

A.A. 2025-2026 ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA PER LE MACCHINE

Lucia Parussini

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università degli Studi di Trieste

Via Valerio 10 - 34127 Trieste - ITALY

E-mail: lparussini@units.it

Equazioni adimensionalizzate

Adimensionalizzare: trasformare le variabili del problema in grandezze prive di dimensioni dividendole per opportuni fattori di scala.

Analisi dimensionale: tecnica che consente di individuare le dipendenze funzionali dei fenomeni da variabili fisiche e geometriche basandosi su considerazioni di OMOGENEITA' DIMENSIONALE.

Se una equazione esprime una corretta relazione tra le variabili di un processo fisico allora sarà dimensionalmente omogenea, cioè ciascun termine additivo avrà le medesime dimensioni.

Equazioni adimensionalizzate

Analisi dimensionale

Vantaggi:

- relazioni più semplici con minor numero di parametri
- compattazione degli ordini di grandezza
- valutazione dell'importanza dei termini all'interno delle equazioni
- leggi di scala, quindi maggiore universalità delle leggi ottenute
- nelle sperimentazione: riduzione del numero di parametri da variare, riduzione del numero di esperimenti da fare, possibilità di fare esperimenti significativi in scala ridotta

Equazioni adimensionalizzate

Test in galleria del vento: si sfruttano i principi dell'analisi dimensionale

$$F = f(L, U, \rho, \mu) \quad \frac{F}{\rho U^2 L^2} = g\left(\frac{\rho U L}{\mu}\right) \quad C_F = g(\text{Re})$$



Equazioni adimensionalizzate

SCELTA DELLE VARIABILI E PARAMETRI DI ADIMENSIONALIZZAZIONE

Equazione di moto di un corpo in caduta libera

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

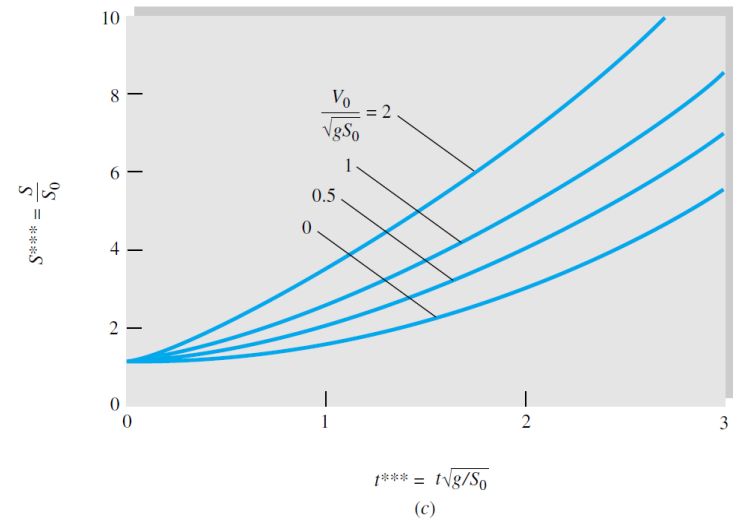
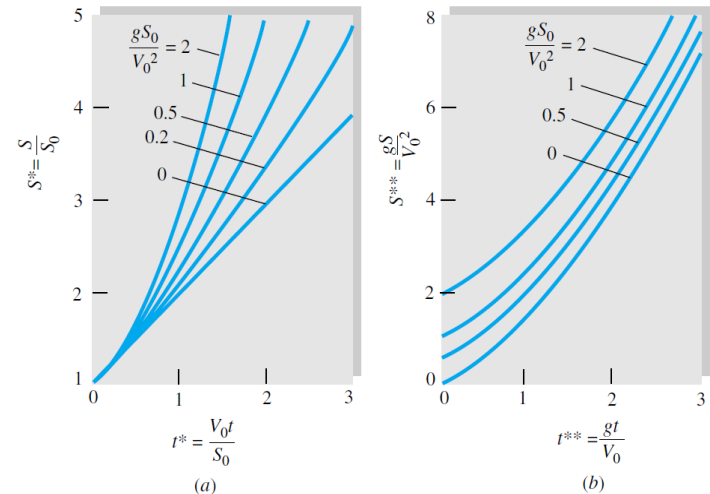
2 variabili e 3 parametri le cui dimensioni sono:

$$\begin{array}{ccccc} S & t & S_0 & V_0 & g \\ \{L\} & \{T\} & \{L\} & \{LT^{-1}\} & \{LT^{-2}\} \end{array}$$

2 dimensioni L, T



2 parametri di adimensionalizzazione



Equazioni adimensionalizzate

SCELTA DELLE VARIABILI E PARAMETRI DI ADIMENSIONALIZZAZIONE

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

S_0, V_0

$$S^* = \frac{S}{S_0} \quad t^* = \frac{V_0 t}{S_0}$$

$$S = S_0 S^* \quad t = \frac{S_0}{V_0} t^*$$

$$S_0 S^* = S_0 + V_0 \frac{S_0}{V_0} t^* + \frac{1}{2} g \frac{S_0^2}{V_0^2} t^{*2}$$

$$S^* = 1 + t^* + \alpha t^{*2}$$

$$\alpha = \frac{g S_0}{V_0^2}$$

V_0, g

$$S^{**} = \frac{g S}{V_0^2} \quad t^{**} = \frac{g t}{V_0}$$

$$S = \frac{V_0^2}{g} S^{**} \quad t = \frac{V_0}{g} t^{**}$$

$$\frac{V_0^2}{g} S^{**} = S_0 + V_0 \frac{V_0}{g} t^{**} + \frac{1}{2} g \frac{V_0^2}{g^2} t^{**2}$$

$$S^{**} = S_0 \frac{g}{V_0^2} + V_0 \frac{V_0}{g} \frac{g}{V_0^2} t^{**} + \frac{1}{2} g \frac{V_0^2}{g^2} \frac{g}{V_0^2} t^{**2}$$

$$S^{**} = \alpha + t^{**} + \frac{1}{2} t^{**2}$$

$$\alpha = \frac{g S_0}{V_0^2}$$

S_0, g

$$S^{***} = \frac{S}{S_0} \quad t^{***} = \sqrt{\frac{g}{S_0}} t$$

$$S = S_0 S^{***} \quad t = \left(\frac{S_0}{g} \right)^{1/2} t^{***}$$

$$S_0 S^{***} = S_0 + V_0 \left(\frac{S_0}{g} \right)^{1/2} t^{***} + \frac{1}{2} g \left(\frac{S_0}{g} \right) t^{***2}$$

$$S^{***} = 1 + V_0 \left(\frac{S_0}{g} \right)^{1/2} \frac{1}{S_0} t^{***} + \frac{1}{2} g \left(\frac{S_0}{g} \right) \frac{1}{S_0} t^{***2}$$

$$S^{***} = 1 + \beta t^{***} + \frac{1}{2} t^{***2}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{V_0}{\sqrt{g S_0}}$$

Equazioni adimensionalizzate

TEOREMA DI BUCKINGHAM

La forza F su un corpo immerso in una corrente fluida dipende dalla lunghezza del corpo L , la velocità del flusso U , la densità del fluido ρ e la viscosità del fluido μ :

$$F = f(L, U, \rho, \mu)$$

5 variabili le cui dimensioni sono:

F	L	U	ρ	μ
$\{MLT^{-2}\}$	$\{L\}$	$\{LT^{-1}\}$	$\{ML^{-3}\}$	$\{ML^{-1}T^{-1}\}$

3 grandezze MLT

2 gruppi adimensionali

Equazioni adimensionalizzate

TEOREMA DI BUCKINGHAM

$$\pi_1 = L^a U^b \rho^c F = \{L\}^a \{LT^{-1}\}^b \{ML^{-3}\}^c \{MLT^{-2}\} = \{M^0 L^0 T^0\}$$

$$\begin{cases} c+1=0 \\ a+b-3c+1=0 \\ -b-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\pi_1 = L^{-2} U^{-2} \rho^{-1} F = \frac{F}{\rho U^2 L^2} = C_F$$

$$\longrightarrow C_F = g(\text{Re})$$

$$\pi_2 = L^a U^b \rho^c \mu = \{L\}^a \{LT^{-1}\}^b \{ML^{-3}\}^c \{ML^{-1}T^{-1}\} = \{M^0 L^0 T^0\}$$

$$\begin{cases} c+1=0 \\ a+b-3c-1=0 \\ -b-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\pi_2 = L^{-1} U^{-1} \rho^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho U L} = \frac{1}{\text{Re}}$$

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Numero di Reynolds	$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$	$\frac{\text{inerzia}}{\text{viscosità}}$	Sempre
Numero di Mach	$M = \frac{U}{c}$	$\frac{\text{velocità del flusso}}{\text{velocità del suono}}$	Flusso compressibile
Numero di Froude	$Fr = \frac{U^2}{gL}$	$\frac{\text{inerzia}}{\text{gravità}}$	Flusso con superficie libera
Numero di Weber	$We = \frac{\rho U^2 L}{\gamma}$	$\frac{\text{inerzia}}{\text{tensione superficiale}}$	Flusso con superficie libera
Numero di Eulero o cifra di cavitazione	$Eu = \frac{p}{\rho U^2}$	$\frac{\text{pressione}}{\text{inerzia}}$	Cavitazione
Numero di Prandtl	$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$	$\frac{\text{dissipazione}}{\text{conduzione}}$	Convezione di calore
Numero di Eckert	$Ec = \frac{U^2}{c_p T_0}$	$\frac{\text{energia cinetica}}{\text{entalpia}}$	Dissipazione

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Rapporto dei calori specifici	$k = \frac{c_p}{c_v}$	$\frac{\text{entalpia}}{\text{energia interna}}$	Flusso compressibile
Numero di Strouhal	$St = \frac{\omega L}{U}$	$\frac{\text{oscillazione}}{\text{velocità media}}$	Flusso oscillante
Cifra di ruvidità	$\frac{\varepsilon}{L}$	$\frac{\text{ruvidità parete}}{\text{lunghezza del corpo}}$	Turbolenza, pareti ruvide
Numero di Grashof	$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\frac{\text{galleggiamento}}{\text{viscosità}}$	Convezione naturale
Cifra di temperatura	$\frac{T_w}{T_0}$	$\frac{\text{temperatura parete}}{\text{temperatura del flusso}}$	Trasferimento di calore

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Coefficiente di pressione	$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2}$	$\frac{\text{pressione statica}}{\text{pressione dinamica}}$	Aerodinamica, idrodinamica
Coefficiente di portanza	$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$	$\frac{\text{portanza}}{\text{forza dinamica}}$	Aerodinamica, idrodinamica
Coefficiente di resistenza	$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$	$\frac{\text{resistenza}}{\text{forza dinamica}}$	Aerodinamica, idrodinamica

Equazioni adimensionalizzate

Adimensionalizzazione dell'equazione di continuità per flussi incomprimibili

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad z^* = \frac{z}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty} \quad w^* = \frac{w}{U_\infty}$$

$$\frac{U_\infty}{L} \nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0$$



$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0}$$

Equazioni adimensionalizzate

Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes per flussi incomprimibili

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad z^* = \frac{z}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty} \quad w^* = \frac{w}{U_\infty}$$

$$t^* = t \frac{U_\infty}{L} \quad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2}$$

$$\rho \frac{U_\infty^2}{L} \frac{D\mathbf{u}^*}{Dt^*} = -\rho \frac{U_\infty^2}{L} \nabla p^* + \mu \frac{U_\infty}{L^2} \Delta \mathbf{u}^* + \rho \mathbf{g} \quad \cdot 1 / \left(\rho \frac{U_\infty^2}{L} \right)$$

$$\frac{D\mathbf{u}^*}{Dt^*} = -\nabla p^* + \frac{\mu}{\rho U_\infty L} \Delta \mathbf{u}^* + \frac{gL}{U_\infty^2} \hat{\mathbf{e}}$$



$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}^*}{Dt^*} = -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^* + \frac{1}{\text{Fr}} \hat{\mathbf{e}}}$$

Equazioni adimensionalizzate

Equazioni che governano il flusso compressibile (bidimensionale)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \rho F_{mx}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \rho F_{my}$$

$$\rho \frac{\partial(c_p T)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial(c_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(c_p T)}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial t} - u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho \dot{q} + \mu \left(2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \rho \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u}$$

Equazioni adimensionalizzate

Equazioni che governano il flusso compressibile adimensionalizzate

Consideriamo un flusso comprimibile bidimensionale stazionario, viscoso, trascurando le forze di massa e assumendo nessuna generazione di calore

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\rho_\infty U_\infty}{L} \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\rho_\infty U_\infty}{L} \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0$$

Equazioni adimensionalizzate

Equazioni che governano il flusso compressibile adimensionalizzate

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty} \quad p^* = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \rightarrow$$

$$\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L} \rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L} \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu_\infty U_\infty}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \mu^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] \rightarrow$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{L}{\rho_\infty U_\infty^2} \frac{\mu_\infty U_\infty}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \mu^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] \rightarrow$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty L} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \mu^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] \rightarrow$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{2}{3} \mu^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right]$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3} \mu^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* \right) \right]$$

Equazioni adimensionalizzate

Equazioni che governano il flusso compressibile adimensionalizzate

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty} \quad p^* = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} \quad T^* = \frac{T}{T_\infty} \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty} \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} \quad c_p^* = \frac{c_p}{c_{p_\infty}} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L}$$

$$\rho u \frac{\partial(c_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(c_p T)}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) +$$

$$\mu \left(2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\rho_\infty U_\infty c_{p_\infty} T_\infty}{L} \left(\rho^* u^* \frac{\partial(c_p^* T^*)}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial(c_p^* T^*)}{\partial y^*} \right) = \frac{U_\infty \rho_\infty U_\infty^2}{L} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) +$$

$$\frac{\lambda_\infty T_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right) + \frac{\mu_\infty U_\infty^2}{L^2} \mu^* \left(2 \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) \rightarrow$$

Equazioni adimensionalizzate

Equazioni che governano il flusso compressibile adimensionalizzate

$$\begin{aligned} \rho^* u^* \frac{\partial(c_p^* T^*)}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial(c_p^* T^*)}{\partial y^*} &= \frac{U_\infty \rho_\infty U_\infty^2}{L} \frac{L}{\rho_\infty U_\infty c_{p\infty} T_\infty} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) + \\ &\frac{\lambda_\infty T_\infty}{L^2} \frac{L}{\rho_\infty U_\infty c_{p\infty} T_\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right) + \\ &\frac{\mu_\infty U_\infty^2}{L^2} \frac{L}{\rho_\infty U_\infty c_{p\infty} T_\infty} \mu^* \left(2 \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^* u^* \frac{\partial(c_p^* T^*)}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial(c_p^* T^*)}{\partial y^*} &= \frac{U_\infty^2}{c_{p\infty} T_\infty} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) + \\ &\frac{\lambda_\infty}{\rho_\infty U_\infty L c_{p\infty}} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right) + \\ &\frac{\mu_\infty U_\infty}{\rho_\infty L c_{p\infty} T_\infty} \mu^* \left(2 \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) \rightarrow \end{aligned}$$

Equazioni adimensionalizzate

Equazioni che governano il flusso compressibile adimensionalizzate

$$\frac{\lambda_{\infty}}{\rho_{\infty} U_{\infty} L c_{p\infty}} = \frac{\lambda_{\infty}}{\rho_{\infty} U_{\infty} L c_{p\infty}} \frac{\mu_{\infty}}{\mu_{\infty}} = \frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} U_{\infty} L} \frac{\lambda_{\infty}}{\mu_{\infty} c_{p\infty}} = \frac{1}{\text{Re}_{\infty} \text{Pr}_{\infty}}$$

$$\frac{U_{\infty}^2}{c_{p\infty} T_{\infty}} = Ec_{\infty} = (k-1) M_{\infty}^2$$

$$\frac{\mu_{\infty} U_{\infty}}{\rho_{\infty} L c_{p\infty} T_{\infty}} = \frac{\mu_{\infty} U_{\infty}}{\rho_{\infty} L c_{p\infty} T_{\infty}} \frac{U_{\infty}}{U_{\infty}} = \frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} L U_{\infty}} \frac{U_{\infty}^2}{c_{p\infty} T_{\infty}} = \frac{Ec_{\infty}}{\text{Re}_{\infty}}$$

$$\begin{aligned} \rho^* \left(u^* \frac{\partial (c_p^* T^*)}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial (c_p^* T^*)}{\partial y^*} \right) &= Ec_{\infty} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) + \frac{1}{\text{Re}_{\infty} \text{Pr}_{\infty}} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right) + \\ &\quad \frac{Ec_{\infty}}{\text{Re}_{\infty}} \mu^* \left(2 \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Equazioni adimensionalizzate

Equazioni che governano il flusso compressibile adimensionalizzate

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right)$$

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial(c_p^* T^*)}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial(c_p^* T^*)}{\partial y^*} \right) = (k-1) M_\infty^2 \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) + \frac{1}{\text{Re}_\infty \text{Pr}_\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right) +$$

$$\frac{(k-1) M_\infty^2}{\text{Re}_\infty} \mu^* \left(2 \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)$$

Equazioni adimensionalizzate

Adimensionalizzazione delle condizioni al contorno

Fixed solid surface $\mathbf{u} = 0$, Known $\mathbf{u}, p$

Free surface $z = \eta$ $w = \frac{d\eta}{dt}$, $p = p_a - \gamma(R_x^{-1} + R_y^{-1})$

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_\infty} \quad t^* = t \frac{U_\infty}{L} \quad p^* = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2}$$

Fixed solid surface $\mathbf{u}^* = 0$, Known $\mathbf{u}^*, p^*$

Free surface $z^* = \eta^*$ $w^* = \frac{d\eta^*}{dt^*}$, $p^* = \frac{p_a}{\rho_\infty U_\infty^2} - \frac{\gamma}{\rho_\infty U_\infty^2 L} (R_x^{*-1} + R_y^{*-1})$



Fixed solid surface $\mathbf{u}^* = 0$, Known $\mathbf{u}^*, p^*$

Free surface $z^* = \eta^*$ $w^* = \frac{d\eta^*}{dt^*}$, $p^* = Eu - \frac{1}{We} (R_x^{*-1} + R_y^{*-1})$

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Numero di Reynolds
$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

interpretazione **dinamica**: rapporto fra forza d'inerzia e quella viscosa (di natura dissipativa)

Per valori molto piccoli di Re ($Re < 0.3$) problemi riguardanti la lubrificazione.
 Per valori molto grandi di Re problemi nei quali le forze viscosi possono essere trascurate rispetto a quelle d'inerzia.

interpretazione **cinematica**: rapporto fra la velocità U che effettivamente ha la massa del fluido e la velocità v/L con cui si propagano le azioni tangenziali all'interno del fluido.

Per valori molto grandi di Re , le tensioni tangenziali non si propagano in modo veloce, rimangono confinate in una zona molto ristretta vicina a quella in cui hanno origine (ad es. nell'interno dello strato limite di una parete).

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Numero di Froude $Fr = \frac{U^2}{gL}$

interpretazione **dinamica**: rapporto fra forza d'inerzia, agente sulla particella fluida, che è proporzionale a $\rho U^2 L^2$, e quella di gravità che è proporzionale a $\rho g L^3$.

Compare in tutti quei problemi nei quali il peso proprio della massa fluida non può essere trascurato rispetto alle altre forze, soprattutto quella d'inerzia.

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Numero di Mach
$$M = \frac{U}{c}$$

interpretazione **cinematica**: rapporto fra velocità: se $U < c$ ($M < 1$) il moto del fluido è detto **subsonico**, mentre invece se $U > c$ ($M > 1$) è detto **supersonico**.

La condizione di incompressibilità è accettabile in tutti quei fenomeni che si sviluppano con $M < 0.3$; infatti le variazioni relative di massa volumica risultano trascurabili rispetto a quelle di velocità e il fluido può essere considerato incompressibile. Un valore basso del numero di Mach può dipendere o dal fatto che il fluido ha una velocità bassa o dal fatto che la velocità del suono all'interno del fluido è elevata.

Rapporto dei calori specifici
$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Numero di Eckert $Ec = \frac{U^2}{c_p T}$

esprime la relazione tra l'energia cinetica del fluido e l'entalpia.

Il numero di Eckert viene utilizzato per caratterizzare l'influenza del riscaldamento di un fluido come conseguenza degli effetti di dissipazione. A velocità di flusso elevate, il profilo di temperatura in un flusso non è dominato solo dai gradienti di temperatura presenti, ma anche dagli effetti di dissipazione dovuti all'attrito interno del fluido. Ciò comporta un autoriscaldamento e quindi una variazione del profilo di temperatura.

Il numero di Eckert permette di giudicare se gli effetti del riscaldamento dovuti alla dissipazione possono essere trascurati ($Ec \ll 1$) o meno.

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Numero di Prandtl $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$

esprime il rapporto della diffusività cinematica rispetto alla diffusività termica per un fluido viscoso.

Valori tipici del numero di Prandtl sono:

- circa 0,015 per il mercurio
- circa 0,7 per l'aria e la maggior parte dei gas
- circa 7 per l'acqua (a 20°C)
- tra 100 e 40000 nel caso degli oli motore

NB. Un fluido ideale, per cui valgono le equazioni di Eulero, ha viscosità e conducibilità termica nulle, per cui il numero di Prandtl non è definito per questa classe di fluidi.

Numero di Nusselt $Nu = \frac{h}{\lambda} L$ esprime il rapporto tra il trasporto di calore per convezione e per conduzione

Equazioni adimensionalizzate

Numeri adimensionali

Numero di Weber
$$We = \frac{\rho U^2 L}{\gamma} = \frac{\rho U L}{\mu} \frac{\mu U}{\gamma} = Re \cdot Ca$$

mette in relazione la forza d'inerzia e la forza di tensione superficiale
(Ca numero di capillarità)

Numero di Eulero
$$Eu = \frac{p}{\rho U^2}$$

mette in relazione la forza d'inerzia e la forza di pressione.

Equazioni adimensionalizzate

Flussi oscillanti

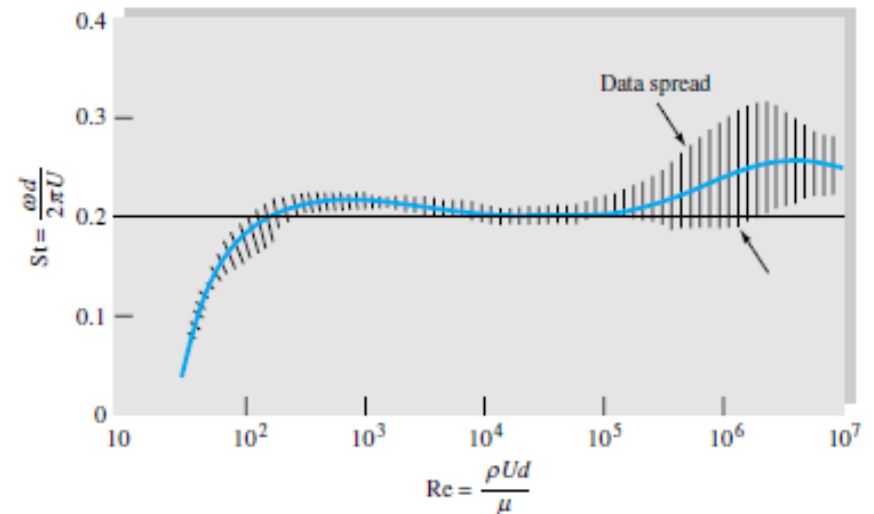
$$u = U \cos(\omega t) \quad \frac{u}{U} = u^* = \cos\left(\frac{\omega L}{U} t^*\right) = \cos(St t^*)$$

Vortici di von Karman

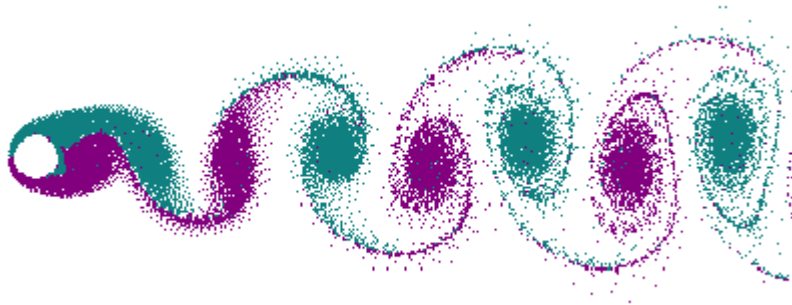
flusso attorno a un cilindro circolare

$$10^2 < Re < 10^7$$

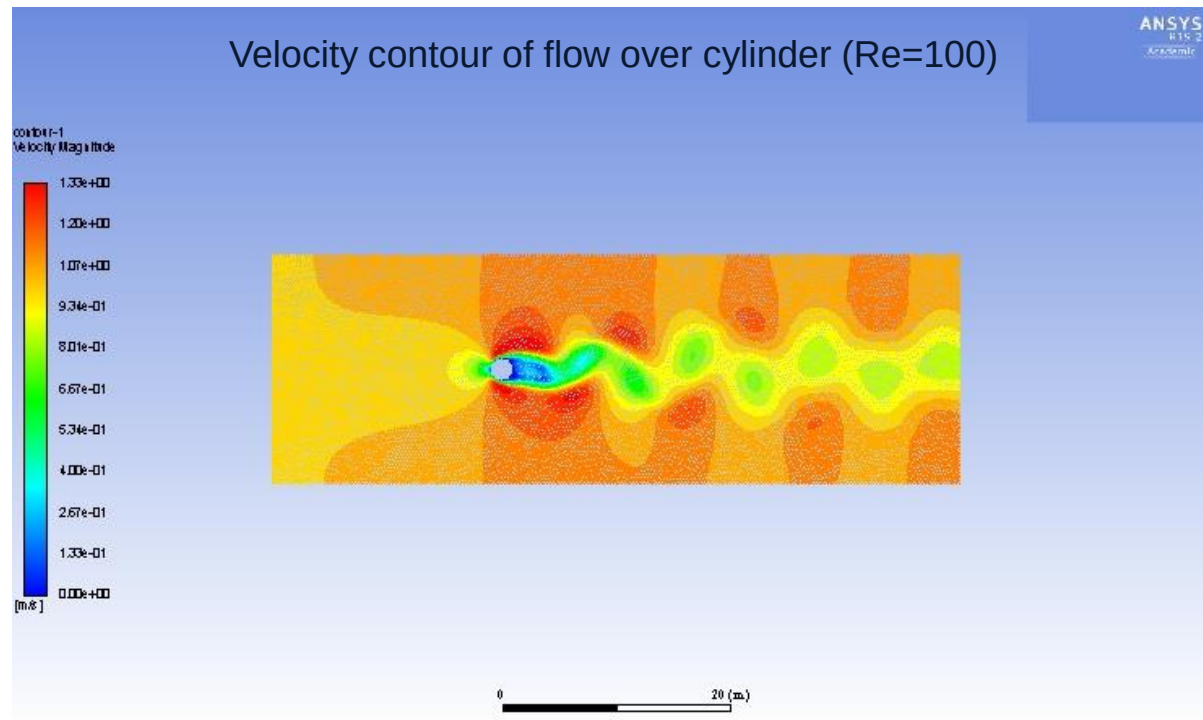
$$St = \frac{\omega d}{2\pi U} \approx 0.21$$



Equazioni adimensionalizzate



Animation representing the two-dimensional flow patterns behind a rounded obstacle, known as a Von Kármán vortex street



Equazioni adimensionalizzate

Se la frequenza delle scie vorticosi è vicina alla frequenza naturale di oscillazione della struttura immersa nel flusso il sistema può andare in RISONANZA. Un fenomeno di risonanza provoca in genere un aumento significativo dell'ampiezza delle oscillazioni, che corrisponde ad un notevole accumulo di energia all'interno del sistema sollecitato.



Tacoma Narrows Bridge collapse (1940).

Equazioni adimensionalizzate

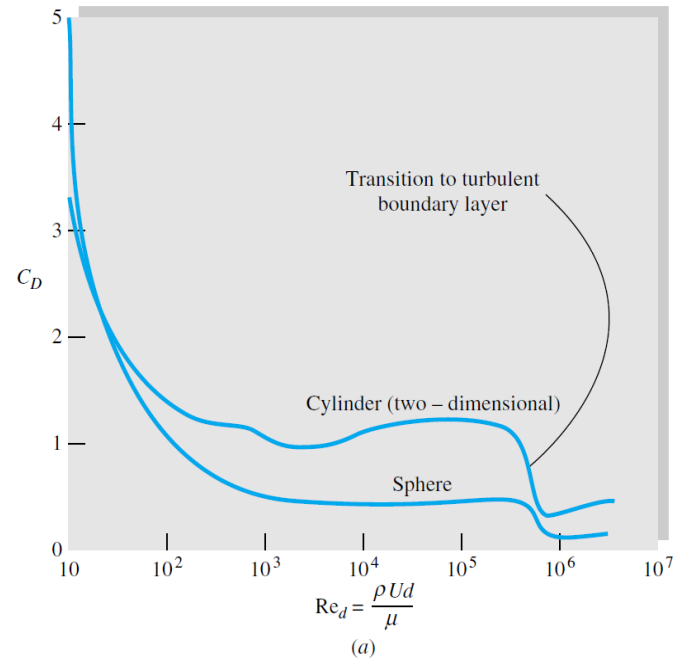
Applicazione dell'analisi dimensionale

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 L d} \quad \text{cilindro}$$

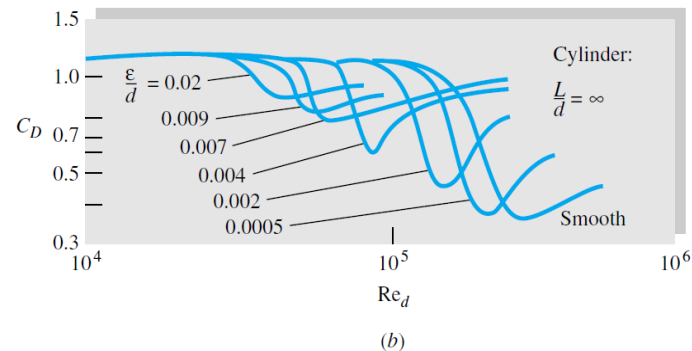
$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 \pi \frac{d^2}{4}} \quad \text{sfera}$$

$$C_D = f\left(\text{Re}_d, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{L}{d}\right)$$

Coefficiente di resistenza di un cilindro e una sfera: (a) coefficiente di resistenza di un cilindro e una sfera lisci; (b) l'aumento della rugosità causa una transizione anticipata a uno strato limite turbolento.



Cylinder length effect ($10^4 < \text{Re} < 10^5$)	
L/d	C_D
∞	1.20
40	0.98
20	0.91
10	0.82
5	0.74
3	0.72
2	0.68
1	0.64



Equazioni adimensionalizzate

Difficoltà ingegneristiche

Le condizioni di flusso per un test sul modello sono completamente simili a quelle del prototipo se tutti parametri adimensionali rilevanti hanno gli stessi corrispondenti valori per il modello e il prototipo.

Piuttosto che di similitudine completa si parla di

- similitudine geometrica
- similitudine cinematica
- similitudine dinamica

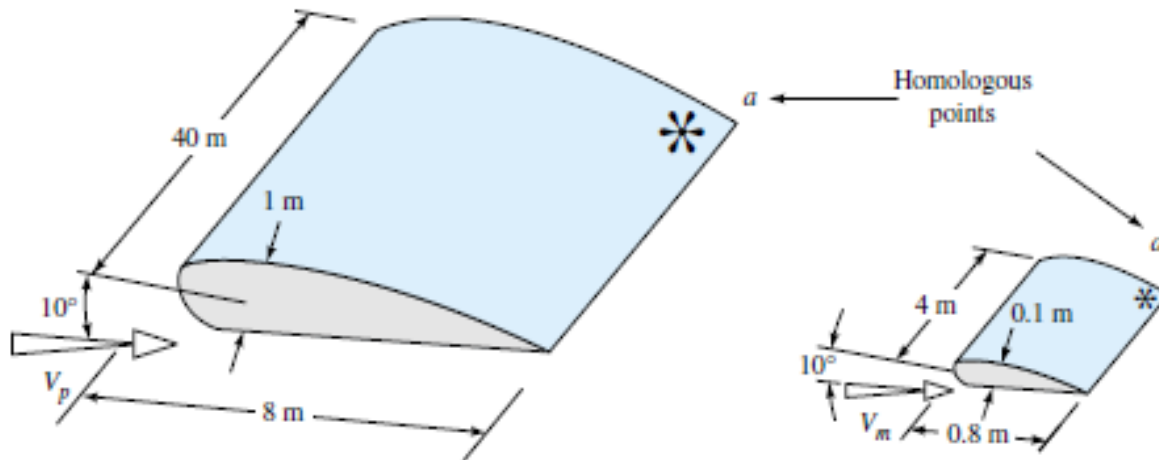
Equazioni adimensionalizzate

SIMILITUDINE GEOMETRICA

$$\frac{l_m}{l_p} = \alpha$$

Modello e prototipo sono geometricamente simili se e solo se tutte le dimensioni del corpo in tutte e tre le coordinate hanno lo stesso rapporto di scala (rapporto di scala spaziale).

Il modello conserva la stessa forma e orientazione del prototipo. Tutte le direzioni del flusso sono preservate.



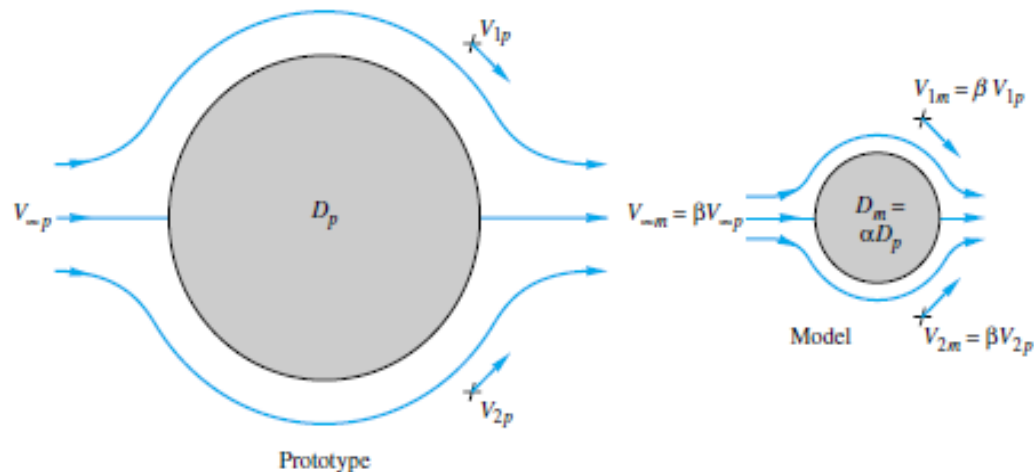
Equazioni adimensionalizzate

SIMILITUDINE CINEMATICA $\frac{V_m}{V_p} = \beta$

Modello e prototipo sono cinematicamente simili se e solo particelle omologhe giacciono in punti omologhi in tempi omologhi (rapporto di scala spaziale e temporale).

I regimi di flusso nel modello in scala e nel sistema reale, ovvero le loro linee di flusso sono simili.

Ad es. flusso incomprimibile non viscoso



Equazioni adimensionalizzate

SIMILITUDINE DINAMICA

Il modello e il prototipo hanno stesso rapporto di scala spaziale, temporale e di massa (forza).

I rapporti di tutte le forze che sono esercitate sulle particelle del fluido e sulle superfici di contorno del modello in scala e del sistema reale sono costanti.

La similitudine dinamica implica la similitudine geometrica e cinematica.

Per flussi comprimibili equivalenza di: Re , Ma , k

Per flussi incomprimibili equivalenza di:

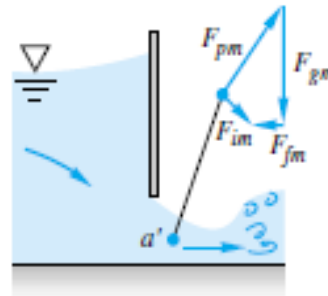
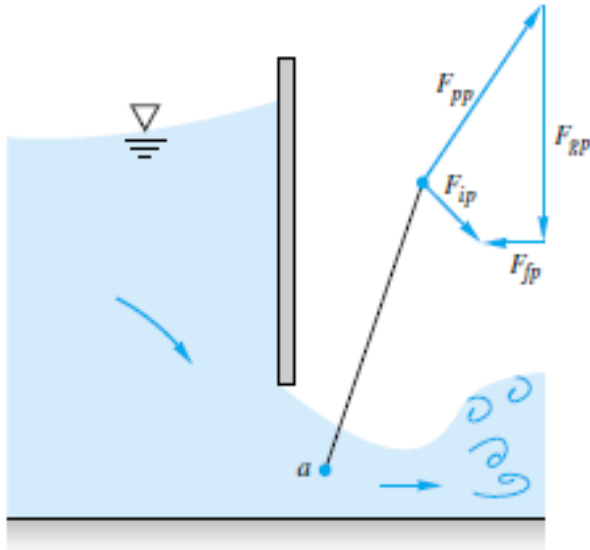
- senza superficie libera Re
- con superficie libera Re , Fr (We , Eu)

Equazioni adimensionalizzate

SIMILITUDINE DINAMICA

La perfetta similitudine dinamica è utopia.

Ad es. modello idraulico



$$Re = \frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p}$$

$$Fr = \frac{V_m^2}{gL_m} = \frac{V_p^2}{gL_p}$$

$$\frac{L_m}{L_p} = \alpha = 0.1$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\alpha}$$

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \alpha \sqrt{\alpha} = \alpha^{\frac{3}{2}} = 0.032$$

Equazioni adimensionalizzate

SIMILITUDINE DINAMICA

Ad es. modello aerodinamico

$$Re = \frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p}$$

$$M = \frac{V_m}{c_m} = \frac{V_p}{c_p}$$

$$\frac{L_m}{L_p} = \alpha$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{c_m}{c_p}$$

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{L_m}{L_p} \frac{c_m}{c_p} = \alpha \frac{c_m}{c_p}$$

