

CAPITOLO 1

PROPRIETÀ FISICHE DEI FLUIDI

- 1.0.- RICHIAMI TEORICI
- 1.1.- PARAMETRI DI STATO
- 1.2.- TRASFORMAZIONI
- 1.3.- COMPRESSIBILITÀ
- 1.4.- VISCOSITÀ

1.0.- RICHIAMI TEORICI

Massa

La massa m di un corpo, espressa in [kg], rappresenta una sua caratteristica invariante, se non si verificano trasformazioni a livello microscopico atomico, che assume o un aspetto di tipo "inerziale" quando compare nella seconda legge della dinamica o un aspetto di tipo "gravitazionale" quando invece compare nella legge di gravitazione universale di Newton.

Massa volumica o densità di massa o densità

Per definizione la massa volumica o densità di massa o densità ρ è data da

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

dove dm è la massa infinitesima in [kg] compresa nel volume infinitesimo dV in [m^3]. Integrata per valori costanti, la relazione precedente diventa

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]. \quad (1.1)$$

Volume specifico

Per definizione il volume specifico v è dato da

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m} \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]. \quad (1.2)$$

Data l'invariabilità della massa, la derivata del volume specifico diventa

$$dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2} \quad dv = d\left(\frac{V}{m}\right) = \frac{1}{m} dV$$

e quindi

$$\frac{dv}{v} = \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}. \quad (1.3)$$

Peso

Per definizione il peso G è dato da

$$G = m g \quad [\text{N}] \quad (1.4)$$

dove g è l'accelerazione di gravità in [m/s^2].

Peso specifico

Per definizione il peso specifico γ , mediante le (1.1) e (1.4), è dato da

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{m g}{V} = \rho g \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]. \quad (1.5)$$

Temperatura

Per definizione la temperatura rappresenta un indice dell'energia cinetica media delle particelle di un corpo. Se con [K], [R], [$^{\circ}\text{C}$], [$^{\circ}\text{F}$] vengono rappresentate rispettivamente le unità di misura delle scale assolute Kelvin e Rankine e delle scale relative centigrada e Fahrenheit, si hanno le leggi di trasformazione seguenti

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15, \quad T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15 \quad (1.6)$$

$$T(^{\circ}\text{C}) = \frac{T(^{\circ}\text{F}) - 32}{1.8}, \quad T(^{\circ}\text{F}) = 1.8 \times T(^{\circ}\text{C}) + 32; \quad (1.7)$$

$$T(\text{K}) = \frac{T(\text{R})}{1.8}, \quad T(\text{R}) = 1.8 \times T(\text{K}). \quad (1.8)$$

Pressione

Per definizione la pressione p è data da

$$p = \frac{dF}{dS} \quad \left[\frac{N}{m^2} = Pa \right]$$

dove dF in [N] è la forza infinitesima che agisce sull'area infinitesima dS in [m^2] perpendicolare alla retta d'azione della forza. Integrata per valori costanti, la relazione precedente diventa

$$p = \frac{F}{S} \quad \left[\frac{N}{m^2} = Pa \right] . \quad (1.9)$$

Equazione di stato dei gas

L'equazione che lega i parametri di stato di un gas è data da

$$p v = R T \quad p v = R T \quad p = \rho R T \quad p V = m R T \quad (1.10)$$

dove v è il volume specifico molare in [$m^3/mole$], R è la costante caratteristica universale dei gas in [$J/(mole.K)$] e R è la costante caratteristica dei gas riferita all'unità di massa in [$J/(kg.K)$].

Calori specifici nei gas

La costante caratteristica dei gas R , riferita all'unità di massa, rappresenta la differenza fra i calori specifici a pressione e a volume costante

$$R = c_p - c_v \quad \left[\frac{J}{kg K} \right] \quad (1.11)$$

mentre il rapporto fra i calori specifici a pressione e a volume costanti rappresenta l'esponente della trasformazione adiabatica γ

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma . \quad (1.12)$$

Trasformazioni termodinamiche

Per un gas perfetto la legge delle trasformazioni è data da

$$p v^n = \text{cost} \quad (1.13)$$

dove l'esponente n vale:

- 0 per la trasformazione isobara (a pressione costante),
- 1 per la trasformazione isoterma (a temperatura costante),
- ∞ per la trasformazione isocora (a volume costante),
- n per la trasformazione generica politropica,
 - caso particolare $n = \gamma$: trasformazione adiabatica (senza scambio di calore con l'esterno).

Facendo ricorso all'equazione di stato dei gas (1.10) si hanno le seguenti leggi

$$\begin{array}{ll} \text{- trasformazione isobara} & v T^{-1} = \text{cost} \end{array} \quad (1.14)$$

$$\begin{array}{ll} \text{- trasformazione isoterma} & p v = \text{cost} \end{array} \quad (1.15)$$

$$\begin{array}{ll} \text{- trasformazione isocora} & p T^{-1} = \text{cost} \end{array} \quad (1.16)$$

$$\begin{array}{ll} \text{- trasformazione politropica} & \left[\begin{array}{l} p v^n = \text{cost} \\ T v^{n-1} = \text{cost} \end{array} \right] \end{array} \quad (1.17)$$

$$\left[\begin{array}{l} T p^{(1-n)/n} = \text{cost} \end{array} \right] \quad (1.18)$$

$$\left[\begin{array}{l} T p^{(1-n)/n} = \text{cost} \end{array} \right] \quad (1.19)$$

Compressibilità

La legge di compressibilità è data da

$$\frac{dV}{V} = -\kappa dp + \beta dT$$

dove κ è il coefficiente di compressibilità isoterma in [$1/Pa$] e β è il coefficiente di dilatazione volumetrica in [$1/K$]. Sostituendo la (1.3) nella relazione precedente si ottiene

$$\frac{dV}{V} = \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{\rho} = -\kappa dp + \beta dT \quad (1.20)$$

e integrando la (1.20), con valori medi dei due coefficienti κ_m e di β_m , si ottiene

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = -\kappa_m (p_2 - p_1) + \beta_m (T_2 - T_1) . \quad (1.21)$$

Compressibilità isoterma

La legge della compressibilità isoterma viene ricavata dalla (1.20) trascurando il termine con la temperatura

$$\frac{dV}{V} = \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{\rho} = -\kappa dp = -\frac{dp}{E} \quad (1.22)$$

dove E, reciproco di κ , è il modulo di elasticità volumetrico in [Pa]. Integrando la (1.22) si ottiene

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) &= \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = -\kappa_m (p_2 - p_1) = -\frac{1}{E_m} (p_2 - p_1) \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad p_2 &= \begin{aligned} &p_1 - \frac{1}{\kappa_m} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_1 - \frac{1}{\kappa_m} \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = p_1 + \frac{1}{\kappa_m} \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \\ &p_1 - E_m \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_1 - E_m \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = p_1 + E_m \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Velocità del suono

Per definizione la velocità del suono c è la velocità con cui all'interno di un corpo si propagano le perturbazioni

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (1.24)$$

dove κ è il coefficiente di compressibilità isoterma; nel caso di gas perfetto si ha

$$\text{trasformazione isoterma} \quad (n = 1) \quad c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{R T} \quad (1.25)$$

$$\text{trasformazione adiabatica} \quad (n = \gamma) \quad c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T} \quad (1.26)$$

Viscosità

Per definizione la viscosità "dinamica" μ è data dalla legge di Newton

$$\mu = \frac{dF}{dS} \frac{du}{dy} = \frac{\sigma_{yx}}{\frac{du}{dy}} \quad \left[\frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{ms} \right] \quad (1.27)$$

dove σ_{yx} è la tensione tangenziale giacente sul piano (x-z) perpendicolare alla y e diretta lungo la x, du/dy è il gradiente lungo la y della velocità lungo la x in [1/s], dF è la forza che genera la tensione tangenziale in [N] e dS è la superficie del piano (x-z) su cui la forza è esercitata in [m²].

Per definizione la viscosità "cinematica" ν è data da

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (1.28)$$

dove ρ è la massa volumica in [kg/m³].

Fluidi non - newtoniani

La legge di Newton viene modificata nel modo seguente

$$\sigma_{yx} = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n = k \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} = \eta \frac{du}{dy} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad (1.29)$$

dove k è detto indice di consistenza, n indice caratteristico del fluido e η viscosità apparente.

I fluidi newtoniani hanno $k = \mu$ e $n = 1$; mentre i fluidi non - newtoniani, se $n < 1$, vengono detti "pseudoplastici" e, se $n > 1$, vengono detti "dilatanti".

1.1.- PARAMETRI DI STATO

Esercizio 1.1.1

Un fluido ha una massa $m = 7.4 \text{ kg}$ ed occupa un volume $V = 9 \text{ litri}$. Calcolare: a) la massa volumica o densità ρ ; b) il volume specifico v .

a) Dalla definizione di massa volumica, o densità, (1.1) si ha

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{7.4}{9 \times 10^{-3}} = 822.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 822 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

b) Dalla definizione di volume specifico (1.2) si ha

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{822.2} = 0.00122 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \quad \text{oppure} \quad v = \frac{V}{m} = \frac{9 \times 10^{-3}}{7.4} = 0.00122 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

Esercizio 1.1.2

Calcolare il volume specifico v dell'aria in condizioni normali (cioè a $p = 1 \text{ bar}$ e $T = 0^\circ \text{C}$).

Dalla definizione di volume specifico (1.2) e dalla tab. T.2, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ , si ha

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1.294} = 0.773 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

Esercizio 1.1.3

La legge con cui varia l'accelerazione di gravità con l'altezza è data da

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$$

dove $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di riferimento al livello del mare, $R = 6370 \text{ km}$ è il raggio medio terrestre e h è l'altezza sopra il livello del mare. Calcolare la variazione percentuale dell'accelerazione di gravità all'altezza $h = 10 \text{ km}$.

Dalla legge precedente si ha

$$\frac{g - g_0}{g_0} = \frac{g}{g_0} - 1 = \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 - 1 = \left(\frac{6370}{6370+10} \right)^2 - 1 = 0.99686 - 1 = -0.00313 = -0.313 \%$$

Esercizio 1.1.4

Un fluido ha una massa $m = 5100 \text{ kg}$ ed occupa un volume $V = 6 \text{ m}^3$. Calcolare: a) la massa volumica ρ ; b) il peso specifico γ .

a) Dalla definizione di massa volumica (1.1) si ha

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{5100}{6} = 850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

b) Dalla definizione di peso specifico (1.5) si ha

$$\gamma = \rho g = 850 \times 9.80665 = 8340 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

Esercizio 1.1.5

Un uomo ha una massa $m = 80 \text{ kg}$. Calcolare il suo peso G .

Dalla definizione di peso (1.4) si ha

$$G = m g = 80 \times 9.80665 = 785 \text{ N}.$$

Esercizio 1.1.6

Un uomo sulla Terra ha un peso $G_{\text{Terra}} = 785 \text{ N}$. Calcolare il suo peso su Marte G_{Marte} , dove l'accelerazione di gravità è $g_{\text{Marte}} = 3.74 \text{ m/s}^2$.

Sui due Pianeti l'intensità del campo gravitazionale varia per effetto della legge di gravitazione universale, ma la massa dell'uomo rimane la stessa. Dalla definizione di peso (1.4) si ha

$$m = \frac{G_{\text{Terra}}}{g_{\text{Terra}}} = \frac{785}{9.80665} = 80 \text{ kg} \quad \rightarrow \quad G_{\text{Marte}} = m g_{\text{Marte}} = 80 \times 3.74 = 299 \text{ N} .$$

Esercizio 1.1.7

Un uomo di massa $m = 80 \text{ kg}$ è sottoposto ad una decelerazione $a = 25 \text{ g}$. Calcolare la forza totale F agente su di esso.

La forza è data dalla seconda legge della dinamica

$$F = m a = m \times 25 \text{ g} = 80 \times 25 \times 9.80665 = 19600 \text{ N} .$$

Esercizio 1.1.8

Un fluido ha un peso $G = 42.5 \text{ N}$ ed occupa un volume $V = 5000$ litri. Calcolare il volume specifico v .

Dalla definizione di peso specifico (1.5) si ha

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{42.5}{5000 \times 10^{-3}} = 8.50 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \quad \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{8.50}{9.80665} = 0.8668 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e dalla definizione di volume specifico (1.2) si ha

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0.8668} = 1.15 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} .$$

Esercizio 1.1.9

Un volume $V = 1 \text{ m}^3$ di aria si trova alla temperatura $T = 30 \text{ }^\circ\text{C}$. Calcolare: a) la massa m ; b) il peso G .

Dalla tab. T.2, interpolando i valori della massa volumica ρ fra $20 \text{ }^\circ\text{C}$ e $40 \text{ }^\circ\text{C}$, si ha

$$\rho_{30} = \frac{\rho_{20} + \rho_{40}}{2} = \frac{1.206 + 1.118}{2} = 1.162 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e dalla definizione di peso specifico (1.5) si ha

$$\gamma_{30} = \rho_{30} g = 1.162 \times 9.80665 = 11.40 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} .$$

a) Dalla definizione di massa volumica (1.1) si ha

$$m = \rho V = 1.162 \times 1 = 1.162 \text{ kg} .$$

b) Dalla definizione di peso (1.4), oppure di peso specifico (1.5), si ha rispettivamente

$$G = m g = 1.162 \times 9.80665 = 11.4 \text{ N} .$$

$$\gamma V = 11.40 \times 1$$

Esercizio 1.1.10

Un volume iniziale $V_1 = 5 \text{ m}^3$ di aria viene portato, per compressione, ad un valore finale $V_2 = 4 \text{ m}^3$. Calcolare le variazioni percentuali: a) del volume specifico $\Delta v/v$; b) della massa volumica $\Delta \rho/\rho$.

Dalla relazione (1.3), passando da quantità infinitesime a quantità finite, si ottengono le variazioni percentuali:

a) del volume specifico

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{4 - 5}{5} = -0.2 = -20\% ;$$

b) della massa volumica

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V_1} = -\frac{V_2 - V_1}{V_1} = -\frac{4 - 5}{5} = +0.2 = +20\% .$$

Dato che la massa rimane invariata e il volume diminuisce, il volume specifico cala e la massa volumica cresce.

Esercizio 1.1.11

Calcolare la temperatura alla quale le scale centigrada e Fahrenheit hanno lo stesso valore numerico.

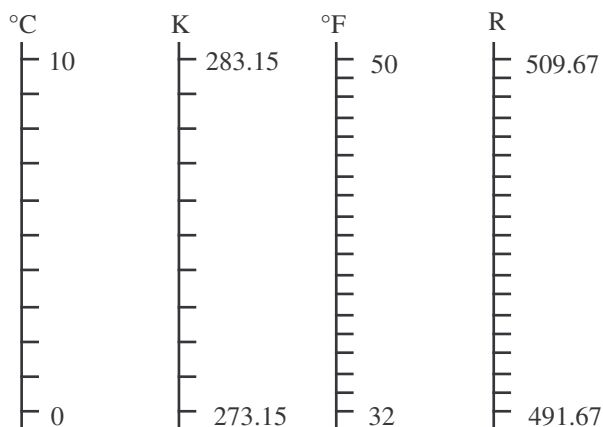
Dalla legge di trasformazione (1.7) si ha

$$T = 1.8 \times T + 32 \quad \rightarrow \quad (1.8 - 1) \times T = -32 \quad \rightarrow \quad T = -\frac{32}{0.8} = -40 .$$

Esercizio 1.1.12

Calcolare la temperatura corrispondente a $T = 10^\circ\text{C}$ nelle scale Kelvin, Fahrenheit e Rankine.

In base alle leggi di trasformazione (1.6), (1.7) e (1.8), si può dedurre che l'intervallo di temperatura fra i valori di riferimento della scala centigrada è diviso in 100 parti nelle scale Celsius e assoluta e in 180 parti in quelle Fahrenheit e Rankine. Nella figura è visualizzato quanto avviene per le quattro scale nell'intervallo di temperatura fra 0°C e 10°C .



Le risposte alla domanda sono quindi:

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15 = 10 + 273.15 \cong 283 \text{ K} ;$$

$$T(^{\circ}\text{F}) = 1.8 \times T(^{\circ}\text{C}) + 32 = 1.8 \times 10 + 32 = 50^{\circ}\text{F} ;$$

$$T(\text{R}) = 1.8 \times T(\text{K}) = 1.8 \times [T(^{\circ}\text{C}) + 273.15] = 1.8 \times [10 + 273.15] \cong 510 \text{ R} .$$

Esercizio 1.1.13

All'interno del "Paul Getty Museum" di Los Angeles un termometro segna la temperatura $T = 86^{\circ}\text{F}$. Calcolare la temperatura in gradi centigradi.

Dalla legge di trasformazione (1.7) si ha

$$T(^{\circ}\text{C}) = \frac{T(^{\circ}\text{F}) - 32}{1.8} = \frac{86 - 32}{1.8} = 30^{\circ}\text{C} .$$

Esercizio 1.1.14

Una forza $F = 1000 \text{ N}$ agisce su una superficie $S = 250 \text{ dm}^2$. Calcolare la pressione media p_m .

Dalla definizione di pressione media (1.9) si ha

$$p_m = \frac{F}{S} = \frac{1000}{250 \times 10^{-2}} = 400 \text{ Pa} = 0.004 \text{ bar} = 4 \text{ mbar} .$$

Anni fa, quando era ancora utilizzato il sistema pratico (S.P.), la pressione veniva misurata anche con altre unità: per esempio in campo meteorologico l'atm, atmosfera meteorologica, corrispondente alla pressione esercitata da una colonna di mercurio alta 760 mm e in campo tecnico l'ata, atmosfera assoluta, corrispondente alla pressione esercitata da una colonna d'acqua alta 10 m (vedi capitolo 2 - teoria).

Nella tabella vengono riportati alcuni fattori di conversione, tratti dalla tab. C.11, fra le unità di misura dei due sistemi.

unità	Pa	bar	atm	ata
Pa	1	10^{-5}	$0.986923 \cdot 10^{-5}$	$1.019716 \cdot 10^{-5}$
bar	10^5	1	0.986923	1.019716
atm	$1.013250 \cdot 10^5$	1.013250	1	1.033227
ata	$0.980665 \cdot 10^5$	0.980665	0.967841	1

La pressione prima determinata avrebbe assunto anche i valori seguenti

$$0.004 \text{ bar} = 0.986923 \times 0.004 = 0.00395 \text{ atm}$$

$$0.004 \text{ bar} = 1.019716 \times 0.004 = 0.00408 \text{ ata} .$$

Esercizio 1.1.15

Su una lastra metallica avente una superficie $S = 1 \text{ m}^2$ viene esercitata una pressione $p = 1 \text{ bar}$. Calcolare la forza totale F .

Dalla definizione di pressione (1.9) si ha

$$F = p S = 10^5 \times 1 = 100000 \text{ N} .$$

In certe applicazioni meccaniche la differenza di pressione tra le due facce di una parete metallica può raggiungere valori anche elevati (si pensi per esempio ad un batiscafo immerso nelle profondità della fossa delle Marianne oppure ai componenti di un impianto di iniezione di un motore a combustione interna ad accensione spontanea) e quindi può dare origine a forze ed a tensioni interne nel materiale di entità notevole.

Esercizio 1.1.16

Un cilindro, contenente un gas alla pressione $p = 50 \text{ bar}$, possiede uno stantuffo di diametro $D = 200 \text{ mm}$. Calcolare la forza F premente sullo stantuffo.

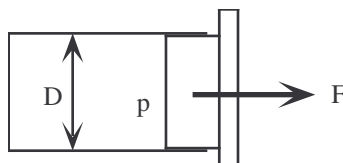
Dalla definizione di pressione (1.9) si ha

$$F = p S = p \frac{\pi D^2}{4} = 50 \times 10^5 \times \frac{\pi \times (200 \times 10^{-3})^2}{4} = 157000 \text{ N} = 157 \text{ kN} .$$

Forze così elevate impongono molta attenzione nel dimensionamento strutturale dei componenti meccanici sottoposti ad alta pressione interna, i cosiddetti recipienti in pressione.

Esercizio 1.1.17

Una pressa idraulica per stampare parti di automobili su lastre metalliche esercita una forza $F = 36 \text{ MN}$ mediante un pistone dentro il quale agisce una pressione di progetto pari a $p = 30 \text{ MPa}$. Nel caso in cui si trascuri l'attrito, calcolare il valore minimo del diametro D del pistone necessario a creare la forza F di stampaggio.

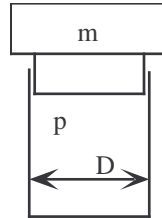


Dalla definizione di pressione (1.9) si ha

$$S = \frac{F}{p} = \frac{36 \times 10^6}{30 \times 10^6} = 1.20 \text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 1.20}{\pi}} = 1.24 \text{ m} .$$

Esercizio 1.1.18

In una stazione di servizio, fornita di un impianto di aria compressa alla pressione $p = 600 \text{ kPa}$, deve essere dimensionato un montacarichi pneumatico per sollevare vetture fino alla massa di $m = 3000 \text{ kg}$; il meccanismo, formato dal pistone e dal cilindro, assorbe una forza pari a $R = 980 \text{ N}$. Calcolare: a) il diametro D del cilindro; b) la pressione p necessaria a sollevare una vettura di massa $m' = 895 \text{ kg}$.



a) Dalla definizione di pressione (1.9) si ha

$$S = \frac{F}{p} = \frac{m g + R}{p} = \frac{3000 \times 9.80665 + 980}{600 \times 10^3} = 0.05067 \text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.05067}{\pi}} = 0.2540 \text{ m}$$

dove la forza totale F è costituita dal peso della vettura di progetto e dalla forza dissipativa R .

b) Dalla definizione di pressione (1.9) si ha anche

$$p = \frac{F'}{S} = \frac{m' g + R}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{895 \times 9.80665 + 980}{\frac{\pi \times 0.2540^2}{4}} = 193000 \text{ Pa} = 193 \text{ kPa}$$

dove la forza totale F' è costituita dal peso della vettura di massa m' e dalla forza dissipativa R .

1.2.- TRASFORMAZIONI

Esercizio 1.2.1

La massa molare M di un gas corrisponde alla massa di una mole e si misura in [kg/mole]. Se $n = 2$ moli di aria, di massa molare $M = 29$ kg/mole, sono alla temperatura $T = 40$ °C e alla pressione $p = 2$ bar, calcolare il volume V da esse occupato.

Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$p v = R T \quad \rightarrow \quad p V = m R T \quad \rightarrow \quad p V = n M R T \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad V = \frac{n M R T}{p} = \frac{2 \times 29 \times 287 \times (273.15 + 40)}{2 \times 10^5} = 0.0908 \text{ m}^3 .$$

Esercizio 1.2.2

In un recipiente di volume $V = 5$ m³ si trova la massa $m = 8$ kg d'aria alla temperatura $T = 30$ °C. Calcolare la pressione p raggiunta.

Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$p = \frac{m R T}{V} = \frac{8 \times 287 \times (273.15 + 30)}{5} = 139000 \text{ Pa} \cong 1.4 \text{ bar} .$$

Esercizio 1.2.3

In un recipiente di volume $V = 500$ litri si trova aria alla pressione assoluta $p = 200$ kPa ed alla temperatura $T = 30$ °C . Calcolare la massa m .

Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$m = \frac{p V}{R T} = \frac{200 \times 10^3 \times 500 \times 10^{-3}}{287 \times (273.15 + 30)} = 1.15 \text{ kg} .$$

Esercizio 1.2.4

In un recipiente di volume $V = 4$ m³ si trova anidride carbonica alla pressione $p = 5$ bar ed alla temperatura $T = 25$ °C . Calcolare: a) la massa m ; b) il peso G .

a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$m = \frac{p V}{R T} = \frac{5 \times 10^5 \times 4}{189 \times (273.15 + 25)} = 35.49 \text{ kg} .$$

b) Dalla definizione di peso (1.4) si ha

$$G = m g = 35.49 \times 9.80665 = 348 \text{ N} .$$

Esercizio 1.2.5

In un recipiente di volume $V = 3.5$ m³ si trova la massa $m = 7$ kg di azoto alla pressione $p = 2.5$ bar. Calcolare: a) il volume specifico v ; b) la temperatura T in [°C].

a) Dalla definizione di volume specifico (1.2) si ha

$$v = \frac{V}{m} = \frac{3.5}{7} = 0.50 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} .$$

b) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$T = \frac{p v}{R} = \frac{2.5 \times 10^5 \times 0.50}{297} = 421 \text{ K} = 148^\circ \text{C} .$$

Esercizio 1.2.6

In un recipiente di volume $V = 0.5 \text{ m}^3$ si trova il peso $G = 40 \text{ N}$ di ossigeno alla pressione $p = 12 \text{ bar}$. Calcolare: a) il volume specifico v ; b) la temperatura T in $[\text{°C}]$.

- a) Dalla definizione di peso specifico (1.5) e di volume specifico (1.2) si ha

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{40}{0.5} = 80 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \quad \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{80}{9.80665} = 8.158 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad v = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{8.158} = 0.1226 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} .$$

- b) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$T = \frac{p v}{R} = \frac{12 \times 10^5 \times 0.1226}{262} = 562 \text{ K} = 289^\circ \text{C} .$$

Esercizio 1.2.7

Una certa quantità di metano si trova alla temperatura $T = 38^\circ \text{C}$ e alla pressione $p = 8.5 \text{ bar}$. Calcolare: a) il volume specifico v ; b) la massa volumica ρ ; c) il peso specifico γ .

- a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$v = \frac{p}{R T} = \frac{8.5 \times 10^5}{519 \times (273.15 + 38)} = 5.266 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} .$$

- b) Dalla definizione di volume specifico (1.2) si ha

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{1}{5.266} = 0.1899 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

- c) Dalla definizione di peso specifico (1.5) si ha

$$\gamma = \rho g = 0.1899 \times 9.80665 = 1.86 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} .$$

Esercizio 1.2.8

Una certa quantità di elio si trova alla temperatura $T = 20^\circ \text{C}$ e alla pressione $p = 10 \text{ bar}$. Calcolare: a) il volume specifico v ; b) la massa volumica ρ ; c) il peso specifico γ .

- a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$v = \frac{p}{R T} = \frac{10 \times 10^5}{2088 \times (273.15 + 20)} = 1.634 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} .$$

- b) Dalla definizione di volume specifico (1.2) si ha

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{1}{1.634} = 0.6120 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

- c) Dalla definizione di peso specifico (1.5) si ha

$$\gamma = \rho g = 0.6120 \times 9.80665 = 6.00 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} .$$

Esercizio 1.2.9

Un gas avente un volume specifico $v = 0.71 \text{ m}^3/\text{kg}$ si trova alla temperatura $T = 32^\circ \text{C}$ ed alla pressione $p =$

2.1 bar. Calcolare: a) la massa volumica ρ ; b) il peso specifico γ ; c) la costante caratteristica R riferita all'unità di massa.

a) Dalla definizione di volume specifico (1.2) si ha

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{1}{0.71} = 1.408 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

b) Dalla definizione di peso specifico (1.5) si ha

$$\gamma = \rho g = 1.408 \times 9.80665 = 13.8 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} .$$

c) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) si ha

$$R = \frac{p v}{T} = \frac{2.1 \times 10^5 \times 0.71}{273.15 + 32} = 489 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} ;$$

Confrontando il risultato con i dati della tab. T.3, si vede che la costante caratteristica del gas si avvicina molto a quella dell'ammoniaca.

Esercizio 1.2.10

Considerando l'aria come un gas perfetto, calcolare i calori specifici: a) a pressione costante c_p ; b) a volume costante c_v .

a) Sostituendo la relazione (1.12), scritta nel modo seguente

$$c_p = \gamma c_v$$

dove γ rappresenta l'esponente della trasformazione adiabatica, nella relazione (1.11) e prendendo il valore della costante caratteristica R dalla tab. T.3, si ha

$$\gamma c_v = c_v + R \rightarrow c_v (\gamma - 1) = R \rightarrow c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{287}{1.402 - 1} = 713.9 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} .$$

b) Dalla relazione precedente si ha

$$c_p = \gamma c_v = 1.402 \times 713.9 = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} .$$

Esercizio 1.2.11

Un volume iniziale $V_1 = 400$ litri di aria alla temperatura $T_1 = 350 \text{ K} = 77^\circ \text{C}$ si espande in modo adiabatico fino ad un volume finale $V_2 = 0.5 \text{ m}^3$. Calcolare i valori finali: a) della temperatura T_2 ; b) della pressione p_2 ; c) del volume specifico v_2 .

Dalla tab. T.2, interpolando i valori della massa volumica fra 60°C e 80°C , si ha

$$\rho_1 = \frac{3}{20} \rho_{60} + \frac{17}{20} \rho_{80} = \frac{3}{20} \times 1.057 + \frac{17}{20} \times 0.990 = 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R, si ha

$$p_1 = \rho_1 R T_1 = 1.000 \times 287 \times 350 = 100500 \text{ Pa} \cong 1 \text{ bar} .$$

a) Dalla legge della trasformazione politropica (1.18) con $n = \gamma$ e dalla tab. T.4, in cui viene letto il valore dell'esponente γ , si ha

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 350 \times \left(\frac{400 \times 10^{-3}}{0.5} \right)^{0.402} = 320 \text{ K} .$$

b) Dalla legge della trasformazione politropica (1.19) con $n = \gamma$ si ha

$$T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma} \quad \rightarrow \quad p_2^{(1-\gamma)/\gamma} = p_1^{(1-\gamma)/\gamma} \frac{T_1}{T_2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad p_2 = p_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 100500 \times \left(\frac{350}{320} \right)^{1.402/(1-1.402)} = 73530 \text{ Pa} .$$

c) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) si ha

$$v_2 = \frac{R T_2}{p_2} = \frac{287 \times 320}{73530} = 1.25 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} .$$

Esercizio 1.2.12

Con i dati dell'esercizio 1.2.11 calcolare i valori richiesti nel caso in cui l'espansione avvenga in modo isoterma.

a) Dalla definizione di trasformazione isoterma si ha

$$T_2 = T_1 = 350 \text{ K} .$$

b) Dalla legge della trasformazione isoterma (1.15) si ha

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 100500 \times \frac{0.4}{0.5} = 80400 \text{ Pa} .$$

c) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) si ha

$$v_2 = \frac{R T_2}{p_2} = \frac{287 \times 350}{80400} = 1.25 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} .$$

Esercizio 1.2.13

Un gas, partendo dalla temperatura iniziale $T_1 = 50^\circ\text{C}$, subisce un processo per cui la sua pressione si raddoppia e il suo volume specifico decresce del 44/100. Calcolare: a) la temperatura finale T_2 ; b) l'esponente n della trasformazione.

a) Le relazioni fra le pressioni e i volumi specifici iniziali e finali sono

$$p_2 = 2 \times p_1 \quad v_2 = 0.56 \times v_1$$

e facendo il rapporto fra le equazioni di stato (1.10) relative alla fine e all'inizio della trasformazione si ha

$$\frac{p_2 v_2 = R T_2}{p_1 v_1 = R T_1} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1 \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = T_1 \frac{2 \times p_1 \times 0.56 \times v_1}{p_1 v_1} = (273.15 + 50) \times 2 \times 0.56 = 362 \text{ K} = 89^\circ\text{C} .$$

b) Dalla legge generica delle trasformazioni termodinamiche (1.13) si ha

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n \quad \rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n \quad \rightarrow \quad \log \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = n \log \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \quad \rightarrow \quad n = \frac{\log \left(\frac{p_1}{p_2} \right)}{\log \left(\frac{v_2}{v_1} \right)} = \frac{\log \left(\frac{1}{2} \right)}{\log(0.56)} = 1.20 .$$

Esercizio 1.2.14

Allo scopo di ridurre il consumo di combustibile nel traffico cittadino, si sta studiando il cosiddetto sistema di "trasmissione inerziale". Quando il conducente rallenta o frena, le ruote mediante pompe spingono olio nel serbatoio di un compressore in modo da aumentare la pressione dell'aria in esso intrappolata; le pompe quindi agiscono da freno. Quando la pressione raggiunge un valore prefissato, il serbatoio può fornire energia alle pompe che in questo modo agiscono da motore sulle ruote quando il conducente accelera. Se i rallentamenti e le frenate non sono sufficienti a far raggiungere il valore prefissato della pressione, il motore provvede a questa incombenza. Con questo sistema si prevede che nella guida in città si possano raddoppiare i chilometri fatti con un litro di benzina.

Si supponga che inizialmente il volume di aria nel serbatoio sia $V_1 = 80$ litri e che la pressione relativa e la

temperatura siano $p_1 = 200$ kPa e $T_1 = 30$ °C. Durante le frenate lungo la discesa da una collina il volume diventa $V_2 = 40$ litri e la pressione relativa raggiunge il valore $p_2 = 600$ kPa. Trovare: a) la temperatura finale dell'aria T_2 se si verifica una perdita di aria, dovuta a trafilamenti, pari a $\Delta m = 0.003$ kg; b) l'esponente n della trasformazione.

a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{101325 + 200 \times 10^3}{287 \times (273.15 + 30)} = 3.463 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e dalla definizione di massa volumica (1.1) si ha

$$m_1 = \rho_1 V_1 = 3.463 \times 80 \times 10^{-3} = 0.2770 \text{ kg} .$$

La massa finale di aria m_2 , per effetto delle perdite, diventa

$$m_2 = m_1 - \Delta m = 0.2770 - 0.003 = 0.2742 \text{ kg}$$

e dalla definizione di massa volumica (1.1) si ha

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{0.2742}{0.040} = 6.855 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ;$$

infine dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) si ha

$$T_2 = \frac{p_2}{R \rho_2} = \frac{101325 + 600 \times 10^3}{287 \times 6.855} = 356 \text{ K} = 83 \text{ °C} .$$

b) Dalla legge generica delle trasformazioni termodinamiche (1.13) si ha

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n \rightarrow$$

$$\rightarrow \log \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = n \log \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \rightarrow n = \frac{\log \left(\frac{p_1}{p_2} \right)}{\log \left(\frac{v_2}{v_1} \right)} = \frac{\log \left(\frac{101325 + 200 \times 10^3}{101325 + 600 \times 10^3} \right)}{\log \left(\frac{40}{80} \right)} = 1.22 .$$

Esercizio 1.2.15

Nel caso del problema 1.2.14 si supponga che il volume iniziale di aria nel serbatoio sia $V_1 = 80$ litri e che la pressione e la temperatura siano $p_1 = 120$ kPa e $T_1 = 20$ °C. Il motore a benzina raddoppia la pressione $p_2 = 2 p_1$ nel serbatoio e fa diminuire il volume dell'aria a $V_2 = 50$ litri. Calcolare: a) la temperatura finale dell'aria T_2 ; b) l'esponente n della trasformazione.

a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{120 \times 10^3}{287 \times (273.15 + 20)} = 1.426 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e dalla definizione di massa volumica (1.1) si ha

$$m = \rho_1 V_1 = 1.426 \times 0.080 = 0.1141 \text{ kg} .$$

Se non si verificano perdite di aria per trafilamenti, dalla definizione di massa volumica (1.1) si ha

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{0.1141}{0.050} = 2.284 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ;$$

infine dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) si ha

$$T_2 = \frac{p_2}{R \rho_2} = \frac{2 p_1}{R \rho_2} = \frac{2 \times 120 \times 100^3}{287 \times 2.284} = 366 \text{ K} = 93^\circ \text{C} .$$

b) Dalla legge generica delle trasformazioni termodinamiche (1.13) si ha

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n \quad \rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n \quad \rightarrow \quad \log \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = n \log \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \quad \rightarrow \quad n = \frac{\log \left(\frac{p_1}{p_2} \right)}{\log \left(\frac{v_2}{v_1} \right)} = \frac{\log \left(\frac{1}{2} \right)}{\log \left(\frac{50}{80} \right)} = 1.48$$

1.3.- COMPRESSIBILITÀ

Esercizio 1.3.1

Una certa quantità di acqua viene portata da uno stato iniziale di pressione $p_1 = 1$ bar e di temperatura $T_1 = 20$ °C ad uno stato finale di pressione $p_2 = 1000$ bar e di temperatura $T_2 = 30$ °C. Calcolare la variazione percentuale di volume $\Delta V/V$.

Poiché il volume è una funzione di stato, il valore del logaritmo nella legge di compressibilità (1.21) è indipendente dal cammino scelto per effettuare le due integrazioni dell'equazione (1.20), nel senso che prima si può calcolare l'integrale da p_1 a p_2 lungo T_1 e poi l'integrale da T_1 a T_2 lungo p_2 oppure prima l'integrale da T_1 a T_2 lungo p_1 e poi l'integrale da p_1 a p_2 lungo T_2 .

Per l'acqua allo stato liquido nelle condizioni iniziali e finali del problema i coefficienti κ e β assumono i valori della tabella seguente

p [bar]	T [°C]	κ [1/Pa]	β [1/K]
1	20	$0.455 \cdot 10^{-9}$	$208 \cdot 10^{-6}$
1	30	$0.442 \cdot 10^{-9}$	$304 \cdot 10^{-6}$
1000	20	$0.355 \cdot 10^{-9}$	$326 \cdot 10^{-6}$
1000	30	$0.345 \cdot 10^{-9}$	$406 \cdot 10^{-6}$

Dalla legge della compressibilità (1.21) si ha

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\kappa_m (p_2 - p_1) + \beta_m (T_2 - T_1) = -\kappa_m \Delta p + \beta_m \Delta t$$

per cui nel caso del primo percorso si ha

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\frac{(0.455 + 0.355) \times 10^{-9}}{2} \times 999 \times 10^5 + \frac{(326 + 406) \times 10^{-6}}{2} \times 10 = -0.0405 + 0.00366 = -0.0368$$

e nel caso del secondo percorso si ha

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\frac{(0.442 + 0.345) \times 10^{-9}}{2} \times 999 \times 10^5 + \frac{(208 + 304) \times 10^{-6}}{2} \times 10 = -0.0393 + 0.00356 = -0.0367 ;$$

alla fine si ha

$$\frac{V_2}{V_1} = 0.964 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = 0.964 - 1 = -0.036 = -3.6 \% .$$

Se ci fosse stata solo la compressione, l'aumento di temperatura sarebbe stato certamente trascurabile e la contrazione di volume un po' più elevata; infatti dalla legge della compressibilità isoterma (1.23) si sarebbe ottenuto

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\kappa_m (p_2 - p_1) = -\frac{(0.455 + 0.355) \times 10^{-9}}{2} \times 999 \times 10^5 = -0.0405$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 0.960 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = 0.960 - 1 = -0.040 = -4.0 \% .$$

Esercizio 1.3.2

Un volume $V = 2$ m³ d'acqua si trova in un ambiente alla temperatura costante $T = 20$ °C, mentre la pressione viene portata da un valore iniziale $p_1 = 1$ bar a un valore finale $p_2 = 25$ bar. Calcolare la variazione di volume ΔV .

Il modulo di elasticità volumetrico E dell'acqua, alla pressione $p = p_{atm}$, assume in funzione della temperatura i valori della tab. T.6 e, alla temperatura $T = 20$ °C, assume in funzione della pressione i valori della tab. T.7.

Dalla legge semplificata di compressibilità isoterma (1.22) in quantità finite e dalla tab. T.6, in cui viene letto il valore del modulo di elasticità volumetrico E alla temperatura richiesta, si ha

$$\Delta V = -\frac{V \Delta p}{E} = -\frac{2 \times (25-1) \times 10^5}{2.20 \times 10^9} = -0.00218 \text{ m}^3 .$$

Questo valore non è molto lontano da quello più esatto che si otterrebbe calcolando il valore medio E_m fra le pressioni iniziale e finale in base ai dati forniti dalla tab. T.7; infatti interpolando fra 1 bar e 100 bar si ha

$$E_{25} = \frac{75}{99} E_1 + \frac{24}{99} E_{100} = \left(\frac{75}{99} \times 2.20 + \frac{24}{99} \times 2.27 \right) \times 10^9 = 2.217 \times 10^9 \text{ Pa}$$

e quindi

$$E_m = \frac{E_1 + E_{25}}{2} = \frac{(2.20 + 2.217) \times 10^9}{2} = 2.209 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\Delta V = -\frac{V \Delta p}{E_m} = -\frac{2 \times (25-1) \times 10^5}{2.209 \times 10^9} = -0.00217 \text{ m}^3 .$$

La semplificazione è consentita perché l'influenza della pressione sul valore del modulo di elasticità volumetrico E è molto inferiore a quella della temperatura.

Esercizio 1.3.3

Una certa quantità di acqua passa in modo isoterma da uno stato iniziale di $p_1 = 1$ bar (pressione a livello del mare) ad uno stato finale di $p_2 = 1000$ bar (pressione ad una profondità di circa 10000 m). Calcolare la variazione percentuale di massa volumica.

Dalla tab. T.7, in cui viene letto il valore del modulo di elasticità volumetrico E alle pressioni p_1 e p_2 , si ha il valore medio

$$E_m = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{(2.20 + 2.82) \times 10^9}{2} = 2.510 \times 10^9 \text{ Pa}$$

e dalla legge di compressibilità isoterma (1.23) si ha

$$\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{1}{E_m} (p_2 - p_1) = \frac{1}{2.510 \times 10^9} \times (1000 - 1) \times 10^5 = 0.03980 ;$$

infine si ha

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1.041 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = 1.041 - 1 = 0.041 = -4.1 \% .$$

Esercizio 1.3.4

In processi industriali, per tagliare materiali pietrosi o materiali compositi, sono usati getti d'acqua ad alta velocità con pressioni che raggiungono valori anche pari a $p = 3000$ bar. Da un punto di vista ingegneristico in queste situazioni è ragionevole per i calcoli assumere costante la massa volumica ρ dell'acqua?

Dalla legge della compressibilità isoterma (1.23) si ha

$$\Delta p = E \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \exp\left(\frac{\Delta p}{E_1}\right) = \exp\left[\frac{(3000-1) \times 10^5}{2.10 \times 10^9}\right] = 1.15$$

quando il valore del modulo di elasticità volumetrico è preso costante e pari a quello della pressione iniziale dato dalla tab. T.5, mentre invece si ha

$$\Delta p = E \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \exp\left(\frac{\Delta p}{E_m}\right) = \exp\left[\frac{(3000-1) \times 10^5}{3.12 \times 10^9}\right] = 1.10$$

quando il valore del modulo di elasticità volumetrico è preso pari a quello medio, ricavato dalla tab T.7, fra la pressione iniziale e quella finale

$$E_m = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{(2.20 + 4.04) \times 10^9}{2} = 3.12 \times 10^9 \text{ Pa} .$$

Una variazione percentuale della massa volumica pari a

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = 1.10 - 1 = 0.10 = 10 \%$$

può non essere sufficiente per una buona precisione dei calcoli riguardanti le applicazioni industriali in oggetto.

Esercizio 1.3.5

Olio lubrificante è utilizzato come fluido di lavoro in un sistema idraulico alla pressione $p = 300$ bar. Da un punto di vista ingegneristico in queste situazioni è ragionevole per i calcoli assumere costante la massa volumica ρ dell'olio?

Dalla legge della compressibilità isoterma (1.23) si ha

$$\Delta p = E \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \exp \left(\frac{\Delta p}{E_m} \right) = \exp \left[\frac{(300-1) \times 10^5}{1.44 \times 10^9} \right] = 1.02$$

quando il valore del modulo di elasticità volumetrico è preso costante e pari a quello della pressione iniziale dato dalla tab. T.5; un valore più basso del rapporto fra le masse volumiche si otterrebbe se si prendesse il modulo di elasticità medio fra la pressione iniziale e quella finale. Comunque, una variazione percentuale della massa volumica pari a

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = 1.02 - 1 = 0.02 = 2 \%$$

può essere sufficiente per una buona precisione dei calcoli riguardanti le applicazioni industriali in oggetto.

Esercizio 1.3.6

Con i dati degli esercizi 1.2.11 e 1.2.12 calcolare i valori medi del modulo di elasticità volumetrico E_m in base alla legge della compressibilità isoterma.

Dalla legge di compressibilità isoterma (1.23) per l'esercizio 1.2.11 (caso della espansione adiabatica) si ha

$$E_m = - \frac{p_2 - p_1}{\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} = - \frac{73530 - 100500}{\ln \left(\frac{0.5}{400 \times 10^{-3}} \right)} = 0.121 \times 10^6 \text{ Pa}$$

e per l'esercizio 1.2.12 (caso della espansione isoterma) si ha

$$E_m = - \frac{p_2 - p_1}{\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} = - \frac{80400 - 100500}{\ln \left(\frac{0.5}{400 \times 10^{-3}} \right)} = 0.0901 \times 10^6 \text{ Pa} .$$

Da notare che nel caso della trasformazione adiabatica, in cui varia sia la pressione che la temperatura, viene conglobato nel modulo, oltre l'effetto della pressione, anche l'effetto della temperatura. Per confronto con i valori ottenuti, dalla tab. T.5 si legge che il modulo E in condizioni normali vale $0.101 \times 10^6 \text{ Pa}$.

Esercizio 1.3.7

Acqua dolce si trova alla pressione atmosferica ed alla temperatura $T = 20$ °C. Calcolare la velocità del suono c .

Dalla legge della velocità del suono (1.24) e dalle tabb. T.2 e T.6, in cui vengono letti rispettivamente i valori della massa volumica ρ e del modulo di elasticità volumetrico E dell'acqua dolce in funzione della temperatura, si ha

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.20 \times 10^9}{998.2}} = 1480 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 1.3.8

Calcolare la velocità con cui si propaga un'onda di pressione in un liquido avente massa volumica $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ e modulo di elasticità volumetrico $\kappa = 0.5 \times 10^{-9} \text{ 1/Pa}$.

La velocità di propagazione dell'onda di pressione corrisponde alla velocità del suono c ; allora dalla legge della velocità del suono (1.24) si ha

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}} = \sqrt{\frac{1}{0.5 \times 10^{-9} \times 850}} = 1530 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 1.3.9

Un liquido di volume e di massa volumica iniziali pari a $V_1 = 10 \text{ m}^3$ e rispettivamente a $\rho_1 = 900 \text{ kg/m}^3$, per effetto di un aumento di pressione $\Delta p = 200 \text{ bar}$, diminuisce il suo volume di $\Delta V = 50 \text{ litri}$. Calcolare la velocità del suono c .

Dalla legge della compressibilità isoterma (1.23) si ha il coefficiente di compressibilità isoterma medio κ_m

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\kappa_m (p_2 - p_1) \quad \rightarrow \quad \kappa_m = -\frac{\ln\left(\frac{V_1 - \Delta V}{V_1}\right)}{\Delta p} = -\frac{\ln\left(\frac{10 - 5 \times 10^{-2}}{10}\right)}{200 \times 10^5} = 0.2506 \times 10^{-9} \frac{1}{\text{Pa}}$$

e il rapporto fra le masse volumiche finale ρ_2 e iniziale ρ_1

$$\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \kappa_m (p_2 - p_1) \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \exp(\kappa_m \Delta p) = \exp(0.2506 \times 10^{-9} \times 200 \times 10^5) = 1.005 .$$

[Nota. Si sarebbe potuto calcolare il rapporto precedente anche dalla definizione di massa volumica (1.1)

$$m_1 = m_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_1 - \Delta V} = \frac{10}{10 - 5 \times 10^{-2}} = 1.005 .]$$

Durante la fase di compressione si può considerare la massa volumica costante e uguale a ρ_1 oppure si può prendere il suo valore medio

$$\rho_m = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{\rho_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \rho_1}{2} = \frac{900 + 1.005 \times 900}{2} = 902.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ;$$

nel primo caso si ha

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{\kappa_m \rho_1}} = \sqrt{\frac{1}{0.2506 \times 10^{-9} \times 900}} = 2101 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e nel secondo

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{\kappa_m \rho_m}} = \sqrt{\frac{1}{0.2506 \times 10^{-9} \times 902.3}} = 2103 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

con una differenza percentuale trascurabile

$$\frac{c_2 - c_1}{c_1} = \frac{2103 - 2101}{2101} = 0.001 = 0.1 \% .$$

Esercizio 1.3.10

Aria si trova alla temperatura $T = -9^\circ \text{C}$. Calcolare la velocità del suono c in caso di processo: a) isoterma; b) adiabatico.

a) Dalla legge della velocità del suono (1.25) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica del gas R , si ha

$$c = \sqrt{R T} = \sqrt{287 \times (273.15 - 9)} = 275 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

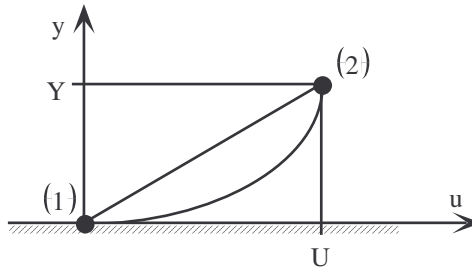
b) Dalla legge della velocità del suono (1.26) e dalle tabb. T.3 e T.4, in cui vengono letti rispettivamente i valori della costante caratteristica del gas R e dell'esponente della trasformazione adiabatica γ , si ha

$$c = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1.402 \times 287 \times (273.15 - 9)} = 326 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

1.4.- VISCOSITÀ

Esercizio 1.4.1

Un fluido di viscosità $\mu = 0.005 \text{ N.s/m}^2$ lambisce una parete ferma con una velocità $U = 1.2 \text{ m/s}$ ad una distanza $Y = 40 \text{ mm}$. Calcolare il gradiente della velocità du/dy nella ipotesi che la distribuzione della velocità sia: a) lineare; b) parabolica. Calcolare inoltre: c) la tensione tangenziale σ_{yx} esercitata dal fluido sulla parete.



a) L'equazione della velocità u in funzione della distanza y dalla parete nella distribuzione lineare è una retta passante per i punti $(u_1 = 0, y_1 = 0)$, $(u_2 = U, y_2 = Y)$

$$\frac{u - u_1}{y - y_1} = \frac{u_2 - u_1}{y_2 - y_1} \quad \rightarrow \quad \frac{u}{y} = \frac{U}{Y} = \frac{1.2}{0.04} \quad \rightarrow \quad u = 30 y$$

e quindi il gradiente di velocità diventa

$$\frac{du}{dy} = 30$$

b) Nella distribuzione parabolica l'equazione è una parabola che passa per gli stessi punti e in più la sua derivata si annulla nel punto $(u_2 = U, y_2 = Y)$

$u = a + b y + c y^2$	$\rightarrow$	$y_1 = 0$ $y_2 = Y = 0.04$	$u_1 = 0$ $u_2 = U = 1.2$	$\rightarrow$	$a = 0$ $b = 60$
$\frac{du}{dy} = b + 2 c y$	$\rightarrow$	$y_2 = Y = 0.04$	$\left(\frac{du}{dy}\right)_2 = 0$	$\rightarrow$	$c = -750$

e quindi il gradiente di velocità sulla parete diventa

$$\frac{du}{dy} = 60 - 1500 y \quad \rightarrow \quad \left(\frac{du}{dy}\right)_1 = 60$$

c) Dalla legge di Newton (1.27), per la distribuzione lineare, si ha

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = 0.005 \times 30 = 0.150 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

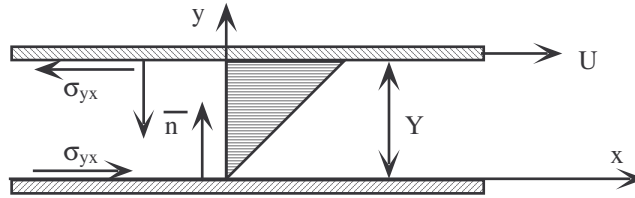
e, per la distribuzione parabolica, rispettivamente si ha

$$\sigma_{yx} = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)_1 = 0.005 \times 60 = 0.300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Dai due valori ottenuti per la tensione, doppio nel caso della distribuzione parabolica rispetto a quello della distribuzione lineare, si evince l'importanza che assume il gradiente della velocità in vicinanza della parete solida.

Esercizio 1.4.2

Una lastra infinita si muove con velocità $U = 0.3 \text{ m/s}$ sopra una seconda lastra con uno strato interposto di liquido avente uno spessore $Y = 0.3 \text{ mm}$; per uno spessore piccolo dello strato (come quello dell'esempio proposto) si può assumere una distribuzione lineare della velocità. La viscosità del liquido è $\mu = 0.65 \text{ centipoise} = 0.65 \times 10^{-3} \text{ kg/(m.s)}$ e la sua massa volumica è $\rho = 880 \text{ kg/m}^3$. Calcolare: a) la viscosità cinematica ν ; b) la tensione sulla lastra superiore e su quella inferiore σ_{yx} ; c) il verso delle tensioni ottenute nel punto b precedente.



- a) Dalla definizione di viscosità cinematica (1.28) si ha

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.650 \times 10^{-3}}{880} = 0.739 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

- b) Il gradiente di velocità du/dy sulle superfici superiore e inferiore vale

$$\frac{du}{dy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{y=Y} - u_{y=0}}{Y - 0} = \frac{U}{Y} = \frac{0.3}{0.3 \times 10^{-3}} = 1000 \frac{1}{\text{s}};$$

perciò dalla definizione di viscosità dinamica (1.27) si ha

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = 0.650 \times 10^{-3} \times 1000 = 0.650 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

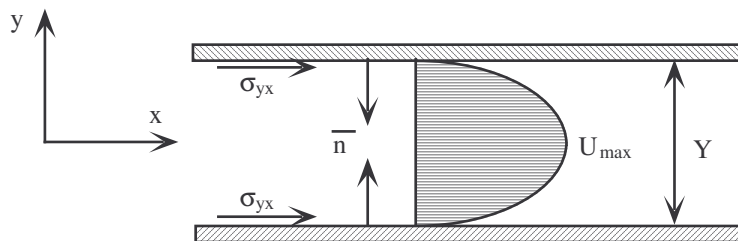
c) Il verso della tensione dipende dai segni del gradiente e della normale alla superficie rispetto alla quale viene calcolata. Nel caso in esame il gradiente della velocità è positivo perché la velocità cresce con la coordinata y e di conseguenza i versi delle tensioni hanno lo stesso segno delle normali; infatti sulla superficie della lastra superiore la tensione è diretta nel verso negativo delle x perché la normale $\bar{n}$ è diretta nel verso negativo delle y (negativo volte positivo), mentre sulla superficie della lastra inferiore la tensione è diretta nel verso positivo delle x perché la normale $\bar{n}$ è diretta nel verso positivo delle y (positivo volte positivo).

Esercizio 1.4.3

La legge della velocità in un moto laminare fra due lastre parallele è data dalla relazione seguente (vedi i capitoli 8 della teoria e degli esercizi)

$$\frac{u}{U_{\max}} = 1 - \left(\frac{2y}{Y} \right)^2$$

dove u è la velocità generica, $U_{\max}$ è la velocità massima, y è la distanza generica a partire dall'origine posiziona a metà strada fra le due lastre e Y è la distanza fra le due lastre. Il fluido è acqua alla temperatura $T = 15^\circ\text{C}$ e la superficie delle lastre è $S = 0.3 \text{ m}^2$, mentre $U_{\max} = 0.3 \text{ m/s}$ e $Y = 0.5 \text{ mm}$. Calcolare sulle lastre: a) i gradienti della velocità du/dy ; b) le tensioni tangenziali σ_{yx} ; c) i versi delle tensioni; d) le forze.



- a) Derivando la legge data, i gradienti della velocità alle distanze $y = \pm Y/2$, corrispondenti alle superfici delle lastre superiore e inferiore, valgono

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= -\frac{8 U_{\max}}{Y^2} y & \rightarrow & \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=Y/2} = -\frac{4 U_{\max}}{Y} = -\frac{4 \times 0.3}{0.0005} = -2400 \frac{1}{\text{s}} \\ & & \rightarrow & \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=-Y/2} = +\frac{4 U_{\max}}{Y} = +\frac{4 \times 0.3}{0.0005} = +2400 \frac{1}{\text{s}}. \end{aligned}$$

- b) Dalla definizione di viscosità (1.27) e dalla tab. T.9, in cui viene letto il valore della viscosità μ , si ha

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad \rightarrow \quad (\sigma_{yx})_{y=+Y/2} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=+Y/2} = 0.00114 \times (-2400) = -2.736 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\quad \rightarrow \quad (\sigma_{yx})_{y=-Y/2} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=-Y/2} = 0.00114 \times (+2400) = +2.736 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} .$$

c) Le tensioni, sono dirette entrambe nel verso delle x positive perché sulla lastra superiore, dove la normale alla superficie è diretta nel verso negativo delle y, il gradiente è anche negativo e sulla lastra inferiore, dove la normale alla superficie è diretta nel verso positivo delle y, il gradiente è anche positivo.

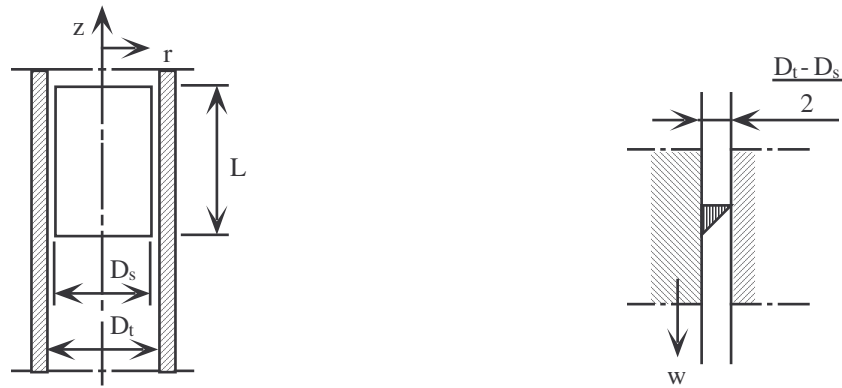
d) Il valore assoluto delle forze è dato da

$$|F| = |\sigma_{yx}| S = 2.736 \times 0.3 = 0.821 \text{ N}$$

e il loro verso è concorde a quello delle tensioni.

Esercizio 1.4.4

Uno stantuffo, di massa $m = 2.5 \text{ kg}$, di diametro $D_s = 73.8 \text{ mm}$ e di lunghezza $L = 150 \text{ mm}$, sta scivolando verso il basso all'interno di un tubo di diametro $D_t = 74.0 \text{ mm}$. Lo stantuffo è concentrico con il tubo e un film d'olio, di viscosità $\mu = 7 \times 10^{-3} \text{ N s/m}^2$, è interposto fra lo stantuffo e il tubo. Calcolare la velocità terminale w_T dello stantuffo, cioè la sua velocità costante di equilibrio. Si trascurano gli effetti della pressione dell'aria e si assume all'interno del film fluido un profilo lineare della velocità.



Lo spessore h del film d'olio è dato da

$$h = \frac{D_t - D_s}{2} ,$$

mentre il gradiente della velocità dw/dr è dato da

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\Delta w}{\Delta r} = \frac{w}{h} = \frac{2 w}{D_t - D_s} ;$$

quindi dalla legge di Newton (1.27) si ha

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{dw}{dr} = \mu \frac{2 w}{D_t - D_s} ,$$

mentre l'area S della parete dello stantuffo è data da

$$S = \pi D_s L .$$

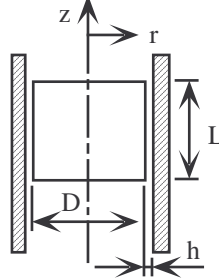
Nella condizione di equilibrio, che si verifica quando lo stantuffo raggiunge la velocità terminale, il peso G dello stantuffo uguaglia la forza viscosa F . Allora si ha

$$G = F \quad \rightarrow \quad m g = \sigma_{rz} S \quad \rightarrow \quad m g = \mu \frac{2 w}{D_t - D_s} \pi D_s L \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad w_T = \frac{1}{\pi \mu} \frac{D_t - D_s}{2 D_s L} m g = \frac{1}{\pi \times 7 \times 10^{-3}} \times \frac{74.0 \times 10^{-3} - 73.8 \times 10^{-3}}{2 \times 73.8 \times 10^{-3} \times 150 \times 10^{-3}} \times 2.5 \times 9.80665 = 10.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 1.4.5

Uno stantuffo di ferro, di diametro $D = 0.150$ m e di lunghezza $L = 0.125$ m, sta scivolando verso il basso all'interno di un tubo su un film d'olio, di spessore $h = 0.025$ mm, interposto fra il cilindro e il tubo. Nell'istante in cui il cilindro ha la velocità $w = 6$ m/s, la sua decelerazione è $a = -0.6$ m/s². Calcolare la viscosità μ dell'olio. Si trascurano gli effetti della pressione dell'aria e si assume che lo stantuffo sia concentrico con il tubo e che all'interno del film fluido il profilo della velocità sia lineare.



Il gradiente della velocità dw/dr è dato da

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\Delta w}{\Delta r} = \frac{w}{h} ;$$

quindi dalla legge di Newton (1.27) si ha

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{dw}{dr} = \mu \frac{w}{h} ,$$

mentre l'area S della parete dello stantuffo è data da

$$S = \pi D L$$

e la massa m dello stantuffo è data da

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi D^2}{4} L$$

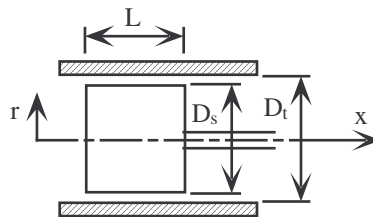
dove ρ è la massa volumica del ferro.

Nella condizione di equilibrio, in cui lo stantuffo ha la velocità w e la decelerazione a , il peso G dello stantuffo uguaglia la forza viscosa F_v e la forza d'inerzia F_i . Allora si ha

$$\begin{aligned} G = F_v + F_i &\rightarrow m g = \sigma_{rz} S - m a \rightarrow \rho \frac{\pi D^2}{4} L g = \mu \frac{w}{h} \pi D L - \rho \frac{\pi D^2}{4} L a \rightarrow \\ &\rightarrow \mu = \frac{D h}{4} \rho \frac{g - a}{w} = \frac{0.150 \times 0.025 \times 10^{-3}}{4} \times 7800 \times \frac{9.80665 + 0.6}{6} = 0.0127 \frac{\text{N}}{\text{m s}} . \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.6

Uno stantuffo, di diametro $D_s = 0.1267$ m e di lunghezza $L = 0.0750$ m, si muove all'interno di un tubo, di diametro $D_t = 0.1270$ m, alla velocità $u = 6$ m/s. Il film di olio che li separa ha una viscosità $\mu = 0.950$ Ns/m². Calcolare la forza F necessaria a mantenere il moto. Si trascurano gli effetti della pressione dell'aria e si assume che lo stantuffo sia concentrico con il tubo e che all'interno del film fluido il profilo della velocità sia lineare.



Lo spessore h del film d'olio è dato da

$$h = \frac{D_t - D_s}{2} ,$$

mentre il gradiente della velocità du/dr è dato da

$$\frac{du}{dr} = \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{u}{h} = \frac{2u}{D_t - D_s} ;$$

quindi dalla legge di Newton (1.27) si ha

$$\sigma_{rx} = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{2u}{D_t - D_s} ,$$

mentre l'area S della parete dello stantuffo è

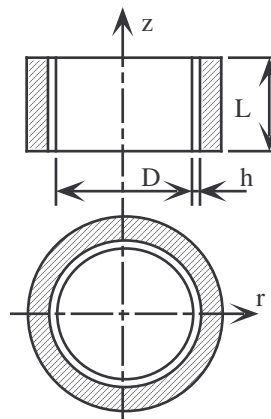
$$S = \pi D_s L .$$

Nella condizione di equilibrio, che si verifica quando lo stantuffo mantiene la velocità u costante, la forza richiesta F uguaglia la forza viscosa F_v . Allora si ha

$$F = \sigma_{rx} S = \mu \frac{2u}{D_t - D_s} \pi D_t L = 0.950 \times \frac{2 \times 6}{0.1270 \times 10^{-3} - 0.1267 \times 10^{-3}} \times \pi \times 0.1267 \times 10^{-3} \times 0.0750 = 1130 \text{ N} .$$

Esercizio 1.4.7

Un albero verticale ruota all'interno di un cuscinetto ad esso concentrico. Un film d'olio, di viscosità $\mu = 0.1 \text{ Ns/m}^2$, separa i due componenti con un meato di spessore $h = 0.01 \text{ mm}$. L'albero ruota alla velocità $\omega = 125 \text{ rad/s}$ e ha il diametro $D = 50 \text{ mm}$, mentre il cuscinetto ha la lunghezza $L = 25 \text{ mm}$. Calcolare la potenza P dissipata. Si trascurano gli effetti della forza centrifuga e delle estremità del cuscinetto e si assume all'interno del film fluido un profilo lineare della velocità.



La velocità tangenziale dell'albero v è data da

$$v = \omega \frac{D}{2} ,$$

mentre il gradiente della velocità dv/dr è dato da

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\Delta v}{\Delta h} = \frac{v}{h} = \frac{\omega D}{2h} ;$$

quindi dalla legge di Newton (1.27) si ha

$$\sigma_{r\theta} = \mu \frac{dv}{dr} = \mu \frac{\omega D}{2h} ,$$

mentre l'area della superficie di contatto S è

$$S = \pi D L .$$

La forza tangenziale T (di natura viscosa) è data da

$$T = \sigma_{r\theta} S = \mu \frac{\omega D}{2h} \pi D L = \frac{\pi}{2} \mu \frac{\omega D^2 L}{h} ,$$

il momento torcente resistente M (di natura viscosa) è dato da

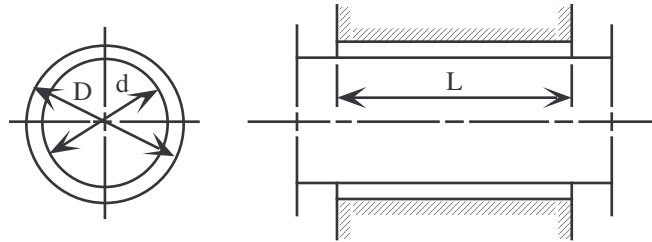
$$M = T \frac{D}{2} = \frac{\pi}{4} \mu \frac{\omega D^3 L}{h}$$

e la potenza P dissipata (sempre di natura viscosa) è data da

$$P = M \omega = \frac{\pi}{4} \mu \frac{\omega^2 D^3 L}{h} = \frac{\pi}{4} \times 0.1 \times \frac{125^2 \times (50 \times 10^{-3})^3 \times 25 \times 10^{-3}}{0.01 \times 10^{-3}} = 384 \text{ W} .$$

Esercizio 1.4.8

Un albero di diametro $d = 74.90 \text{ mm}$ ruota in un cuscinetto di diametro $D = 75.03 \text{ mm}$ e di lunghezza $L = 150 \text{ mm}$. Fra albero e cuscinetto viene inserito olio lubrificante di viscosità $\mu = 0.096 \text{ kg/(m.s)}$. Se l'albero ruota a $n = 1400 \text{ giri/min}$, calcolare la potenza P usata per vincere la resistenza viscosa. Si assume che la velocità all'interno del meato abbia andamento lineare e che l'albero e il cuscinetto siano concentrici (altezza del meato costante).



Il gradiente della velocità dv/dr è dato da

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v}{R - r} = \frac{2v}{D - d} ;$$

quindi dalla legge di Newton (1.27) si ha

$$\sigma_{r\theta} = \mu \frac{dv}{dr} = \mu \frac{2v}{D - d} ,$$

mentre l'area di contatto S è data da

$$S = \pi D L .$$

La forza tangenziale T di attrito è data da

$$T = \sigma_{r\theta} S = \mu \frac{2v}{D - d} \pi D L = 2 \pi \mu \frac{D}{D - d} L v$$

e la potenza P dissipata per attrito è

$$P = T v = 2 \pi \mu \frac{D}{D - d} L v^2 .$$

Poiché la velocità angolare ω in funzione del numero di giri n è data da

$$\omega = 2 \pi \frac{n}{60}$$

e poiché la velocità tangenziale v in funzione di quella angolare ω è data da

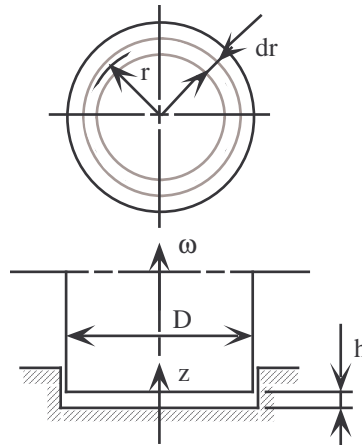
$$v = \omega \frac{d}{2} = 2 \pi \frac{n}{60} \frac{d}{2} = \frac{\pi}{60} n d ,$$

la potenza P diventa

$$\begin{aligned} P &= 2 \pi \mu \frac{D}{D - d} L v^2 = 2 \pi \mu \frac{D}{D - d} L \left(\frac{\pi}{60} n d \right)^2 = \frac{2 \pi^3}{60^2} \mu \frac{D d^2}{D - d} L n^2 = \\ &= \frac{2 \pi^3}{60^2} \times 0.096 \times \frac{75.03 \times 10^{-3} \times (74.90 \times 10^{-3})^2}{(75.03 - 74.9) \times 10^{-3}} \times 0.150 \times 1400^2 = 1570 \text{ W} \cong 1.6 \text{ kW} . \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.9

La spinta all'estremità inferiore di un albero verticale di diametro $D = 100$ mm si scarica sulla parete di fondo di un alloggiamento praticato in un disco piatto tramite un film d'olio spesso $h = 0.25$ mm. L'albero ruota a $n = 1000$ giri/min e la viscosità dell'olio è $\mu = 0.13$ kg/(m.s). Calcolare la potenza P assorbita per attrito. Si trascura l'effetto fra l'albero e la parete laterale dell'alloggiamento.



Il gradiente della velocità dv/dz è dato da

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{v}{h} = \omega \frac{r}{h} = \frac{2\pi n}{60} \frac{r}{h} = \frac{\pi}{30} \frac{n r}{h} ;$$

quindi dalla legge di Newton (1.27) si ha

$$\sigma_{z\vartheta} = \mu \frac{dv}{dz} = \mu \frac{v}{h} = \frac{\pi}{30} \mu \frac{n r}{h} ,$$

mentre l'area infinitesima dS della superficie di contatto è data da

$$dS = 2\pi r dr .$$

La forza tangenziale infinitesima di attrito dT è data da

$$dT = \sigma_{z\vartheta} dS = \frac{\pi}{30} \mu \frac{n r}{h} 2\pi r dr = \frac{\pi^2}{15} \mu \frac{n}{h} r^2 dr ,$$

il momento torcente infinitesimo di attrito dM è dato da

$$dM = dT r = \frac{\pi^2}{15} \mu \frac{n}{h} r^3 dr$$

e la potenza infinitesima dissipata per attrito dP è data da

$$dP = dM \omega = \frac{\pi^2}{15} \mu \frac{n}{h} r^3 dr \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi^3}{450} \mu \frac{n^2}{h} r^3 dr ;$$

infine la potenza P dissipata, integrando sul raggio da 0 a R , è data da

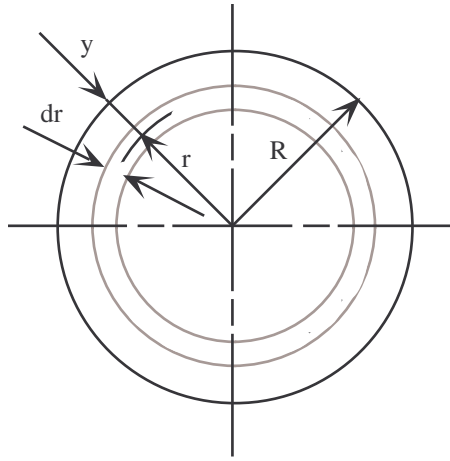
$$P = \int_0^R dP = \frac{\pi^3}{450} \mu \frac{n^2}{h} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi^3}{1800} \mu \frac{n^2}{h} R^4 = \frac{\pi^3}{28800} \mu \frac{n^2}{h} D^4 = \frac{\pi^3}{28800} 0.13 \frac{1000^2}{0.25 \times 10^{-3}} (100 \times 10^{-3})^4 = 56.0 \text{ W} .$$

Esercizio 1.4.10

La distribuzione della velocità in un tubo di raggio R può essere espressa dalla legge

$$u = U_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n}$$

dove u è la velocità in un punto distante y dalla parete e $U_{\max}$ è la velocità sull'asse. Trovare le leggi per: a) la portata volumetrica G_v ; b) la velocità media u_m . Dimostrare poi che: c) un tubo di Pitot, sistemato su un raggio pari a $0.25 R$ dalla parete, registra la velocità media con uno scarto del $\pm 0.6 \%$ quando n è compreso fra 4 e 10.



Dalla figura si nota che

$$r = R - y \quad \rightarrow \quad dr = -dy$$

a) La portata volumetrica G_v è data da

$$\begin{aligned} G_v &= \int_0^R u \, 2\pi r \, dr = \int_R^0 U_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n} 2\pi (R - y) (-dy) = U_{\max} \frac{2\pi}{R^{1/n}} \left(\int_R^0 -R y^{1/n} dy + \int_R^0 y^{1+1/n} dy \right) = \\ &= U_{\max} \frac{2\pi}{R^{1/n}} \left(R \frac{n+1}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} - \frac{n}{2n+1} R^{\frac{2n+1}{n}} \right) = U_{\max} \frac{2\pi}{R^{1/n}} \left(\frac{n}{n+1} R^{\frac{2n+1}{n}} - \frac{n}{2n+1} R^{\frac{2n+1}{n}} \right) = \\ &= U_{\max} \frac{2\pi}{R^{1/n}} R^{\frac{2n+1}{n}} \frac{n(2n+1) - n(n+1)}{(n+1)(2n+1)} = U_{\max} 2\pi R^2 \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

b) La velocità media, quindi, è data da

$$u_m = \frac{G_v}{\pi R^2} = U_{\max} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$$

c) Quando $n = 4$:

$$\begin{aligned} u &= U_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n} = U_{\max} \left(\frac{0.25 R}{R} \right)^{1/4} = 0.7071 U_{\max} \\ u_m &= U_{\max} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} = U_{\max} \frac{2 \times 4^2}{(4+1)(2 \times 4 + 1)} = 0.7111 U_{\max} \end{aligned}$$

per cui l'errore percentuale è dato da

$$e = \frac{u_m - u}{u_m} = \frac{0.7071 - 0.7111}{0.7071} = -0.566\%$$

mentre quando $n = 10$:

$$\begin{aligned} u &= U_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n} = U_{\max} \left(\frac{0.25 R}{R} \right)^{1/10} = 0.8706 U_{\max} \\ u_m &= U_{\max} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} = U_{\max} \frac{2 \times 10^2}{(10+1)(2 \times 10 + 1)} = 0.8658 U_{\max} \end{aligned}$$

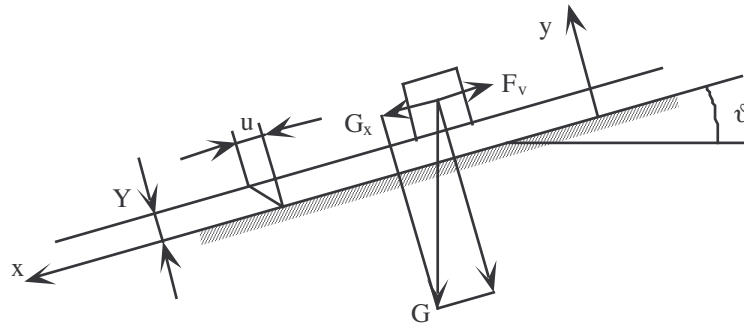
per cui l'errore percentuale è dato da

$$e = \frac{u_m - u}{u_m} = \frac{0.8706 - 0.8658}{0.8706} = -0.551\%$$

Esercizio 1.4.11

Un cubo di ferro, di lato $L = 0.2$ m, scivola lungo un piano inclinato, di angolo $\vartheta = 30^\circ$, su un film, di spessore

$Y = 0.02$ mm, formato da olio alla temperatura $T = 20$ °C. Calcolare la velocità terminale u_e (di equilibrio) del cubo se il profilo della velocità nello spessore del film è considerato lineare.



Il gradiente della velocità du/dy è dato da

$$\frac{du}{dy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{y=Y} - u_{y=0}}{Y - 0} = \frac{u}{Y} ;$$

quindi dalla legge di Newton (1.27) si ha

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{u}{Y} ,$$

mentre il peso del cubo è dato da

$$G = \rho g V = \rho g L^3$$

e la sua superficie di appoggio sul piano inclinato è data da

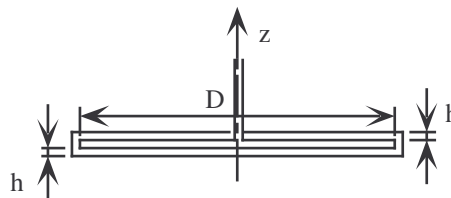
$$S = L^2 .$$

Nella condizione di equilibrio, che si verifica quando il cubo raggiunge la velocità terminale, la componente lungo il piano inclinato del peso del cubo G_x uguaglia la forza di resistenza viscosa F_v . Allora, usando anche la tab. T.9, in cui viene letto il valore della viscosità μ dell'olio, si ha

$$\begin{aligned} G_x = F_v &\rightarrow G \sin \vartheta = \sigma_{yx} S \rightarrow \rho g L^3 \sin \vartheta = \mu \frac{u}{Y} L^2 \rightarrow \\ \rightarrow u_e &= \frac{\rho g L \sin \vartheta Y}{\mu} = \frac{7800 \times 9.80665 \times 0.2 \times \sin(30^\circ) \times 0.02 \times 10^{-3}}{0.109} = 1.40 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.12

In un contatore il movimento del meccanismo di misura è smorzato da un disco, rotante con il meccanismo, immerso in un contenitore riempito di olio avente viscosità $\mu = 8 \times 10^{-3}$ Ns/m². La velocità angolare del meccanismo è $\omega = 0.2$ rad/s, il diametro del rotore è $D = 75$ mm e la distanza fra rotore e statore è $h = 0.5$ mm. Calcolare il momento smorzante M . Si trascurano gli effetti di bordo del disco rotante.



Il gradiente della velocità dv/dz è dato da

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\Delta v}{\Delta h} = \frac{v - 0}{h - 0} = \frac{v}{h} = \frac{\omega r}{h}$$

dove r è il raggio generico; quindi dalla legge di Newton (1.27) si ha

$$\sigma_{z\vartheta} = \mu \frac{dv}{dz} = \mu \frac{\omega r}{h} ,$$

mentre l'area infinitesima totale dS della superficie di contatto è data dalla somma di quella inferiore e di quella

superiore

$$dS = 2 \pi r dr + 2 \pi r dr = 4 \pi r dr .$$

La forza tangenziale infinitesima viscosa dT è allora data da

$$dT = \sigma_{z\vartheta} dS = \mu \frac{\omega r}{h} 4 \pi r dr = 4 \pi \mu \frac{\omega}{h} r^2 dr ,$$

mentre il momento infinitesimo viscoso dM è dato da

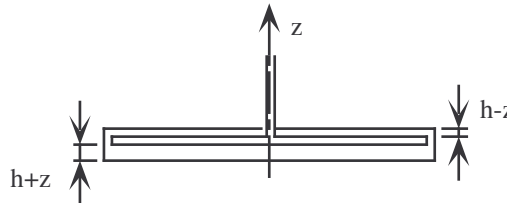
$$dM = dT r = 4 \pi \mu \frac{\omega}{h} r^3 dr ;$$

infine il momento M smorzante, integrando sul raggio da 0 a R , è dato da

$$M = \int_0^R dM = 4 \pi \mu \frac{\omega}{h} \int_0^R r^3 dr = \pi \mu \frac{\omega}{h} R^4 = \frac{\pi}{16} \mu \frac{\omega}{h} D^4 = \frac{\pi}{16} 8 \times 10^{-3} \frac{0.2}{0.5 \times 10^{-3}} (75 \times 10^{-3})^4 = 19.9 \times 10^{-6} \text{ N.m} .$$

Esercizio 1.4.13

Per l'apparecchiatura dell'esercizio 1.4.12 sviluppare un'espressione che determini il momento smorzante in funzione della distanza z fra il piano medio del disco rotante e la sua posizione centrale.



Se il disco smorzatore non è centrato, le altezze dei film d'olio sulle due facce del disco possono essere messe in funzione della distanza z fra il suo piano medio e la sua posizione centrale

$$h_1 = h + z , \quad h_2 = h - z ;$$

in tal modo i gradienti della velocità du/dh_1 e du/dh_2 da introdurre nella legge di Newton (1.27) in corrispondenza del raggio generico r sono

$$\frac{du}{dh_1} = \frac{\Delta u}{\Delta h_1} = \frac{u - 0}{h_1 - 0} = \frac{u}{h_1} = \frac{\omega r}{h + z} , \quad \frac{du}{dh_2} = \frac{\Delta u}{\Delta h_2} = \frac{u - 0}{h_2 - 0} = \frac{u}{h_2} = \frac{\omega r}{h - z} .$$

Le tensioni tangenziali $\sigma_{z\vartheta 1}$ e $\sigma_{z\vartheta 2}$ sulle pareti del disco sono

$$\sigma_{z\vartheta 1} = \mu \frac{du}{dh_1} = \mu \frac{\omega r}{h + z} , \quad \sigma_{z\vartheta 2} = \mu \frac{du}{dh_2} = \mu \frac{\omega r}{h - z} ,$$

mentre le due aree della superficie infinitesima di contatto dS , una superiore ed una inferiore, in corrispondenza del raggio generico r sono ognuna

$$dS = 2 \pi r dr .$$

La forza tangenziale infinitesima viscosa dT_v^* è allora

$$dT_v^* = (\sigma_{z\vartheta 1} + \sigma_{z\vartheta 2}) dS = 2 \pi \mu \omega \left(\frac{1}{h + z} + \frac{1}{h - z} \right) r^2 dr = 2 \pi \mu \omega \frac{2h}{h^2 - z^2} r^2 dr ,$$

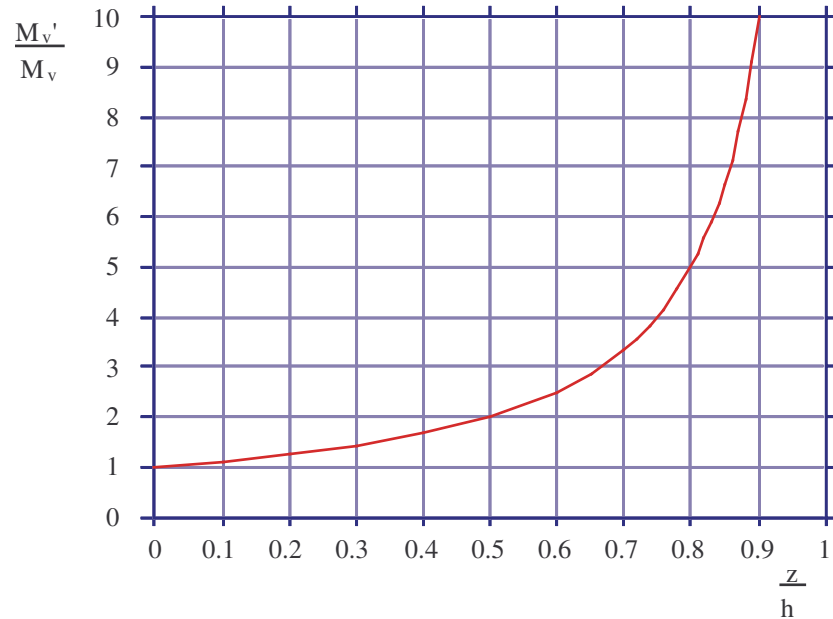
mentre il momento torcente resistente infinitesimo (di natura viscosa) dM_v' è

$$dM_v' = dT_v^* r = 2 \pi \mu \omega \frac{2h}{h^2 - z^2} r^3 dr ;$$

il momento smorzante, integrando sul raggio da 0 a R , è

$$M_v' = \int_0^R dM_v' = 2 \pi \mu \omega \frac{2h}{h^2 - z^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \mu \omega \frac{2h}{h^2 - z^2} R^4 = \frac{\pi}{16} \mu \omega \frac{2h}{h^2 - z^2} D^4 = M_v \frac{1}{1 - (z/h)^2} .$$

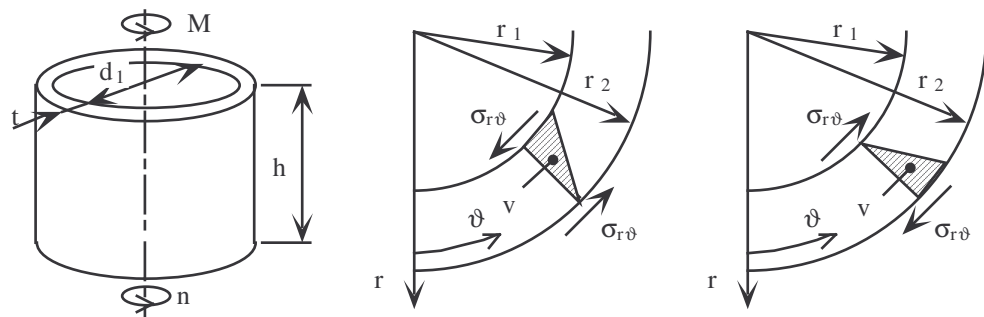
Se $z = 0$, e quindi il disco è centrato, si ottiene la relazione dell'esercizio precedente, mentre se $z \neq 0$ si ottiene il diagramma della figura seguente.



Dal diagramma si nota che il momento smorzante è minimo per $z = 0$ e che esso aumenta all'aumentare di z fino a tendere all'infinito per z tendente ad h ; quando $z = h$ si ha il contatto di una superficie del disco con una del contenitore.

Esercizio 1.4.14

Un viscosimetro è costituito da due cilindri coassiali alti $h = 25$ cm e separati da un'intercapedine $t = 1$ mm; il cilindro interno ha un diametro $d_1 = 15$ cm. Calcolare il momento torcente M che deve essere applicato ad uno dei due cilindri per farlo ruotare alla velocità di $n = 40$ giri/min rispetto all'altro fermo quando l'intercapedine sia riempita di acqua, di glicerina o di aria alla temperatura $T = 20$ °C.



Il momento torcente applicato sul cilindro più interno (di natura meccanica) si trasmette al cilindro più esterno tramite il fluido interposto ed è uguale a quello resistente dissipativo (di natura fluidodinamica) che si sviluppa all'interno del fluido stesso.

Il momento torcente meccanico M e la tensione meccanica $\sigma_{r\theta}$ sono dati da

$$M = \sigma_{r\theta} S r = \sigma_{r\theta} 2 \pi r h r \quad \rightarrow \quad \sigma_{r\theta} = \frac{M}{2 \pi r^2 h}$$

dove $\sigma_{r\theta}$ è la tensione tangenziale agente sul piano perpendicolare alla coordinata radiale r e posizionata lungo la coordinata circonferenziale θ ed S è la superficie di giacitura della tensione; dalla legge di Newton (1.27) la tensione fluidodinamica è data anche da

$$\sigma_{r\theta} = \mu \frac{dv}{dr}$$

dove v è la velocità circonferenziale del fluido. Uguagliando i due valori della tensione, quella meccanica positiva perché il cilindro ruota nel verso positivo delle θ e quella fluidodinamica negativa perché il gradiente della velocità è negativo rispetto all'asse r , e separando le variabili, si ha l'equazione di equilibrio

$$-2 \pi \mu h dv = M \frac{dr}{r^2} ;$$

integrando l'equazione di equilibrio fra i limiti dei due cilindri si ha

$$-2 \pi \mu h \int_{v_1}^{v_2} dv = M \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow -2 \pi \mu h (v_2 - v_1) = M \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \rightarrow M = \frac{-2 \pi \mu h (v_2 - v_1)}{-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}} .$$

Le velocità dei cilindri interno v_1 ed esterno v_2 sono date da

$$v_1 = \omega r_1 = \frac{2 \pi n}{60} r_1 = \frac{2 \pi 40}{60} \times 0.075 = 0.314 \frac{m}{s} , \quad v_2 = 0$$

mentre i raggi interno r_1 ed esterno r_2 sono dati da

$$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{15 \times 10^{-2}}{2} = 0.0750 \text{ m} , \quad r_2 = r_1 + t = 0.075 + 1 \times 10^{-3} = 0.0760 \text{ m} ;$$

in conclusione dalla tab. T.8, in cui viene letto il valore della viscosità μ , per l'acqua si ha

$$M_{\text{acqua}} = \frac{-2 \pi \mu h (v_2 - v_1)}{-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}} = \frac{-2 \times \pi \times 0.00101 \times 0.25 \times (0 - 0.314)}{-\frac{1}{0.0760} + \frac{1}{0.0750}} = 0.00284 \text{ N.m} ,$$

mentre per la glicerina e per l'aria si ha rispettivamente

$$M_{\text{glicerina}} = 2.35 \text{ N.m} \quad M_{\text{aria}} = 0.00000669 \text{ N.m} .$$

Nel caso in cui il momento torcente fosse applicato al cilindro più esterno, uguagliando i due valori delle tensioni, quella meccanica positiva perché il cilindro ruota nel verso positivo delle ϑ e quella fluidodinamica positiva perché il gradiente della velocità è positivo rispetto all'asse r , e separando le variabili, si avrebbe l'equazione di equilibrio

$$2 \pi \mu h dv = M \frac{dr}{r^2} ;$$

integrando l'equazione di equilibrio fra i limiti dei due cilindri si ha

$$2 \pi \mu h \int_{v_1}^{v_2} dv = M \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow 2 \pi \mu h (v_2 - v_1) = M \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \rightarrow M = \frac{2 \pi \mu h (v_2 - v_1)}{-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}} .$$

Le velocità dei cilindri interno v_1 ed esterno v_2 sono date da

$$v_1 = 0 , \quad v_2 = \omega r_2 = \frac{2 \pi n}{60} r_2 = \frac{2 \pi 40}{60} \times 0.076 = 0.318 \frac{m}{s} ;$$

in conclusione per l'acqua si ha

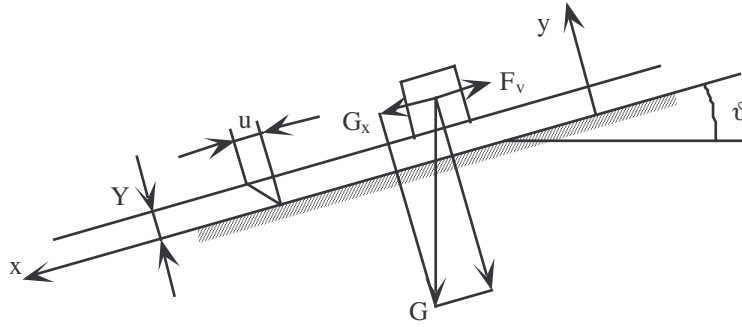
$$M_{\text{acqua}} = \frac{2 \pi \mu h (v_2 - v_1)}{-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}} = \frac{2 \times \pi \times 0.00101 \times 0.25 \times (0.318 - 0)}{-\frac{1}{0.0760} + \frac{1}{0.0750}} = 0.00288 \text{ N.m} ,$$

mentre per la glicerina e per l'aria si ha rispettivamente

$$M_{\text{glicerina}} = 2.38 \text{ N.m} \quad M_{\text{aria}} = 0.00000678 \text{ N.m} .$$

Esercizio 1.4.15

Un cubo di ferro, di lato $L = 0.2 \text{ m}$, scivola lungo un piano inclinato, di angolo $\vartheta = 30^\circ$, su un film, di spessore $Y = 0.02 \text{ mm}$, formato da olio alla temperatura $T = 20^\circ \text{C}$. Se il profilo della velocità all'interno dello spessore del film d'olio è considerato lineare, calcolare le leggi del moto del cubo di ferro riguardanti: a) lo spazio s ; b) la velocità v ; c) l'accelerazione a .



La legge del moto nella direzione x, perché la velocità u è funzione della distanza x, diventa

$$\sum F_x = m \frac{du}{dt} \quad \rightarrow \quad G_x - F_v = m \frac{du}{dt}$$

dove G_x è la componente della forza peso G lungo il piano inclinato e F_v è la forza di resistenza dovuta al film liquido. Poiché la forza attiva è data da

$$G_x = G \sin \vartheta = m g \sin \vartheta$$

e la forza resistente è data da

$$F_v = \sigma_{yx} S = \mu \frac{du}{dy} S = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} S = \mu \frac{u - 0}{Y - 0} S = \frac{\mu u S}{Y} ,$$

dove S è la superficie di appoggio del cubo sul liquido, si ha

$$m g \sin \vartheta - \frac{\mu u S}{Y} = m \frac{du}{dt} .$$

Si separano le variabili e si integra

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{m du}{m g \sin \vartheta - \frac{\mu u S}{Y}} &= \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad - \frac{m Y}{\mu S} \int_0^u \frac{d \left(m g \sin \vartheta - \frac{\mu u S}{Y} \right)}{m g \sin \vartheta - \frac{\mu u S}{Y}} = \int_0^t dt \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad - \frac{m Y}{\mu S} \ln \left[m g \sin \vartheta - \frac{\mu u S}{Y} \right]_0^u = [t]_0^t \quad \rightarrow \quad \ln \left[\frac{m g \sin \vartheta - \frac{\mu u S}{Y}}{m g \sin \vartheta} \right] = - \frac{\mu S}{m Y} t , \end{aligned}$$

si passa all'esponenziale

$$m g \sin \vartheta - \frac{\mu u S}{Y} - m g \sin \vartheta = \exp \left(- \frac{\mu S}{m Y} t \right)$$

e si ha

$$u = \frac{m Y}{\mu S} g \sin \vartheta \left[1 - \exp \left(- \frac{\mu S}{m Y} t \right) \right] = \frac{A}{B} [1 - \exp(-B t)]$$

dove

$$A = g \sin \vartheta \quad , \quad B = \frac{\mu S}{m Y} .$$

L'accelerazione si trova per derivazione della velocità rispetto al tempo

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{A}{B} [1 - \exp(-B t)] \right\} = A \exp(-B t) = g \sin \vartheta \exp \left(- \frac{\mu S}{m Y} t \right)$$

e lo spazio percorso per integrazione della velocità nel tempo

$$ds = u \, dt \quad \rightarrow \quad \int_0^s ds = \int_0^t \frac{A}{B} [1 - \exp(-B t)] dt \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad s = \frac{A}{B} t - \frac{A}{B^2} [1 - \exp(-B t)] = \frac{m Y}{\mu S} g \sin \vartheta t - \left(\frac{m Y}{\mu S} \right)^2 g \sin \vartheta \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu S}{m Y} t\right) \right].$$

La velocità di equilibrio u_e viene raggiunta quando la forza attiva G_x uguaglia la forza resistente F_v , cioè quando

$$m g \sin \vartheta = \frac{\mu u_e S}{Y} \quad \rightarrow \quad u_e = \frac{g \sin \vartheta m Y}{\mu S} = \frac{A}{B}.$$

Lo stesso risultato viene ottenuto considerando che la condizione di annullamento dell'accelerazione si verifica quando l'esponenziale si annulla

$$a = A \exp(-B t) = 0 \quad \rightarrow \quad \exp(-B t) = 0$$

e che, inserendo questa condizione nella legge della velocità, si ottiene

$$u = \frac{A}{B} [1 - \exp(-B t)] = \frac{A}{B}.$$

Dalla tab. T.9, in cui viene letto il valore della viscosità μ , si ha

$$m = \rho V = \rho L^3 = 7800 \times 0.2^3 = 62.40 \, \text{kg}, \quad S = L^2 = 0.2^2 = 0.040 \, \text{m}^2$$

$$A = g \sin \vartheta = 9.80665 \times \sin(30^\circ) = 4.903 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad B = \frac{\mu S}{m Y} = \frac{0.109 \times 0.040}{62.40 \times 20 \times 10^{-6}} = 3.494 \, \frac{1}{\text{s}}$$

e quindi, in funzione del tempo, si ottengono le espressioni seguenti

$$a = A \exp(-B t) = 4.90 \exp(-3.49 t)$$

$$u = \frac{A}{B} [1 - \exp(-B t)] = 1.40 [1 - \exp(-3.49 t)]$$

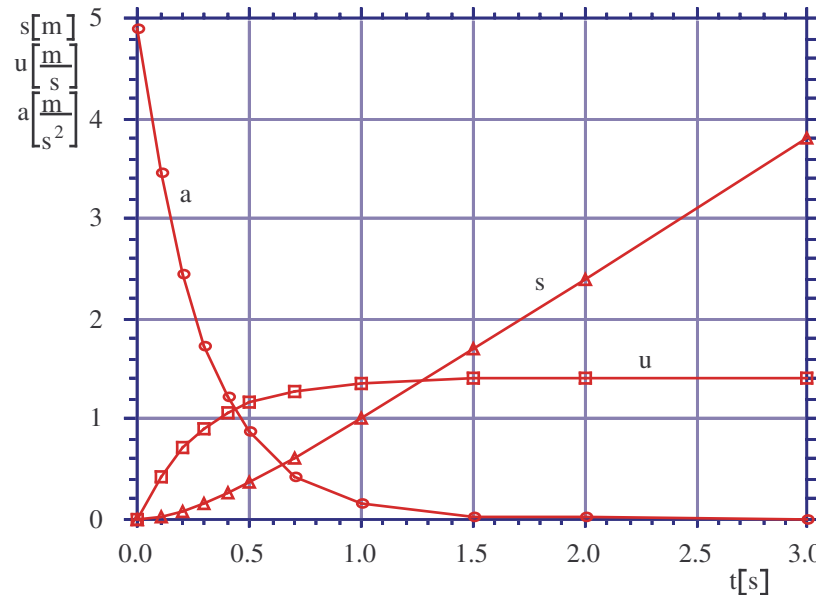
$$s = \frac{A}{B} t - \frac{A}{B^2} [1 - \exp(-B t)] = 1.40 t - 0.402 [1 - \exp(-3.49 t)]$$

$$u_e = \frac{A}{B} = 1.40 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Si perviene quindi alla tabella e al diagramma seguenti da cui si nota che:

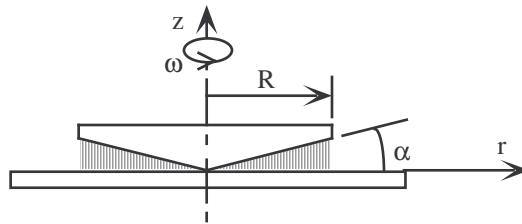
- l'accelerazione, dopo un primo tratto in cui la tangente diminuisce in modo sempre meno pronunciato, diventa quasi nulla quando il tempo è di circa 2 secondi;
- la velocità, dopo un primo tratto in cui la tangente diminuisce in modo sempre meno pronunciato, diventa pari a quasi quella di equilibrio quando il tempo è di circa 2 secondi;
- lo spazio percorso, dopo un primo tratto in cui la tangente aumenta in modo sempre meno pronunciato, comincia a crescere in modo proporzionale rispetto al tempo quando il tempo è di circa 2 secondi.

t [s]	a [m/s ²]	u [m/s]	s [m]
0.0	4.900000	0.000	0.0000
0.1	3.460000	0.412	0.0216
0.2	2.440000	0.703	0.0780
0.3	1.720000	0.909	0.1590
0.4	1.210000	1.050	0.2580
0.5	0.856000	1.160	0.3680
0.7	0.426000	1.280	0.6130
1.0	0.149000	1.360	1.0100
1.5	0.026100	1.390	1.7000
2.0	0.004560	1.400	2.4000
3.0	0.000139	1.400	3.8000



Esercizio 1.4.16

Per provare fluidi non - newtoniani è usato frequentemente un viscosimetro a cono, formato da un piatto e da un cono rotante con un angolo di apertura molto ottuso ($\alpha \leq 0.5^\circ$). Il vertice del cono tocca il piatto e il fluido in prova riempie lo spazio fra il cono e il piatto. Trovare le espressioni: a) della tensione tangenziale $\sigma_{z\vartheta}$; b) del momento torcente M che deve essere applicato al cono.



a) Data l'esiguità dell'angolo α e quindi dell'altezza dello strato fluido, il profilo della velocità nello spessore del film può essere considerato lineare; dalla legge di Newton si ha

$$\sigma_{z\vartheta} = \mu \frac{dv}{dz} = \mu \frac{\Delta v}{\Delta z} = \mu \frac{v-0}{z-0} = \mu \frac{v}{z} = \mu \frac{\omega r}{r \operatorname{tg} \alpha} = \mu \frac{\omega}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

b) Il momento torcente elementare dM che deve essere applicato su una corona circolare di spessore infinitesimo dr è dato da

$$dM = dF r = \sigma_{z\vartheta} dS r = \mu \frac{\omega}{\operatorname{tg} \alpha} 2\pi r dr = \mu \frac{2\pi\omega}{\operatorname{tg} \alpha} r^2 dr$$

e quindi il momento totale M è dato da

$$M = \int_0^R dM = \int_0^R \mu \frac{2\pi\omega}{\operatorname{tg} \alpha} r^2 dr = \mu \frac{2\pi\omega}{3 \operatorname{tg} \alpha} R^3.$$