A.A. 2025-2026 ELEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA PER LE MACCHINE

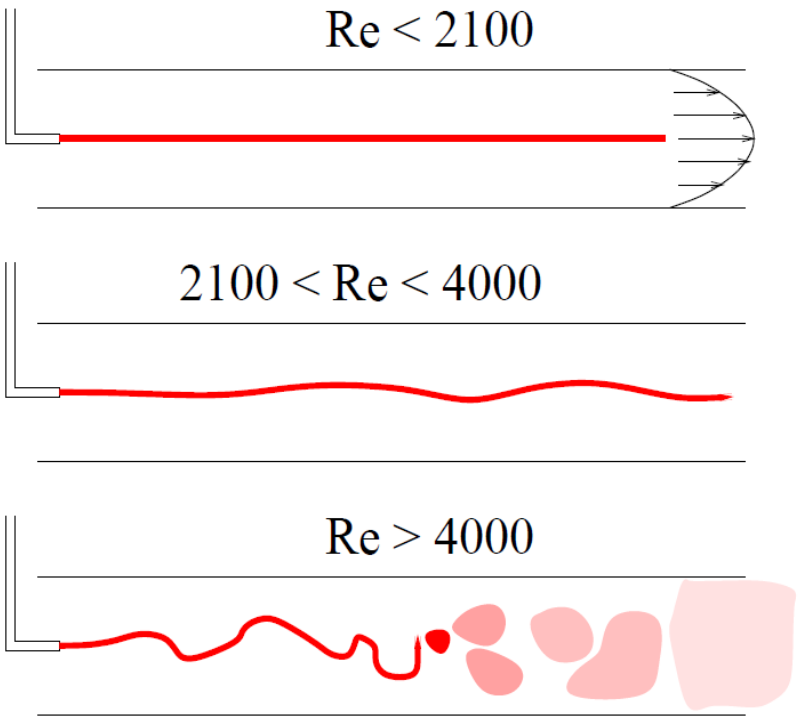
Lucia Parussini

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università degli Studi di Trieste

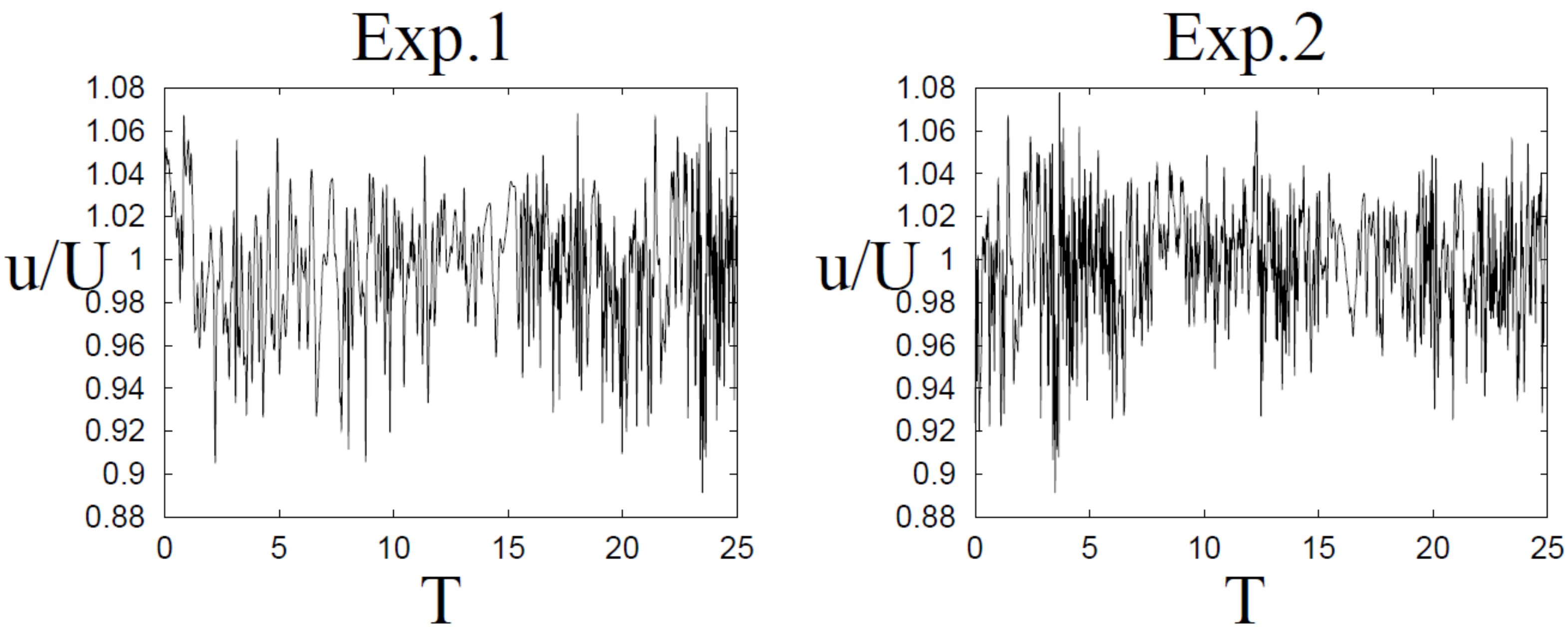
Via Valerio 10 - 34127 Trieste - ITALY

E-mail: lparussini@units.it

Turbolenza



Turbolenza



Exp.1
Exp.2
u/U
1.08
1.06
1.04
1.02
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
0.88
0
5
10
15
20
25
T

Turbolenza

Lorenz nel 1963 mostrò che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri di partenza determinano rapidamente soluzioni completamente differenti.

L'attrattore di Lorenz fu il primo esempio di un sistema di equazioni differenziali a bassa dimensionalità in grado di generare un comportamento caotico.

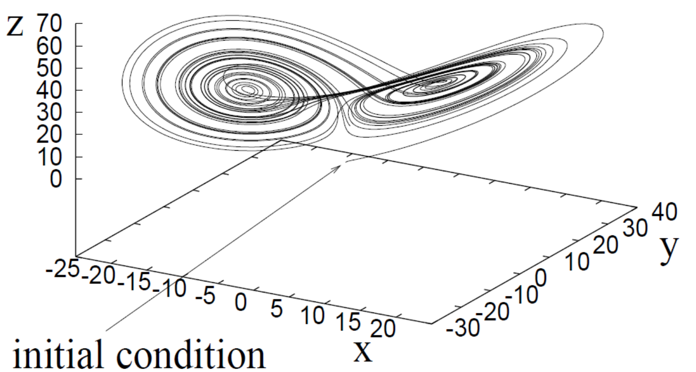
Semplificando le equazioni del moto alle derivate parziali che descrivono il movimento termico di convezione di un fluido, Lorenz ottenne un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine:

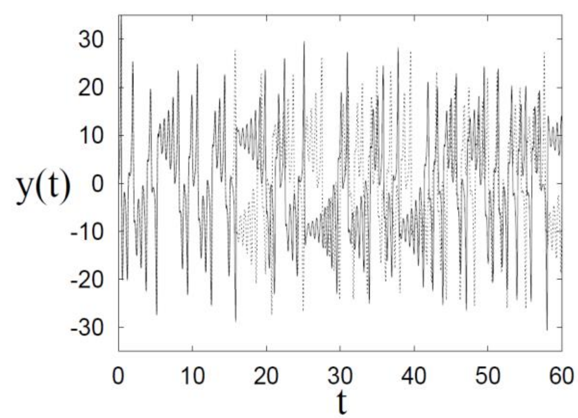
$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad \dot{y} = \rho x - y - xz \quad \dot{z} = -\beta z + xy$$

$$\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 35$$

$$x(0) = 0.5, y(0) = 0.1, z(0) = 0.3 \longrightarrow y(0) = 0.100001$$

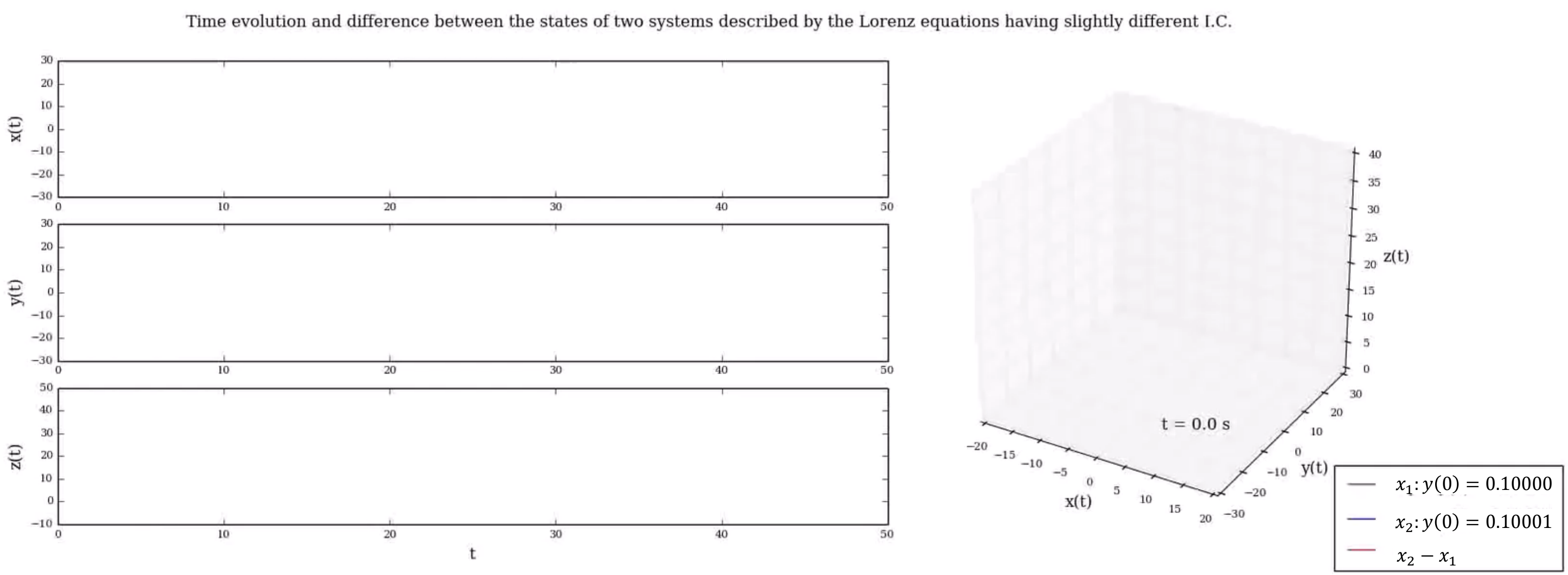
con σ numero di Prandtl, ρ numero di Rayleigh.





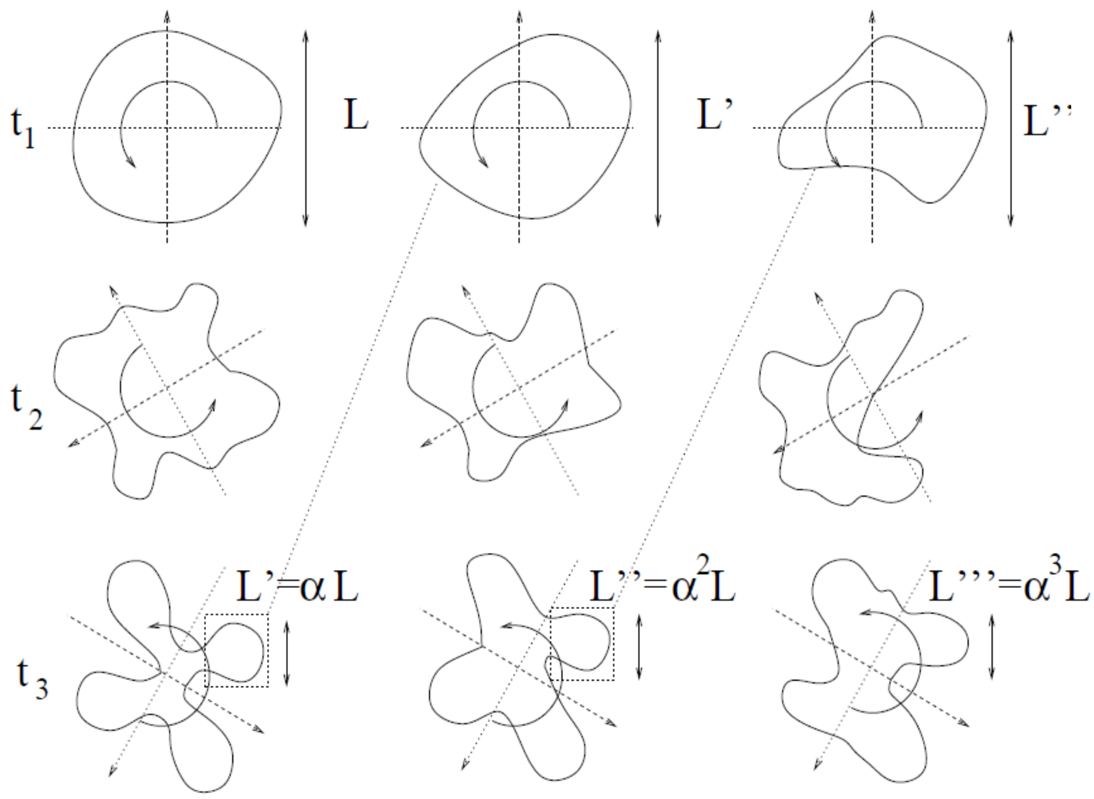
Turbolenza

Lorenz nel 1963 mostrò che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri di partenza determinano rapidamente soluzioni completamente differenti.



Turbolenza

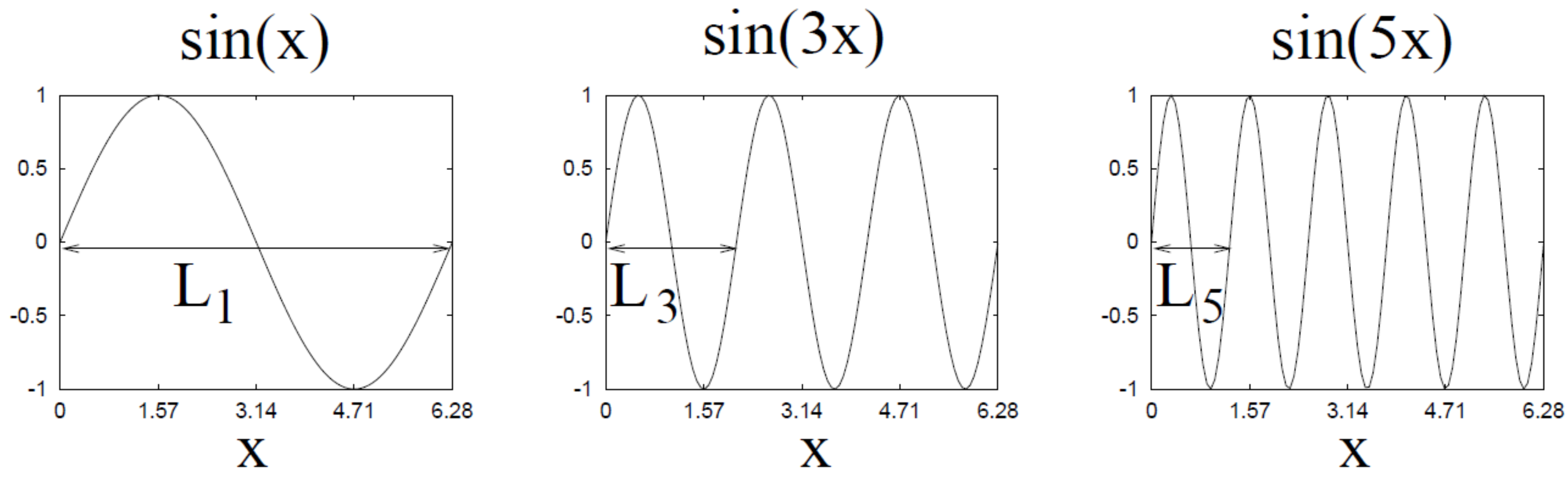
Cascata di energia



Turbolenza

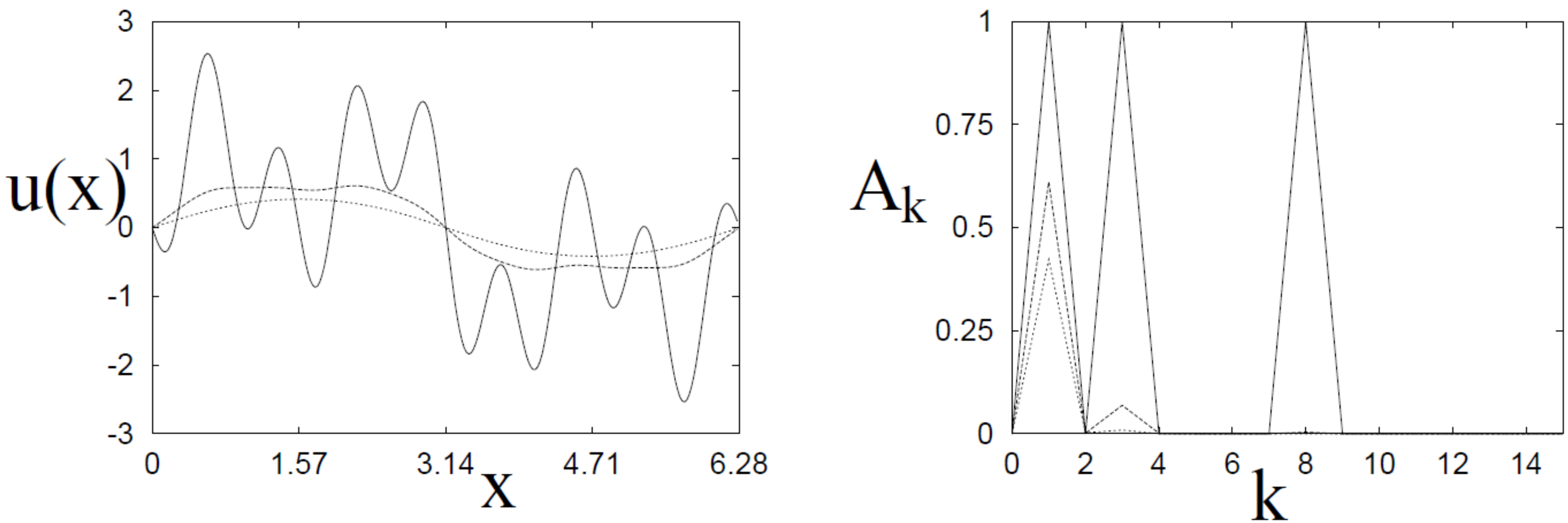
Equazione di Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



Turbolenza

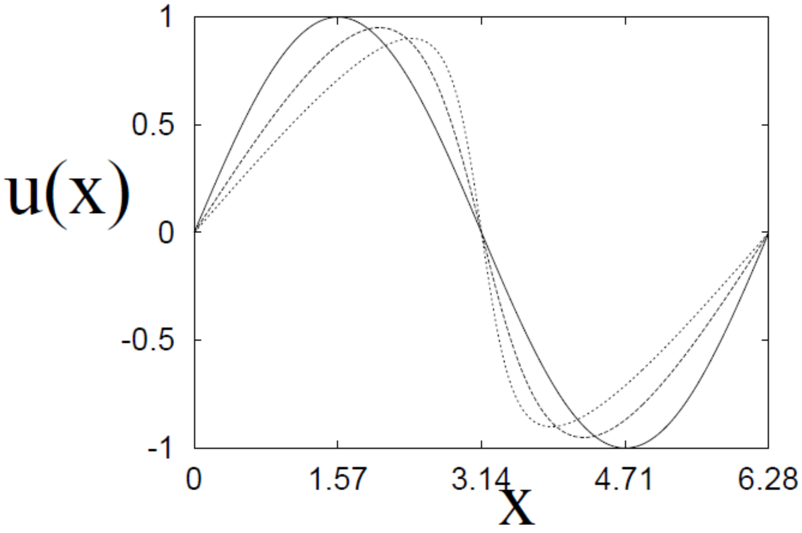
Equazione di Burgers

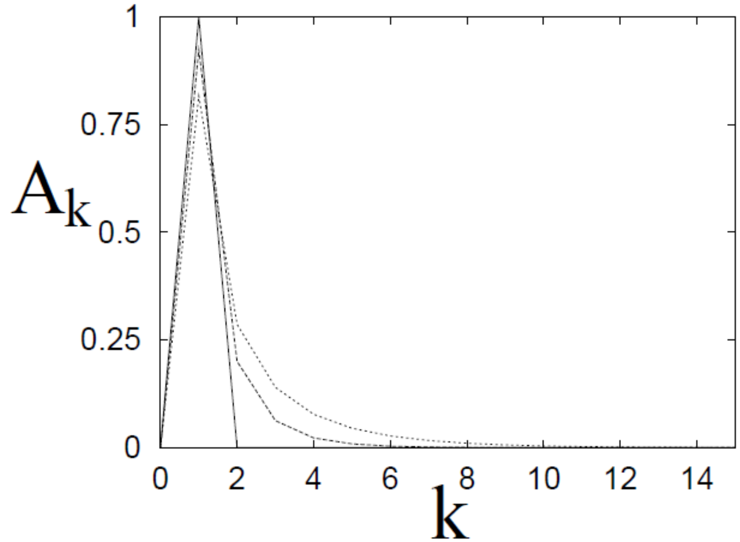


Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers (senza i termini non-lineari) $\nu = 10$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x; t)$, rispettivamente per $t = 0$, $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

Turbolenza

Equazione di Burgers

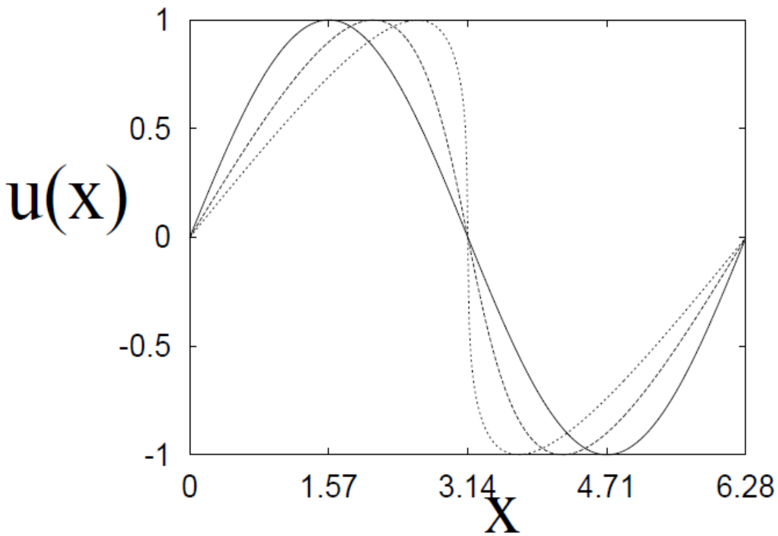


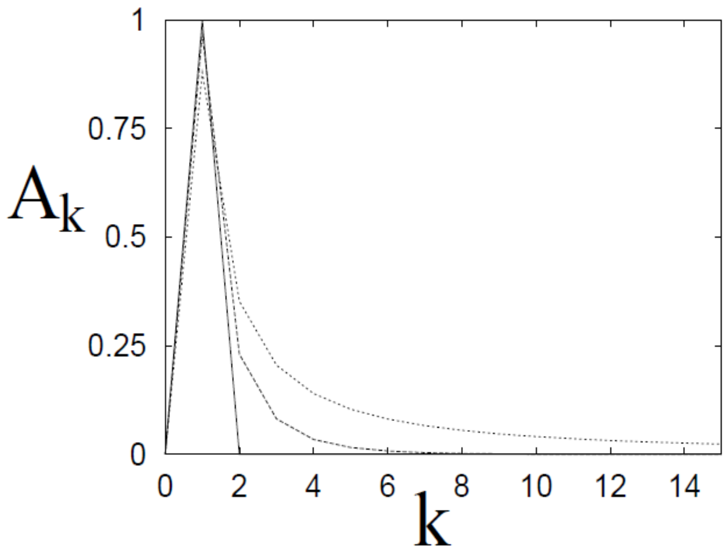


Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers $\nu = 10^{-1}$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x; t)$, rispettivamente per $t = 0$, $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

Turbolenza

Equazione di Burgers





Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers $\nu = 10^{-3}$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x; t)$, rispettivamente per $t = 0$, $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

Turbolenza

Significato fisico dei termini delle equazioni di Navier-Stokes

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{u}+\rho\mathbf{f}$$

$$K=\frac{1}{2}\int_V \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}dV=\frac{1}{2}\rho\int_V |\mathbf{u}|^2 dV$$

Energia cinetica di un volume di fluido

Equazione di bilancio dell’energia cinetica

$$\frac{dK}{dt}=\rho\int_V \mathbf{u}\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}dV=\int_V \mathbf{u}\cdot\left(-\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{u}+\rho\mathbf{f}\right)dV$$

$$=\int_V\left(-\mathbf{u}\cdot\left(\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)-\mathbf{u}\cdot\nabla p+\mu\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u}+\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\right)dV$$

$$-\mathbf{u}\cdot\left(\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)=-\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\cdot\left(\mathbf{u}\mathbf{u}\right)=-\frac{1}{2}\rho\nabla\cdot\left(\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2\right)$$

$$-\mathbf{u}\cdot\nabla p=-\nabla\cdot\left(p\mathbf{u}\right)$$

(per l’equazione di continuità)

$$\mu\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u}=\mu\left(\nabla\cdot\left(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\right)-|\nabla\mathbf{u}|^2\right)$$

Turbolenza

Significato fisico dei termini delle equazioni di Navier-Stokes

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left(-\mathbf{u} \cdot (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mu \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \right) dV$$

$$= \int_V \left(-\frac{1}{2} \rho \nabla \cdot \left(\mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \right) - \nabla \cdot (p \mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \right) dV$$

$$= \int_S \left(-\frac{1}{2} \rho \left(\mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \right) - p \mathbf{u} + \rho \nu (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right) dS + \int_V \left(-\rho \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \right) dV$$

L'integrale di superficie è posto uguale a zero in quanto le componenti di velocità o si annullano all'infinito oppure in corrispondenza del contorno o le condizioni sono periodiche.

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_V \rho \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 dV$$

$$\boxed{\frac{dK}{dt} = \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_V \rho \varepsilon dV}$$

$\varepsilon = \nu |\nabla \mathbf{u}|^2$ Energia cinetica dissipata per unità di massa e per unità di tempo

Turbolenza

Significato fisico dei termini delle equazioni di Navier-Stokes

- I termini convettivi e di pressione non alterano il bilancio globale di energia ma agiscono solo sul suo trasferimento.

- Risultando la velocità di dissipazione definita positiva, si ha continua diminuzione di energia cinetica del sistema a causa di questo termine.

- Si potrebbe pensare che per numeri di Reynolds molto elevati il termine viscoso diventa trascurabile e l'energia cinetica si conserva in assenza di lavoro delle forze di massa. Le cose non stanno in questo modo in quanto quando la viscosità diminuisce decresce anche la dimensione minima delle scale di moto che si generano nel flusso e quindi aumentano i gradienti.

- Solamente delle forze non conservative possono contribuire al bilancio di energia cinetica.

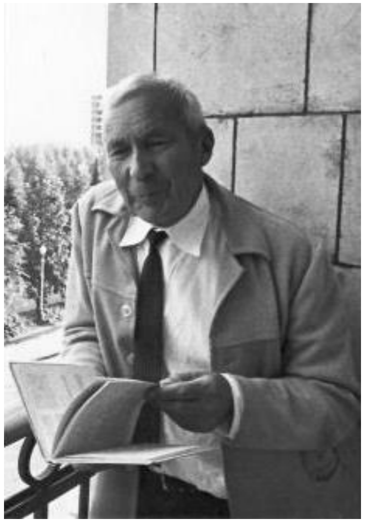
Turbolenza

Turbolenza omogenea e isotropa

descrizione qualitativa → descrizione quantitativa

- quanto piccole sono le dimensioni a cui prevalgono gli effetti viscosi?
- cosa succede tra le scale in cui l'energia viene immessa nel flusso e quelle a cui viene dissipata?

Questi quesiti hanno trovato una risposta solo recentemente quando **Kolmogorov** nel 1941 ha pubblicato i risultati di una sua teoria applicabile alla turbolenza omogenea ed isotropa.



Andrej Nikolaevič Kolmogorov
(1903-1987) matematico russo.

Turbolenza

Turbolenza omogenea e isotropa

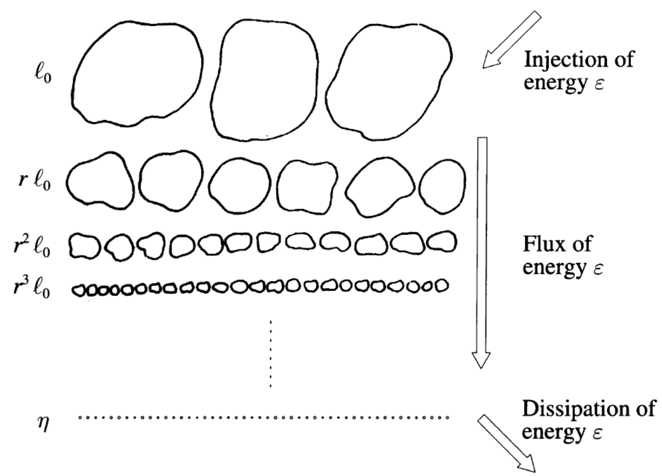
PRIMA IPOTESI: per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le strutture fluidodinamiche piccole in un flusso turbolento sono statisticamente isotrope.

SECONDA IPOTESI: per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le caratteristiche delle piccole scale di tutti i flussi turbolenti sono universali e sono determinate dalla viscosità ν e dalla potenza dissipata per unità di massa ε.

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$ **scala di lunghezza di Kolmogorov**

$$u_\eta = (\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$$ **scala di velocità di Kolmogorov**

$$t_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$ **scala di tempo di Kolmogorov**



TERZA IPOTESI: per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le caratteristiche delle strutture di dimensione r ($\eta << r << L$) sono universali e dipendono unicamente dalla potenza dissipata per unità di massa ε.

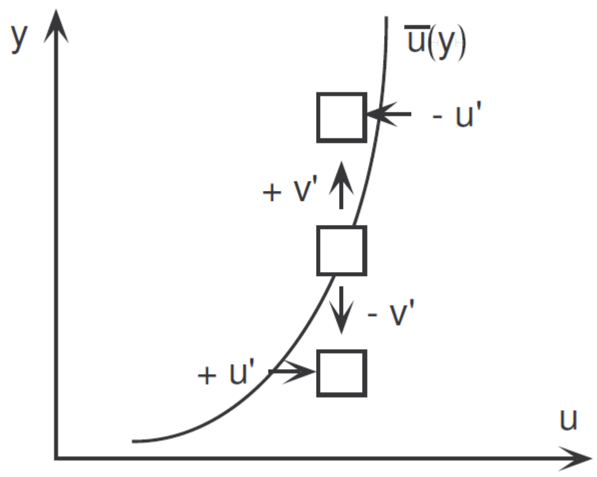
Turbolenza

Equazioni di Reynolds

METODO DEI PICCOLI DISTURBI

$$u = \overline{u} + u' \quad v = \overline{v} + v' \quad w = \overline{w} + w' \quad p = \overline{p} + p'$$

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = \overline{p'} = 0$$



$$\overline{u'v'} < 0$$

Turbolenza

Equazioni di Reynolds

METODO DEI PICCOLI DISTURBI

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\mu\Delta\overline{u}-\rho\left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right)+\rho\overline{f_{mx}}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}+\mu\Delta\overline{v}-\rho\left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right)+\rho\overline{f_{my}}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}+\mu\Delta\overline{w}-\rho\left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z}\right)+\rho\overline{f_{mz}}$$

Turbolenza

Equazioni di Reynolds

METODO DEI PICCOLI DISTURBI

$$\overset{=(t)}{\boldsymbol{\sigma}} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$$

tensore delle tensioni di Reynolds

$$\sigma_{ij}^{(l)} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\sigma_{ij}^{(t)} = -\rho\overline{u'_i\, u'_j} = \mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

μ_t non è una proprietà del fluido ma dipende dallo stato di turbolenza

Turbolenza

Equazioni di Reynolds

METODO DEI PICCOLI DISTURBI

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0$$

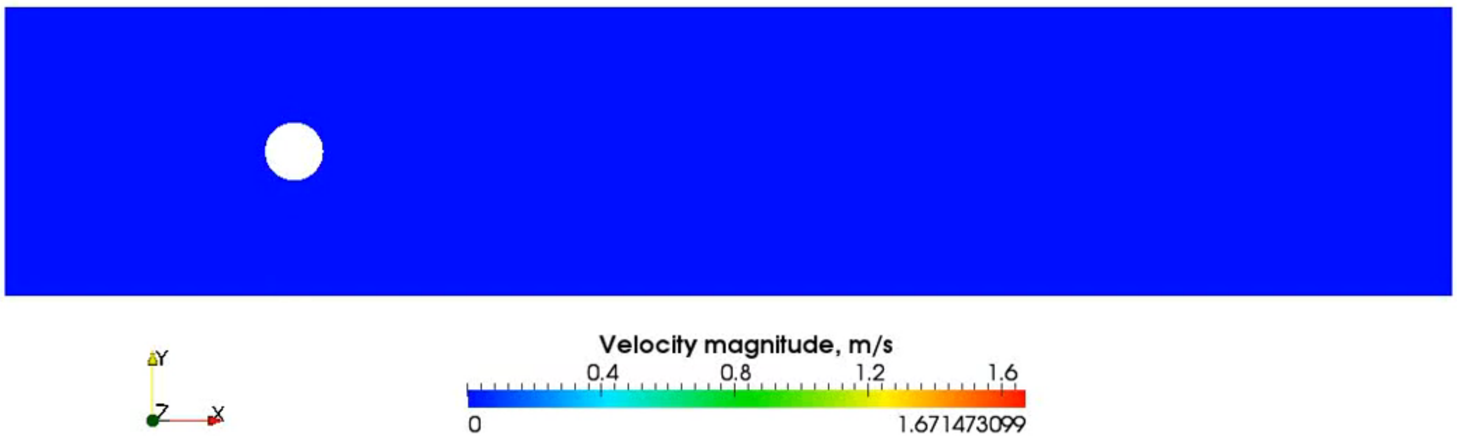
$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+(\mu+\mu_t)\Delta\bar{u}+\rho\overline{f_{mx}}$$

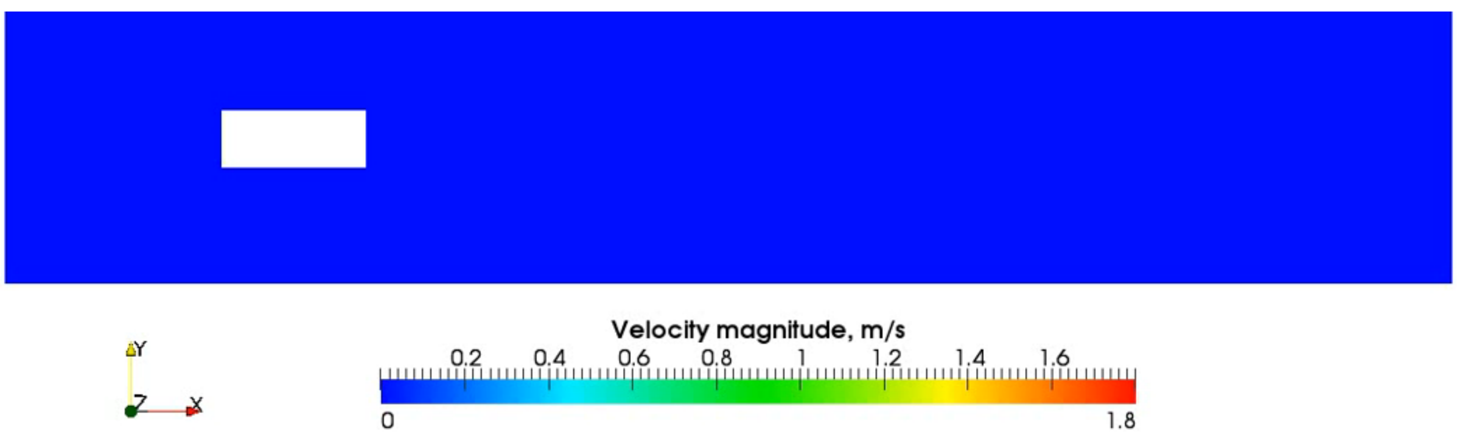
$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+(\mu+\mu_t)\Delta\bar{v}+\rho\overline{f_{my}}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+(\mu+\mu_t)\Delta\bar{w}+\rho\overline{f_{mz}}$$

Turbolenza

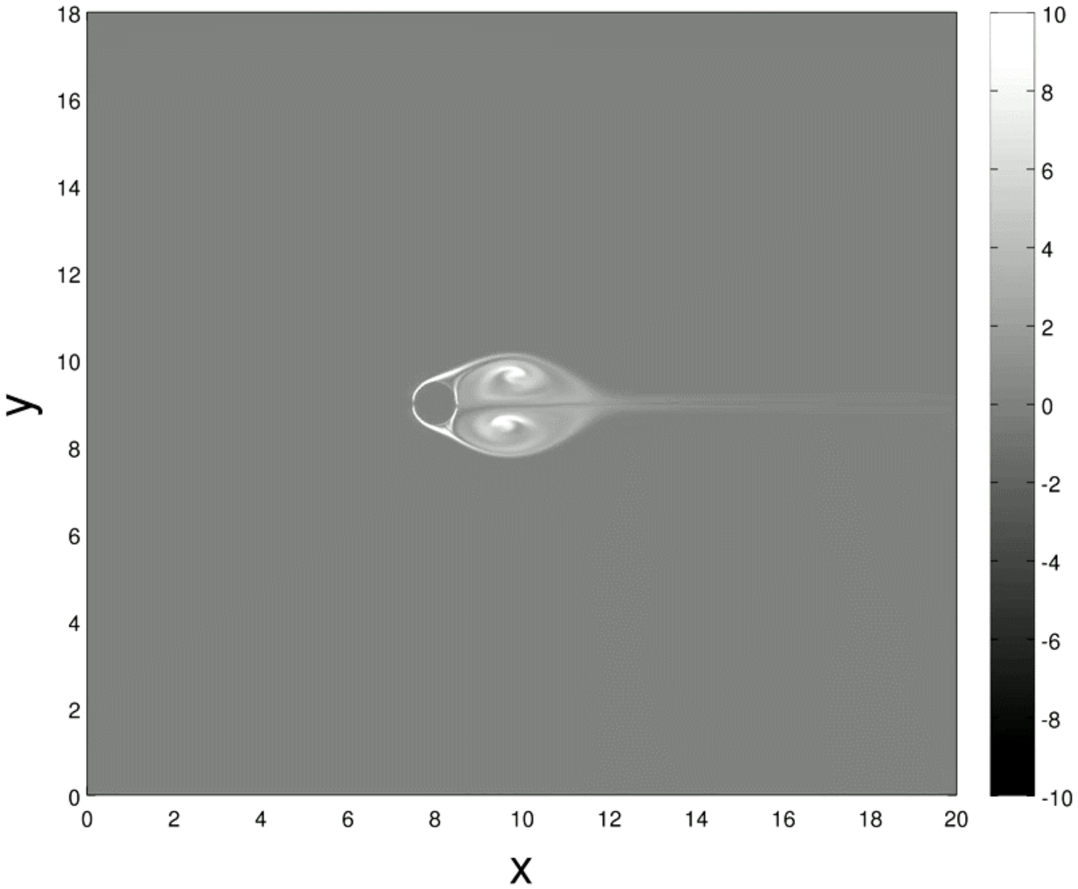
RANS (k-epsilon)





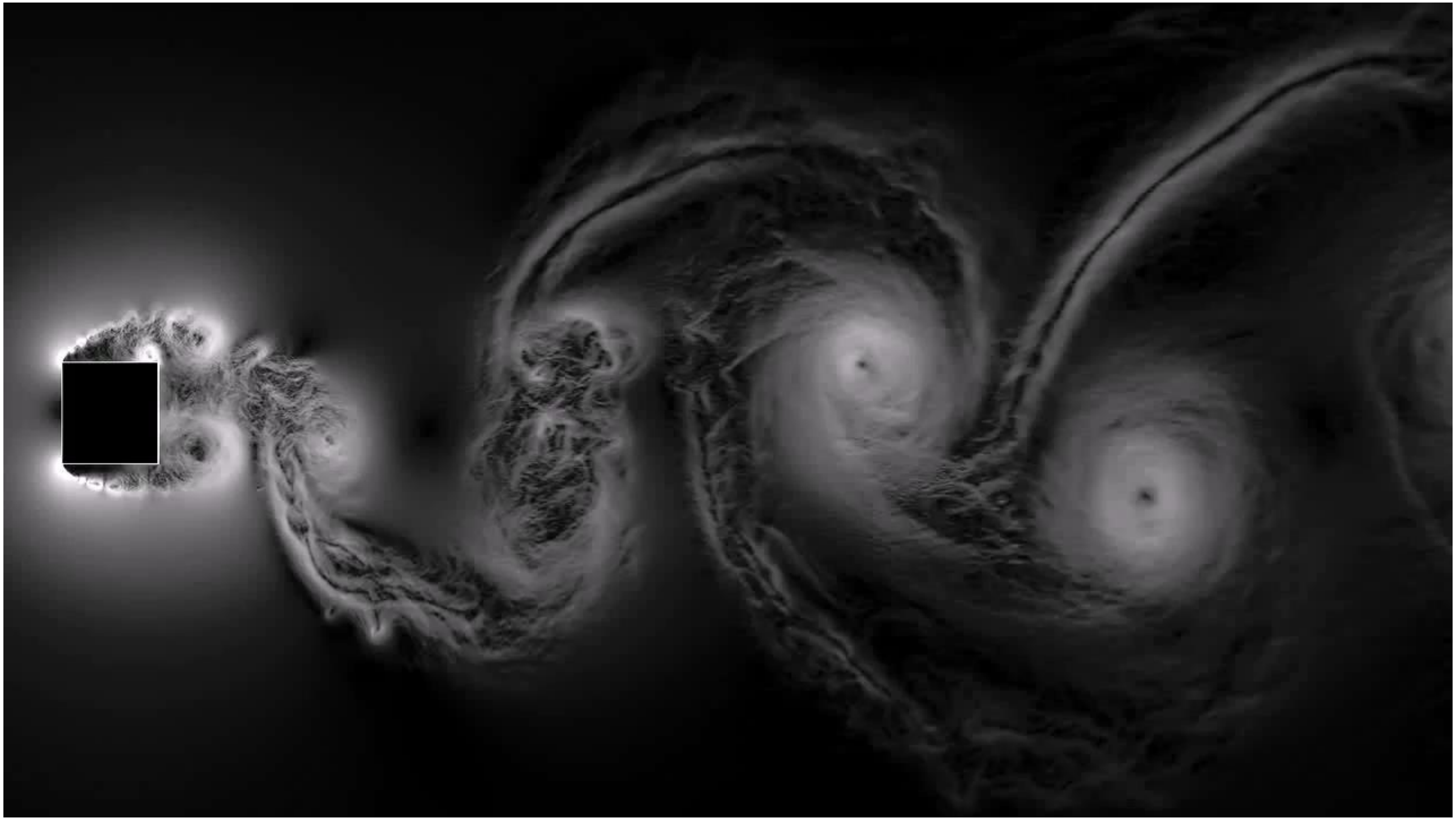
Turbolenza

DNS



Turbolenza

DNS



Turbolenza

LES