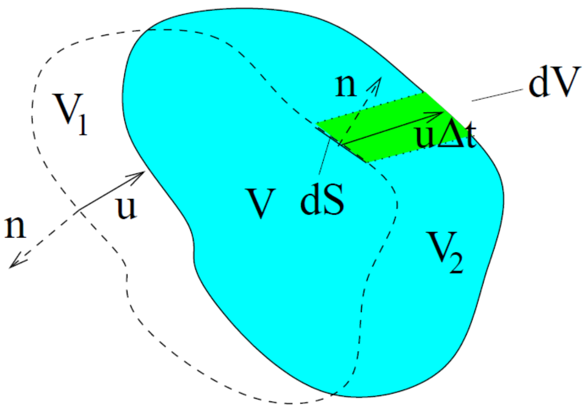


Evoluzione temporale di un volume materiale e posizione fissa di un volume di controllo

$$B = \int_V \rho b dV$$

- Grandezza intensiva
- Grandezza estensiva

Teorema del trasporto di Reynolds



Moto relativo dopo un tempo Δt tra un volume di controllo fisso ed un volume materiale inizialmente coincidenti.

$$V(t) = V_0$$
$$V(t+\Delta t) = V_0 - V_1(t+\Delta t) + V_2(t+\Delta t)$$
$$V_0(t) = V_0(t+\Delta t) = V_0$$

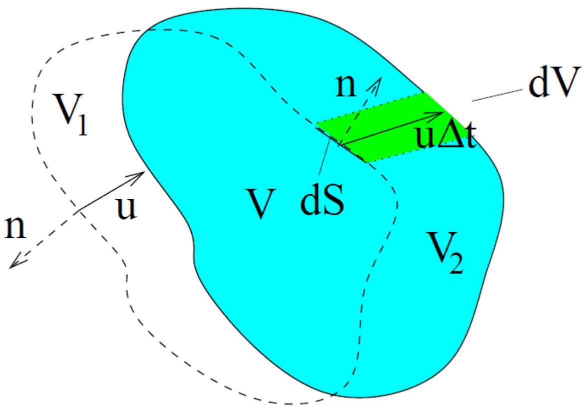
$$B(t) = B_0(t) \rightarrow \int_{V(t)} \rho b dV = \int_{V_0(t)} \rho b dV$$

$$B(t+\Delta t) = B_0(t+\Delta t) - B_1(t+\Delta t) + B_2(t+\Delta t) \rightarrow$$

$$\int\limits_{V(t+\Delta t)} \rho b dV = \int\limits_{V_0(t+\Delta t)} \rho b dV - \int\limits_{V_1(t+\Delta t)} \rho b dV + \int\limits_{V_2(t+\Delta t)} \rho b dV$$

$$\frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} = \frac{B_0(t+\Delta t) - B_0(t)}{\Delta t} - \frac{B_1(t+\Delta t)}{\Delta t} + \frac{B_2(t+\Delta t)}{\Delta t} \qquad \Delta t \rightarrow 0$$

Teorema del trasporto di Reynolds



$$\frac{dB}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b dV$$

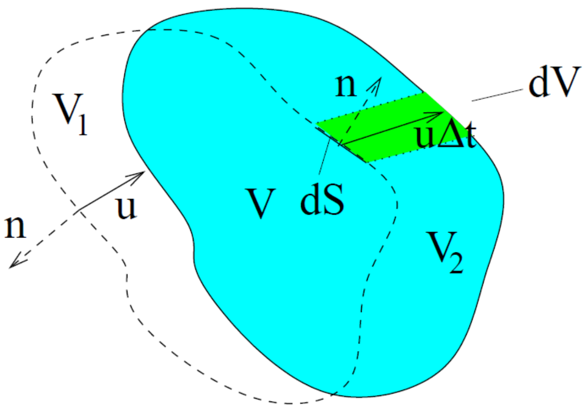
$$\frac{dB_0}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_0(t+\Delta t) - B_0(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho b dV = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV$$

$$- \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_1(t+\Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_2(t+\Delta t)}{\Delta t} = - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V_1(t+\Delta t)} \rho b dV}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V_2(t+\Delta t)} \rho b dV}{\Delta t}$$

$$dV = \mathbf{u}\Delta t \cdot \mathbf{n} dS \quad su\ S_2$$
$$dV = \mathbf{u}\Delta t \cdot (-\mathbf{n}) dS \quad su\ S_1$$

$$\to - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{S_1} \rho b \mathbf{u}\Delta t \cdot (-\mathbf{n}) dS}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{S_2} \rho b \mathbf{u}\Delta t \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta t} = \int_{S_0} \rho b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

Teorema del trasporto di Reynolds



$$\frac{dB}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

Per un volume di controllo che non si muove e non si deforma nel tempo, la derivata temporale della proprietà B del volume materiale è uguale alla derivata temporale di B del volume di controllo più il flusso netto di B dal volume di controllo per effetto dello scambio di massa attraverso la superficie di controllo.

Teorema del trasporto di Reynolds

Se V_0 è in movimento e/o si deforma nel tempo, dovendo valutare il flusso di ρb attraverso dS non saremo più interessati alla velocità assoluta del fluido ma piuttosto alla velocità relativa tra il fluido e la superficie S_0. Indicata allora con $\mathbf{v}$ la velocità del fluido e con $\mathbf{u}_0$ quella di S_0 risulterà $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_o$ e quindi

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho b dV + \int_{S_0} \rho b\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0\right)\cdot \mathbf{n} dS$$

Per un flusso stazionario, l'ammontare della proprietà B all'interno del volume di controllo rimane costante nel tempo:

$$\frac{dB}{dt} = \int_{S_0} \rho b \mathbf{u}\cdot \mathbf{n} dS$$

Teorema del trasporto di Reynolds

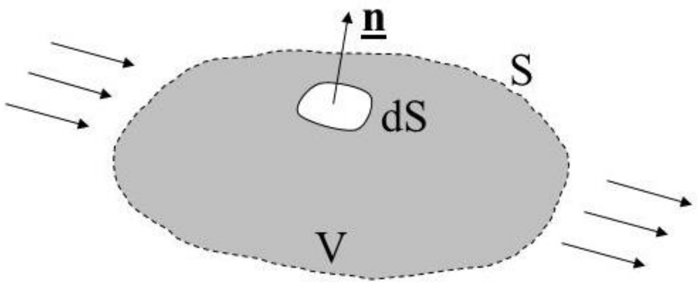
$$\frac{dB}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

$b = 1 \quad B = \int_V \rho dV$ massa

$b = \mathbf{u} \quad B = \int_V \rho \mathbf{u} dV$ quantità di moto

$b = e \quad B = \int_V \rho e dV$ energia

Equazioni in forma integrale



Equazione di bilancio di massa:

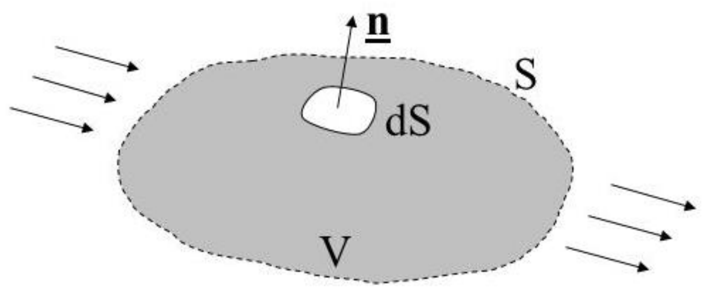
$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho dV = 0$$

$$\boxed{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0}$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \right) \right) dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \right) = 0$$

Equazioni in forma integrale



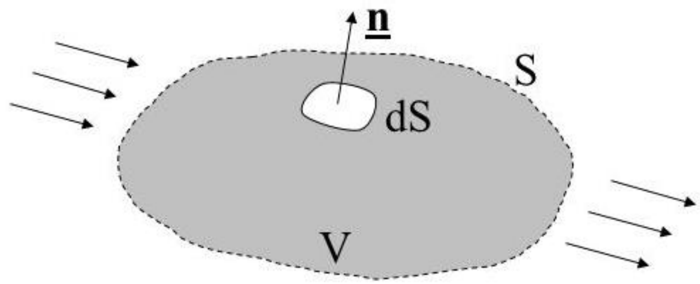
Equazione di bilancio di quantità di moto: $$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F}$$

$$\boxed{\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} dV + \int_S (\rho\mathbf{u})\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dS = -\int_S p\mathbf{n} dS + \int_S \bar{\bar{\sigma}}^* \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho\mathbf{F}_m dV}$$

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\rho\mathbf{u}) \right) dV = \int_V \left(-\nabla p + \nabla\cdot\bar{\bar{\sigma}}^* + \rho\mathbf{F}_m \right) dV$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\rho\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla\cdot\bar{\bar{\sigma}}^* + \rho\mathbf{F}_m$$

Equazioni in forma integrale



Equazione di bilancio dell’energia:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho e dV = \dot{Q} - \dot{L}$$

$$\boxed{\int_V \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \int_S (\rho e)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dS = \int_V \dot{q} dV + \int_S \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \left(\mathbf{u}\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\cdot\mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u} dV}$$

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\rho e) \right) dV = \int_V \left(\dot{q} + \lambda \Delta T + \nabla\cdot\left(\mathbf{u}\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) + \rho \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u} \right) dV$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\rho e) = \dot{q} + \lambda \Delta T + \nabla\cdot\left(\mathbf{u}\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) + \rho \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u}$$