

CAPITOLO 1

PROPRIETÀ FISICHE DEI FLUIDI

1.1. STATI DI AGGREGAZIONE DELLA MATERIA

Tutti gli elementi o composti chimici che costituiscono la materia si presentano in uno dei tre stati di aggregazione noti in natura: **solido**, **liquido**, **aeriforme**. I corpi, che si trovano allo stato liquido e aeriforme, vengono anche detti **fluidi**.

In generale si è abituati a considerare l'acqua come un liquido, il ferro come un solido, l'aria come un aeriforme, ecc., ma non ci si stupisce di vedere anche l'acqua allo stato solido o il ferro allo stato liquido, ecc.; si sa, cioè, che al variare delle condizioni ambientali di temperatura e di pressione può variare lo stato di aggregazione della materia (in queste prime note si danno per conosciuti dalla Fisica i concetti di temperatura, di pressione e di volume specifico; nel seguito questi concetti verranno definiti nei termini che saranno utili per gli sviluppi futuri della materia oggetto del corso).

Si nota anche che, mantenendo costante la pressione, la sostanza in esame conserva il suo stato di aggregazione entro un certo campo di temperatura e che, variando il valore della pressione, si spostano i limiti del campo. Esiste, quindi, per ciascun stato, **un campo di esistenza**; per esempio, l'acqua è liquida alla pressione atmosferica fra una temperatura $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e una temperatura $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ (vedi § 1.3).

Quando una sostanza passa da uno stato di aggregazione ad un altro, sotto l'influenza di una variazione delle condizioni esterne di temperatura e di pressione, si dice che essa subisce un **passaggio di stato (di aggregazione)**. La fig. 1.1 indica schematicamente la nomenclatura dei passaggi di stato.

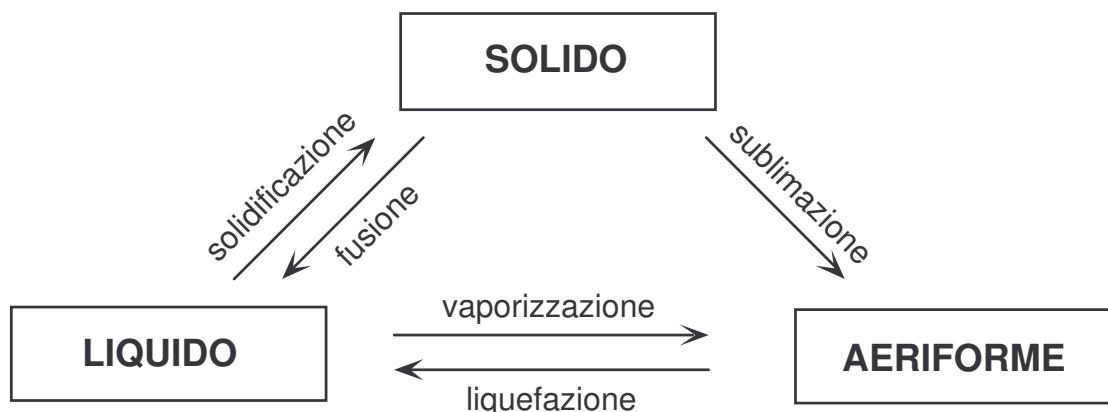
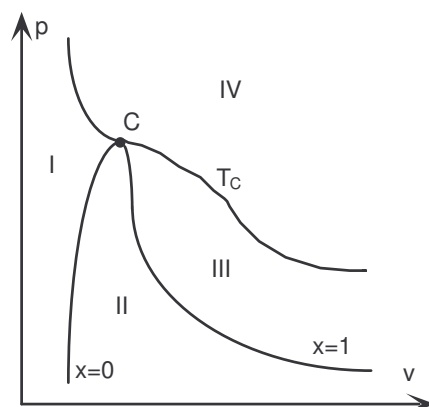


Fig. 1.1.- Schema dei possibili passaggi di stato.-

Esiste, però, un valore di temperatura al di sopra del quale un aeriforme, a qualunque pressione lo si sottoponga, non si trasforma più in liquido; questa temperatura prende il nome di **temperatura critica**. Un fluido allo stato di aeriforme, allora, può essere suddiviso in: **vapore** quando si trova ad una temperatura inferiore a quella critica e pertanto può essere trasformato in liquido e **gas** quando si trova ad una

temperatura superiore a quella critica e non può mai essere trasformato in liquido.

E' ben noto dalla Termodinamica il diagramma $p - v$ per il vapore d'acqua, anche se nelle applicazioni tecniche viene preferito il diagramma del Mollier entalpia – entropia



$$p_C = 230.10 \text{ bar}$$

$$T_C = 647.3 \text{ K}$$

$$v_C = 0.00318 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

In esso, la curva del liquido ($x = 0$), la curva del vapore saturo secco ($x = 1$) e l'isoterma critica (T_C) passano tutte attraverso il punto critico C cui corrispondono i valori dei parametri di stato (vedi § 1.11) indicati in figura e quindi dividono il piano $p - v$ in quattro parti rispettivamente occupate da

I - liquido

II - vapore saturo

III - vapore surriscaldato

IV - gas ;

dal diagramma è facile vedere che nella zona al di sopra della temperatura critica non esiste in alcuna forma vapore d'acqua.

1.2. FORZE MOLECOLARI

Gli stati di aggregazione della materia, descritti nel § 1.1, sono direttamente collegati alla natura delle forze che si esercitano fra le molecole. Si considerino due molecole isolate e le forze che si instaurano in funzione della distanza d fra i loro baricentri. Per piccoli valori della distanza, dell'ordine di 10^{-8} cm per le molecole semplici più comuni, l'interazione è una forza elevata, **attrattiva** o **repulsiva** a seconda delle possibilità di **scambio** degli elettroni.

Quando lo scambio è possibile, la forza è attrattiva e costituisce un legame chimico, mentre quando lo scambio non è possibile, la forza è repulsiva e decade molto rapidamente con l'aumento della distanza in ragione inversa della sua settima o ottava potenza; l'andamento è riportato in fig. 1.2, dove i valori positivi delle forze sono considerati repulsivi. Nel punto d_0 in cui la forza è nulla, una molecola è in posizione di equilibrio stabile rispetto alle altre: d_0 è dell'ordine di 3 o 4×10^{-8} cm per molte molecole semplici. Tale valore può essere preso come **raggio della molecola** pensata come rigida secondo la teoria cinetica dei gas. Al crescere di d oltre d_0 la forza diviene attrattiva, raggiunge un massimo, in valore assoluto, per seguire infine la legge di attrazione universale codificata da Newton. Oltre un certo valore d_a , che viene chiamato **raggio d'azione**, le forze di attrazione diventano trascurabili.

Per sostanze composte da molecole semplici la distanza media delle molecole in fase aeriforme a temperatura e pressione normali è dell'ordine di $10 d_0$, mentre in fase liquida e solida è dell'ordine di d_0 .

Le condizioni normali di un aeriforme corrispondono per convenzione alla pressione atmosferica e alla temperatura di 0°C .

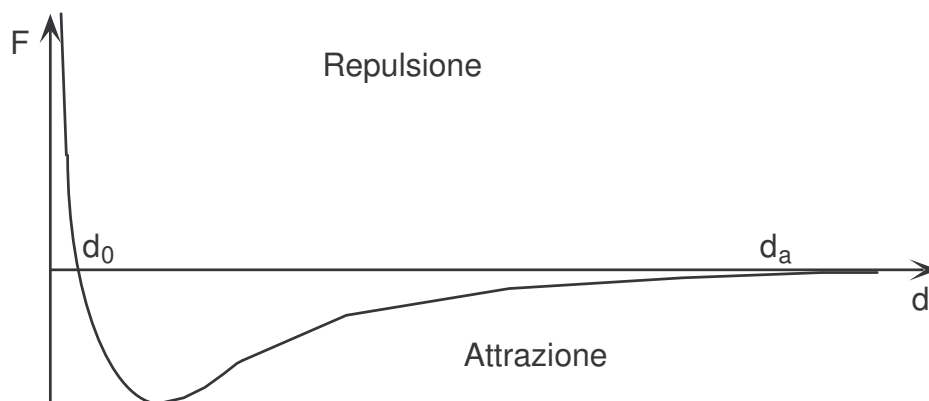


Fig. 1.2.- Andamento delle forze molecolari.-

Negli aeriformi, quindi, le molecole sono così lontane fra loro che le forze di coesione sono molto piccole; di conseguenza l'aeriforme tende ad occupare tutto lo spazio messo a sua disposizione. Nei solidi e nei liquidi, invece, le molecole si trovano all'interno del campo delle forze forti delle molecole vicine e quindi risultano impacchettate fra loro. Nel caso di un corpo solido esse possiedono una struttura permanente e oscillano attorno alla loro posizione stabile (come si vedrà nel § 1.3, queste oscillazioni sono legate al concetto di temperatura); il solido quindi non modifica la sua forma, a meno che non vengano applicate cause esterne, e la struttura rimane intatta fino a che la temperatura non raggiunge il punto di fusione. Nei liquidi le molecole presentano una struttura non permanente e hanno una maggiore mobilità: gruppi di molecole possono agglomerarsi con altri gruppi oppure possono essere divisi in gruppi più piccoli; di conseguenza il liquido assume la forma del recipiente che lo contiene.

Come riassunto, nella tab. 1.1 sono riportate alcune proprietà molecolari dei solidi, dei liquidi e degli aeriformi.

stato di aggregazione	forze molecolari	rapporto movimento / d_0	configurazione molecolare
solido	elevate	$\ll 1$	ordinata
liquido	medie	≈ 1	poco ordinata
aeriforme	deboli	$\gg 1$	disordinata

Tab. 1.1.- Alcune proprietà delle molecole.-

1.3. TEMPERATURA

Il concetto di temperatura trae origine dalle sensazioni della terminologia antica e corrente legate agli aggettivi **caldo** e **freddo**. Il nome deriva dal latino **temperamentum**, che significa mescolanza opportuna, con riferimento alla combinazione delle quattro qualità fondamentali assegnate all'aria dalla teoria aristotelica: caldo, freddo, secco, umido.

Fino alla seconda metà del XVIII secolo, essa venne erroneamente identificata con il **calore contenuto in un corpo**; le ricerche di Black sui calori latenti provarono l'erroneità di questo concetto, ma senza segnare un ulteriore progresso. Le relazioni fra temperatura ed energia divennero chiare solo dopo la teoria cinetica, rivolta dapprima nel XIX secolo solo allo studio dei gas per opera di Clausius, di Maxwell e di Boltzmann, ma trasformatasi in seguito in una vera e propria teoria cinetica della materia quando Gibbs, agli inizi del XX secolo, sviluppò la meccanica quantistica. Sotto questo punto di vista la temperatura risulta un **indice dell'energia cinetica media**

delle particelle che costituiscono un dato corpo.

Poiché non è possibile, a differenza della massa o della lunghezza o del tempo, costruire un campione di temperatura che funzioni da unità di misura di riferimento, i primi tentativi per misurarla si fondarono sull'osservazione che il riscaldamento produce in tutti i corpi un aumento di volume; dal momento che le variazioni di volume risultano misurabili con grande esattezza, si è convenuto di partire da esse per misurare la temperatura. Nacquero così le scale termometriche.

Fra esse si possono menzionare:

a) **scala assoluta Kelvin**, che assume come zero (0 K) il limite inferiore delle temperature e, non avendo un limite superiore, come intervallo unitario quello della scala centigrada (vedi dopo);

b) **scala relativa Celsius o centigrada**, che prende come riferimento l'acqua chimicamente pura, assume come zero (0 °C) la sua temperatura di solidificazione e come cento (100 °C) la sua temperatura di vaporizzazione a pressione atmosferica e presenta con la scala assoluta Kelvin la seguente corrispondenza

$$-273.15 = 0 \text{ K}$$

e le seguenti leggi di trasformazione

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15 \quad , \quad T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15 ; \quad (1.3.1)$$

c) **scala relativa Fahrenheit**, che assume come zero (0 °F) la temperatura di solidificazione di una miscela frigorifera di ghiaccio e sale ammonico e come cento (100 °F) la temperatura normale del corpo umano e quindi presenta con la scala centigrada le seguenti corrispondenze

$$0^{\circ}\text{F} = -17.7^{\circ}\text{C} \quad , \quad 32^{\circ}\text{F} = 0^{\circ}\text{C} \quad , \quad 100^{\circ}\text{F} = 37.7^{\circ}\text{C} \quad , \quad 212^{\circ}\text{F} = 100^{\circ}\text{C}$$

e le seguenti leggi di trasformazione

$$T(^{\circ}\text{C}) = \frac{T(^{\circ}\text{F}) - 32}{1.8} \quad , \quad T(^{\circ}\text{F}) = 1.8 \times T(^{\circ}\text{C}) + 32 ; \quad (1.3.2)$$

d) **scala assoluta Rankine**, che presenta con la scala assoluta Kelvin le seguenti leggi di trasformazione

$$T(\text{K}) = \frac{T(\text{R})}{1.8} \quad , \quad T(\text{R}) = 1.8 \times T(\text{K}) . \quad (1.3.3)$$

1.4. SISTEMI CONTINUI

I sensi dell'uomo fanno apparire i corpi naturali come continui, cioè come occupanti in modo assoluto e completo tutta una regione dello spazio. Si sa bene però, anche da quanto detto in precedenza, che in realtà i corpi naturali sono a struttura discontinua, costituiti da molecole e queste da atomi e questi ultimi da elettroni e nuclei, ecc., ma ciò nonostante lo schema ideale che rappresenta un corpo come continuo ha nella meccanica un interesse fondamentale sia da un punto di vista teorico che da un punto di vista applicativo.

Sarebbe infatti impossibile studiare la stabilità di una costruzione, indagare sul comportamento di un materiale plastico, cercare le condizioni di equilibrio e le circostanze del moto di un fluido partendo dalla considerazione della loro struttura molecolare; viceversa la schematizzazione di corpi naturali tanto diversi fra loro in sistemi continui unificati offre un agevole mezzo di studio, oltre tutto già collaudato da numerose applicazioni. D'altra parte lo schema del continuo materiale, dando un esempio

facilmente comprensibile di **campo**, ha fornito l'occasione per un approfondimento e un'estensione di questo concetto così importante in tutta la fisica.

In un fluido allo stato liquido la massa del materiale è concentrata nei nuclei degli atomi che compongono una molecola ed è ben lontana da occupare in modo uniforme tutto il volume; questo comportamento è ancora più esasperato nei fluidi allo stato aeriforme dove le molecole si trovano a distanze ancora maggiori. Altre proprietà, come per esempio la velocità, presentano una distribuzione fortemente non uniforme quando il fluido è visto su una scala piccola come quella delle singole molecole.

Tuttavia, la fluidodinamica studia il comportamento di un fluido su una scala **macroscopica** rispetto a quella delle molecole; si può allora supporre che il comportamento macroscopico dei fluidi sia uguale a quello dei corpi continui e, quindi, che le quantità fisiche, come la massa e la velocità, siano distribuite su tutto il volume invece che concentrate su una piccola parte di esso.

La validità di questa ipotesi del continuo è evidente in base all'esperienza quotidiana. Infatti, la struttura e le proprietà dell'acqua e dell'aria sono così ovviamente continue o varianti con continuità, quando sono osservate con i mezzi usuali di misura, che un'ipotesi differente sembrerebbe innaturale.

Uno strumento di misura, inserito in un fluido, risponde alle proprietà di un volume che si trova nelle sue vicinanze, **volume sensibile**, e produce una misura che è una media sul volume sensibile. Lo strumento normalmente è scelto in modo che il volume sensibile sia sufficientemente piccolo per una misura **locale**, cioè in modo che un'ulteriore riduzione del volume non cambi la lettura dello strumento.

La ragione per cui la struttura molecolare del fluido è irrilevante a tali misure è che il volume sensibile, anche se sufficientemente piccolo per le misure locali su scala macroscopica, è invece così grande da non consentire che le fluttuazioni esistenti su scala microscopica alterino la media osservata. E' logico che, se il volume sensibile potesse essere ridotto in modo graduale fino a contenere solo poche molecole, il numero e il tipo delle molecole presenti all'istante della misura fluttuerebbero da un'osservazione all'altra e le misure varierebbero in modo irregolare con la grandezza del volume.

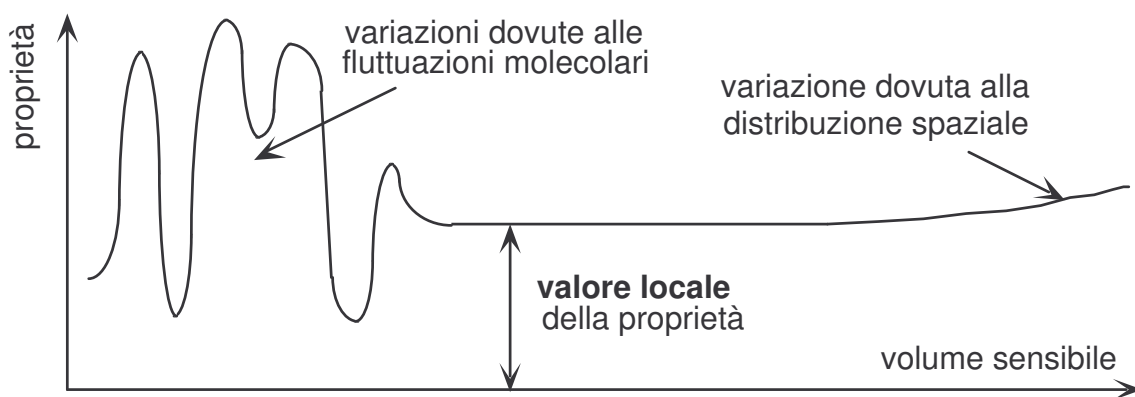


Fig. 1.3.- Andamento della proprietà di un fluido in funzione del volume sensibile.-

La fig. 1.3 mostra il modo in cui una proprietà del fluido possa dipendere dal volume sensibile dello strumento. Si può definire **continuo** il fluido quando la proprietà misurata, indicata in figura come **valore locale**, è costante per volumi sensibili piccoli su scala macroscopica ma grandi su scala microscopica.

In particolari situazioni però le definizioni date di continuo e di volume sensibile sono deboli. L'ipotesi di fluido come mezzo continuo non è valida in condizioni di gas estremamente rarefatti, come nel caso di moti di missili e di satelliti artificiali a grande altezza sulla superficie terrestre, quando il cammino libero delle molecole diviene

dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni degli oggetti con cui vengono a contatto; ed è difficile scegliere un volume sensibile che dia una misura locale e che contemporaneamente contenga un elevato numero di molecole quando le proprietà fisiche variano in spazi molto ridotti, come nel caso delle onde d'urto.

Nella maggior parte però dei fenomeni studiati in fluidodinamica è possibile ammettere che i fluidi si comportino come un mezzo continuo e che le loro proprietà siano determinate dalle condizioni locali medie delle molecole.

Se, quindi, da un lato è ormai prassi consolidata usare il concetto di sistema continuo abbinato a quello di campo per la determinazione delle leggi in forma differenziale che sovrintendono il comportamento dei fluidi, dall'altro la quantificazione numerica dell'evoluzione di un fenomeno mediante la soluzione delle leggi della termofluidodinamica offre ancora notevoli difficoltà. Esse sono di duplice natura:

- **fisiche**: non esistendo una soluzione di tipo analitico, quelle di tipo numerico hanno tutte bisogno di effettuare l'integrazione delle equazioni su spazi finiti e questo tipo di operazione può sovente portare a far perdere informazioni sulla natura del fenomeno;
- **numeriche**: i punti su cui determinare le variabili termofluidodinamiche necessarie allo studio del fenomeno devono essere in numero molto elevato (circa mille per ogni dimensione) e questo porta allo scontro con i limiti delle memorie attuali dei calcolatori, con la necessità di ricorrere a tempi lunghissimi di calcolo e con la gestione grafica di una mole di dati imponenti.

1.5. DEFORMAZIONI E TENSIONI

Nello studio dei sistemi continui materiali si presenta il problema di rappresentare matematicamente le seguenti proprietà:

- a) le **deformazioni** che il corpo subisce nel passare da una configurazione all'altra, come accade ad esempio all'acqua che scorre all'interno di una tubazione e le cui particelle occupano posizioni diverse sia rispetto alle pareti sia l'una rispetto all'altra in istanti diversi;
- b) le **tensioni interne** che si creano a causa di tali deformazioni, come avviene per esempio in una molla che si sia allungata;
- c) le **relazioni fra tensioni e deformazioni**, che seguono leggi dipendenti dalla natura del corpo.

Se i primi due punti possono essere esaurientemente trattati in modo del tutto generale sfruttando l'ipotesi della continuità dei sistemi, l'ultimo invece può avere risposte diverse a seconda del materiale che costituisce il continuo; infatti l'acciaio, l'acqua, l'aria o un mezzo plastico si comportano in modi fra loro differenti.

1.5.1. DEFORMAZIONI

Nel passaggio da una configurazione all'altra il sistema si **deforma**, come rappresentato nelle successive figure 1.4 e 1.5.

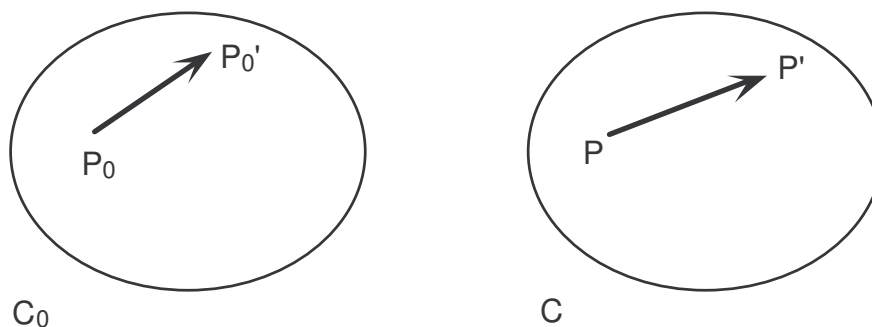


Fig. 1.4.- Deformazione assiale.-

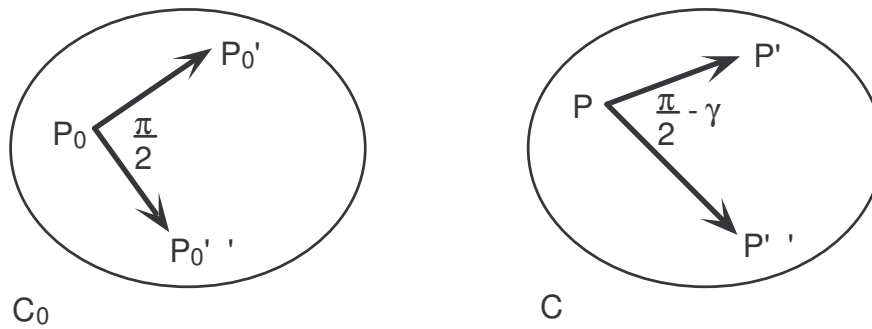


Fig. 1.5.- Deformazione angolare.-

Allo scopo di dare una descrizione matematica precisa di tale deformazione, si prenda in considerazione un vettore infinitesimo $\overline{P_0 P_0'}$, individuato dal punto P_0 e da un punto P_0' molto vicino a P_0 , entrambi appartenenti alla stessa configurazione C_0 di partenza. Nella trasformazione ad un'altra generica configurazione C il vettore, portandosi nella posizione $\overline{P P'}$, in generale modifica la sua lunghezza e il suo orientamento rispetto alla terna di coordinate fisse prese come riferimento. La conoscenza per ogni punto P_0 delle variazioni in modulo ed in orientamento di tutti i vettori infinitesimi $\overline{P_0 P_0'}$, con origine in P_0 , individua la deformazione del corpo nella trasformazione da C_0 a C .

Viene chiamato **allungamento unitario** o **deformazione assiale** relativo al vettore $\overline{P_0 P_0'}$ il rapporto fra la variazione di lunghezza $\overline{P P'} - \overline{P_0 P_0'}$ e la lunghezza iniziale $\overline{P_0 P_0'}$ (vedi fig. 1.4). Siano poi $\overline{P_0 P_0'}$ e $\overline{P_0 P_0''}$ due vettori generici uscenti da P_0 ma che prima della deformazione formano l'angolo $\pi/2$ e siano $\overline{P P'}$ e $\overline{P P''}$ i corrispondenti vettori che dopo la trasformazione formano l'angolo $\pi/2 - \gamma$: viene chiamato **scorrimento mutuo** o **deformazione angolare** delle due direzioni l'angolo $\gamma/2$ (vedi fig. 1.5).

1.5.2. TENSIONI

Sia V una porzione del corpo A nella configurazione generica C e sia S la superficie che la delimita. Le particelle di V , che sono aderenti a S , si trovano a contatto con altre particelle del corpo, ma appartenenti alla porzione $A - V$; queste ultime esercitano sulle prime azioni dovute al mutuo contatto che cesserebbero di agire se V fosse estratto da A .

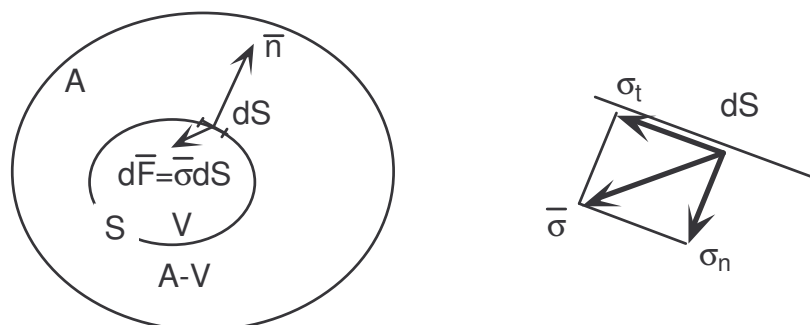


Fig. 1.6.- Tensione.-

Sia $\bar{n}$ il versore normale nei punti di S diretto verso l'esterno di V; nella teoria classica dei sistemi continui si assume l'ipotesi che le forze di contatto che agiscono su V attraverso un elemento superficiale dS siano equivalenti alla loro sola risultante e che questa si possa scrivere nella forma seguente

$$d\bar{F} = \bar{\sigma} dS$$

dove il vettore $\bar{\sigma}$ si chiama **sfuerzo specifico** (per unità di superficie), o semplicemente **tensione**, relativo all'elemento superficiale orientato $\bar{n} \cdot dS$.

La componente di $\bar{\sigma}$ secondo $\bar{n}$ si chiama **tensione normale** σ_n ; essa ha carattere di trazione se l'angolo formato da $\bar{\sigma}$ e $\bar{n}$ è acuto, di compressione nel caso opposto. La componente giacente su dS prende il nome invece di **tensione tangenziale** σ_t .

Il discorso particolare fatto in precedenza può essere generalizzato riferendolo al cubetto infinitesimo, riportato in fig. 1.7, ottenuto con piani perpendicolari al sistema cartesiano ortogonale di assi x, y, z ; su ognuna delle sei facce agisce una tensione, orientata in modo del tutto generico, che viene identificata con un pedice uguale alla coordinata normale alla faccia: $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$.

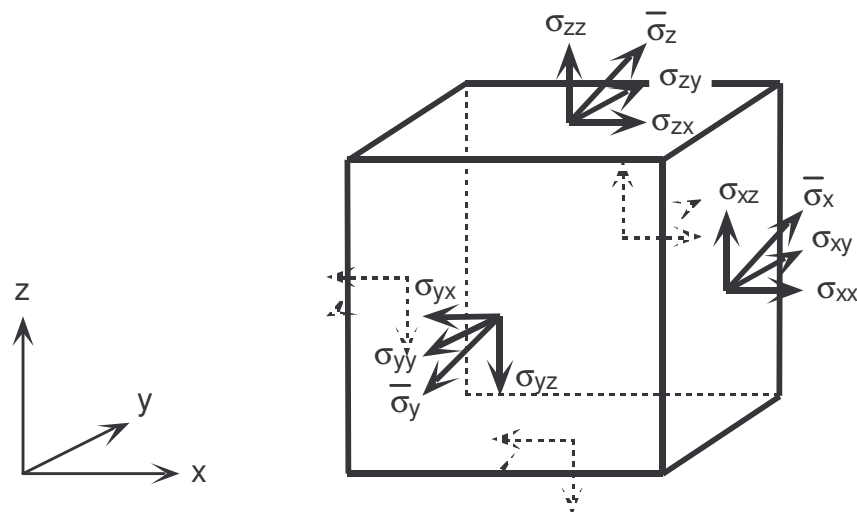


Fig. 1.7.- Cubetto elementare con relative tensioni.-

Considerando, per esempio, la faccia perpendicolare all'asse x , la componente normale della tensione agente su questo piano è identificata con σ_{xx} , dove il primo pedice x indica la direzione della normale al piano considerato ed il secondo pedice x indica la direzione della tensione; la tensione normale è considerata positiva quando produce trazione sul cubetto elementare e negativa quando produce compressione.

La tensione tangenziale, scomposta in due componenti parallele agli assi y e z , è denotata rispettivamente con σ_{xy} e σ_{xz} in cui i pedici hanno lo stesso significato visto per la tensione normale; i versi positivi delle componenti delle tensioni tangenziali sono considerati concordi con i versi positivi degli assi se una tensione di trazione sulla stessa faccia ha verso concorde con quello dell'asse corrispondente, mentre, se la tensione di trazione ha il verso opposto a quello dell'asse, i versi positivi delle tensioni tangenziali sono discordi rispetto a quelli degli assi.

Il sistema di tre vettori visto $(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z)$ è un **tensore doppio**

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

e viene chiamato **tensore delle tensioni** perché definisce lo stato di tensione in un generico punto del corpo.

Il concetto di **tensore** è un'estensione del concetto di vettore; come le $3^1 = 3$ componenti di un vettore costituiscono un tensore del primo ordine, così le $3^2 = 9$ componenti, per esempio di una trasformazione lineare tra vettori nello spazio (chiamata matrice dei coseni direttori), costituiscono un tensore del secondo ordine.

1.5.3. RELAZIONI FRA TENSIONI E DEFORMAZIONI

Il legame esistente fra tensioni e deformazioni è studiato da un particolare settore della meccanica dei fluidi chiamata **reologia** . Essa ha lo scopo di costruire modelli matematicamente completi atti a rappresentare convenientemente le proprietà caratteristiche delle varie classi in cui si possono dividere i corpi naturali. Tali sono ad esempio i modelli classici dei solidi elastici, dei fluidi non viscosi e perfettamente viscosi newtoniani, dei mezzi perfettamente plastici, ecc.

Oltre ai modelli classici, però, la reologia ha dovuto creare schemi sempre più perfezionati di modelli per tener dietro al continuo progresso della tecnica che ha prodotto nuove classi di sostanze. Nello studio del moto dei fluidi la teoria sarà limitata ai fluidi non viscosi (capitolo 4) e perfettamente viscosi (capitolo 5).

1.6. DIFFERENZE FRA SOLIDI E FLUIDI

Per effetto delle forze molecolari viste nel § 1.2, un corpo solido ha una **forma definita** ; essa può cambiare solo se intervengono variazioni delle forze esterne e ciò può anche significare alterazione delle proprietà macroscopiche. Un fluido, invece, non ha una **forma privilegiata** ; essa può essere modificata liberamente senza che si alterino le proprietà macroscopiche. Si dice anche che un fluido assume la forma che l'ambiente esterno gli consente.

La distinzione fra solidi e fluidi non è però solo una semplice questione di forma, poiché sotto questo punto di vista ci sono materiali che in alcune circostanze si comportano come solidi ed in altre come fluidi.

All'interno di un corpo le forze meccaniche esterne, come si è visto nel § 1.5, si trasmettono attraverso un sistema di **tensioni interne** , intese come forze agenti sull'unità di superficie. Nel caso più generale, due degli elementi contigui qualsiasi, in cui si può immaginare di aver suddiviso il corpo, si trasmettono una tensione che può essere inclinata in qualunque modo rispetto alla loro superficie di separazione; essa avrà quindi una componente normale ed una parallela alla superficie. Ed è dal diverso modo di reagire alle componenti delle tensioni che i corpi solidi e fluidi possono essere differenziati.

Il particolare comportamento dei fluidi, più precisamente la loro proprietà caratteristica di adattarsi con facilità a qualunque cambiamento di forma, induce a ritenere che i due elementi contigui reagiscano solo alla componente normale di compressione e non a quella tangenziale che provoca invece il loro reciproco scorrimento.

Si può allora definire come **solido semplice** quel materiale in cui le posizioni relative dei punti al suo interno si modificano di poco quando le forze esterne subiscono piccole variazioni. In modo simile, un **fluido semplice** può essere definito come un materiale in cui le posizioni relative si modificano di molto anche quando le forze esterne, salvo quelle di compressione, sono variate di poco.

Ciò significa che l'applicazione ad un fluido di tensioni tangenziali anche piccole

provoca in esso uno scorrimento che dura tutto il tempo dell'applicazione e che un cambiamento di forma, anche notevole, non induce tensioni tangenziali residue dopo la cessazione del movimento. Nei fluidi, quindi, **in stato di quiete le tensioni tangenziali sono nulle**.

Molti fluidi, ed in particolare l'acqua (intesa come fluido allo stato liquido) e l'aria (intesa come fluido allo stato di aeriforme) che saranno oggetto della trattazione futura, si comportano come la definizione semplice riportata.

1.7. FLUIDO NON VISCOSO E FLUIDO IDEALE

Il fatto che un fluido in stato di equilibrio non presenti tensioni tangenziali (vedi § 1.6) ha indotto a creare una teoria che considerasse valida questa ipotesi anche in una situazione del tutto generale. Il moto di un **fluido non viscoso** (vedi capitolo 4), infatti, si basa sul concetto che due strati di fluido in movimento, fra loro a contatto, possano trasmettersi una tensione normale alla loro superficie di separazione (pressione), ma non una tensione tangenziale lungo detta superficie.

La teoria che definisce il moto di un fluido non viscoso riesce a dare in molti casi una descrizione soddisfacente di fenomeni, quali le onde e i getti, ma fallisce dove sono rilevanti i fenomeni d'attrito. Essa porta, per esempio, alle conclusioni che un corpo in moto uniforme all'interno di un fluido non subisca alcuna resistenza di attrito, e che quindi possa mantenere all'infinito il suo moto (paradosso di d'Alembert), che lungo le pareti solide il fluido "scivoli" e non presenti variazioni nella velocità tangenziale in direzione perpendicolare alla parete oppure che il fluido non offra resistenza al cambiamento di forma.

Questi risultati inaccettabili sono dovuti al fatto che un fluido reale può scambiare anche una tensione tangenziale e che essa è legata ad una proprietà intrinseca del fluido chiamata **viscosità** (vedi § 1.15).

L'acqua, e in particolare l'aria, presentano valori bassi del coefficiente di viscosità e, nelle situazioni in cui le forze tangenziali siano trascurabili rispetto alle altre forze, possono essere considerate come fluidi non viscosi; le equazioni del moto risultano allora semplificate. Dove invece le forze tangenziali siano preponderanti, per esempio nello strato limite (vedi § 8.8) in prossimità delle pareti, la teoria del fluido non viscoso porta a conclusioni molto differenti da quelle della teoria del fluido reale viscoso (vedi capitolo 5) e quindi dalla realtà fisica.

Il fatto poi che un fluido non viscoso possa essere in alcune condizioni giudicato incompressibile (vedi § 1.12) ha indotto a creare una teoria che considerasse valida questa ipotesi anche in una situazione del tutto generale. Il moto di un **fluido ideale** (vedi capitolo 4), infatti si basa sul concetto che la massa volumica del fluido non viscoso rimanga costante anche al variare, entro certi limiti, della pressione e della temperatura.

La teoria che definisce il moto di un fluido ideale riesce a dare in alcuni casi una descrizione soddisfacente di fenomeni, quali i flussi monodimensionali a bassa velocità e isotermi, ma fallisce dove le velocità in gioco sono elevate o dove le variazioni di temperatura non sono trascurabili. Essa porta, per esempio, alla conclusione che nell'aria o nell'acqua non si creino i moti convettivi dovuti alla variazione di massa volumica provocata da un aumento o da una diminuzione della temperatura oppure che nel lavoro di compressione di un aeriforme non si debba considerare l'aumento di volume dovuto al riscaldamento.

L'aria che si muova a velocità contenute e non subisca variazioni di temperatura, e in particolare l'acqua, presentano valori costanti della massa volumica e, nelle situazioni in cui anche le forze tangenziali siano trascurabili rispetto alle altre forze, possono essere considerate come fluidi ideali: le equazioni del moto risultano allora ulteriormente semplificate. Dove invece le variazioni di massa volumica siano notevoli o le forze tangenziali siano preponderanti, la teoria del fluido ideale porta a con-

clusioni molto differenti da quelle della teoria del fluido reale compressibile e viscoso (vedi capitolo 5) e quindi dalla realtà fisica.

1.8. MASSA VOLUMICA

Si è già detto che su scala macroscopica la massa di un corpo è considerata distribuita in modo uniforme sul volume. Ne consegue che nei corpi ordinari, ai quali si voglia applicare la meccanica che si sta studiando, non esiste il concetto di **punto materiale**.

Si chiama **massa volumica media** di un corpo di massa m e di volume V il rapporto

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]. \quad (1.8.1)$$

La definizione si estende senza difficoltà alle parti che compongono il volume V ; se Δm_i e ΔV_i sono rispettivamente la massa e il volume di una delle parti in cui il corpo è stato suddiviso, in modo che

$$m = \sum \Delta m_i, \quad V = \sum \Delta V_i$$

si chiama massa volumica media dell'elemento i -esimo il rapporto

$$\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}.$$

Se si spinge la suddivisione verso volumi sempre più piccoli fino a raggiungere quello che nella fig. 1.3 definisce il valore locale della proprietà, si perviene ad un limite. Questo limite, detto **massa volumica del corpo nel punto** che individua l'elemento di volume infinitesimo considerato, vale

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}.$$

La massa volumica si presenta dunque in generale come una grandezza di tipo scalare funzione dei punti del corpo considerato: $\rho(P)$. Se la funzione è costante il corpo viene detto **omogeneo**, altrimenti viene detto **non omogeneo**. Nella tab. 1.2 sono riportati alcuni valori della massa volumica per corpi solidi, liquidi e aeriformi.

sostanza	ρ [kg/m ³]	note
mercurio	13595	
ferro	7800	
acqua	1000	
aria	1.294	in condizioni normali

Tab. 1.2.- Alcuni valori della massa volumica.-

Il reciproco della massa volumica viene chiamato **volume specifico** e vale

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] . \quad (1.8.2)$$

1.9. PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Il principio di conservazione della massa afferma sostanzialmente che la massa di un sistema non può essere né creata né distrutta. La massa di un punto, quale misura della sua inerzia, è una caratteristica fisica del punto stesso, indipendente dalle condizioni dinamiche in cui il punto si trova. La massa di un sistema di un numero finito di punti è la somma delle masse dei singoli punti e come tale risulta a sua volta invariante col moto. Per un sistema continuo si associa una massa $\rho \cdot dV$ non a ogni punto, ma ad ogni elemento di volume dV , di modo che la massa di una qualunque parte V_s del sistema è data da

$$\int_{V_s} \rho \, dV .$$

Conseguenza del principio di conservazione della massa per un sistema continuo è l'equazione di continuità (vedi § 3.4), che dà una relazione differenziale fra la massa volumica e le variazioni di volume del sistema nello spazio e nel tempo.

In realtà la teoria relativistica di Einstein stabilisce un intimo legame fra massa ed energia, espresso dalla ormai celebre formula $E = m \cdot c^2$, affermando che il contenuto energetico di un corpo è dato dalla sua massa moltiplicata per il quadrato della velocità della luce. In altri termini tale teoria asserisce che la massa di un corpo varia se si modifica anche l'energia che esso possiede; tali variazioni sono in effetti troppo piccole per poter essere osservate in fenomeni macroscopici, ma diventano rilevanti a livello microscopico. Inoltre si può **creare** una massa mediante la materializzazione di un fotone in una coppia elettrone – positrone, oppure si può **distruggere** una massa per annichilimento di una coppia di particelle elementari, con produzione di corrispondente energia.

1.10. PRESSIONE

La **pressione media** è una grandezza definita come il rapporto tra la forza complessiva agente su una superficie in direzione ad essa perpendicolare e l'area della superficie stessa

$$p_m = \frac{F}{S} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \right] . \quad (1.10.1)$$

Il Pascal è un'unità di misura molto piccola quando viene impiegato nelle applicazioni pratiche ingegneristiche. Di solito viene più usato un suo multiplo, il bar, definito come

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} ,$$

il quale, con l'approssimazione a $g = 10 \text{ m/s}^2$ del valore dell'accelerazione di gravità, corrisponde al valore dell'atmosfera assoluta (ata) una volta usato nel vecchio sistema pratico (S.P.).

Come nel caso già visto della massa volumica, si constata che al decrescere dell'area la pressione media tende ad un limite

$$p = \frac{dF}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

detto **pressione nel punto** che permette di individuare l'elemento di area infinitesimo considerato.

La pressione si presenta quindi in generale come una grandezza vettoriale funzione dei punti della superficie considerata: $p(P)$. Nel caso particolare dei fluidi, in base a quanto è stato detto sul loro comportamento, si può dimostrare che: in equilibrio la pressione su tutti gli elementi superficiali che passano per un punto è la stessa indipendentemente dalla loro giacitura.

Si consideri, come indicato nella fig. 1.8, il tetraedro fluido infinitesimo definito dai piani coordinati e da uno generico, molto prossimo all'origine O , che interseca gli assi coordinati nei punti A_x, A_y, A_z . Se si assume come infinitesima di primo ordine la dimensione dei lati del tetraedro, ogni area delle sue facce è infinitesima di secondo ordine e il volume di terzo ordine. Tutte le forze di volume, quindi, possono essere trascurate rispetto a quelle di superficie e, se si considera uno stato di equilibrio, si possono omettere anche le forze dovute alle variazioni delle pressioni e, come già visto, quelle dovute alle tensioni tangenziali. In definitiva, nelle ipotesi fatte, il tetraedro fluido è in equilibrio sotto l'azione delle forze di pressione agenti sulle sue quattro facce esterne.

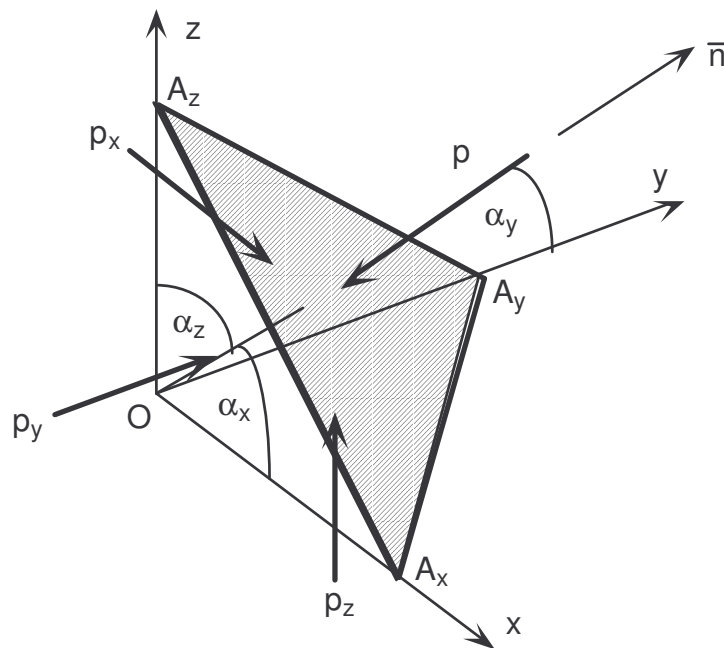


Fig. 1.8.- Tetraedro di fluido infinitesimo.-

Se si indicano con p_x, p_y, p_z le pressioni sulle tre facce normali agli assi x, y, z , con p la pressione sulla faccia $A_x A_y A_z$, con dS_x, dS_y, dS_z le aree delle facce sui piani coordinati, con dS l'area sul piano obliquo e infine con $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ gli angoli fra gli assi x, y, z e la normale $\bar{n}$ alla faccia $A_x A_y A_z$ (diretta verso l'esterno del tetraedro e passante per il punto O), lungo gli assi x, y, z si possono scrivere rispettivamente le tre equazioni di equilibrio seguenti

$$p_x dS_x - p dS \cos \alpha_x = 0 \quad p_y dS_y - p dS \cos \alpha_y = 0 \quad p_z dS_z - p dS \cos \alpha_z = 0 .$$

Dato che da un punto di vista geometrico risulta

$$dS_x = dS \cos \alpha_x \quad dS_y = dS \cos \alpha_y \quad dS_z = dS \cos \alpha_z ,$$

in definitiva per la pressione si ottiene

$$p_x = p_y = p_z = p$$

cioè un valore uguale su tutte le facce del tetraedro.

La pressione sull'elemento superficiale $A_x A_y A_z$ a distanza infinitesima da O non dipende dall'orientazione di esso; si può dunque parlare, all'interno di un fluido, di **pressione nel punto** generico senza specificare la superficie sulla quale essa agisce. La pressione assume, quindi, un carattere tipicamente scalare.

1.11. EQUAZIONI DI STATO

Il termine **stato** rappresenta l'insieme delle proprietà macroscopiche che identificano e rendono riproducibile un sistema. Alcune di esse possono essere misurate direttamente da strumenti, come il volume, la massa, la temperatura, la pressione, mentre altre, come per esempio l'energia interna (vedi § 6.2.2), possono essere determinate solo per via indiretta. Il numero delle proprietà che sono sufficienti a fissare lo stato del sistema dipende generalmente dal sistema stesso, ma è piccolo e corrisponde al numero dei parametri che possono essere scelti come variabili indipendenti; questi parametri vengono anche chiamati coordinate termodinamiche del sistema.

Il più semplice sistema termodinamico può essere modellato mediante una certa massa di fluido isotropo isolato, non influenzato cioè dall'ambiente esterno, e nel quale non si verificano né reazioni chimiche né tanto meno nucleari; sistemi di questo tipo vengono identificati dalla conoscenza del valore delle tre grandezze (parametri di stato): pressione, volume specifico, temperatura (p, v, T). Tuttavia l'esperienza mostra che i tre parametri di stato non sono indipendenti fra loro, nel senso che quando due di essi sono noti il terzo viene trovato tramite gli altri due. In forma del tutto generale quindi l'equazione che descrive lo stato dei sistemi detti "pvT" può essere scritta nel modo seguente

$$f(p, v, T) = 0$$

e le relazioni intercorrenti fra i vari parametri possono essere del tipo

$$p = p(v, T) \quad v = v(p, T) \quad T = T(p, v) .$$

Per dare una forma concreta alle relazioni precedenti, non solo occorre trovare una relazione che traduca esattamente il comportamento di un corpo, ma anche che questa sia una funzione analitica. In realtà, però, il comportamento di un gas è così complicato che non è possibile avere un'equazione di stato sufficientemente semplice.

Si fa ricorso pertanto al **gas perfetto**, cioè a un gas che presenta le seguenti proprietà:

- a) movimento continuo e disordinato di tutte le molecole;
- b) urto perfettamente elastico fra le singole molecole;
- c) assenza di forze fra le singole molecole;
- d) dimensioni trascurabili delle molecole rispetto alle loro distanze medie.

Per il gas perfetto vale l'equazione di stato data dalla legge di Boyle e Mariotte scritta per una mole

$$\frac{p}{\bar{n}} = R T \quad \rightarrow \quad p v = R T . \quad (1.11.1)$$

dove $\bar{n}$ è la massa volumica molare espressa in [mole/m³], v è il volume specifico molare espresso in [m³/mole] e R è una costante. La relazione precedente è valida anche per i gas reali qualora si operi a pressioni molto basse e quindi si possa scrivere

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p v}{R T} = 1 .$$

Da misure effettuate risulta che il valore di R è

$$R = 8.31470 \left[\frac{\text{J}}{\text{K mole}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{ K mole}} \right] ;$$

essa è detta **costante caratteristica universale dei gas** perché è applicabile a qualsiasi gas o miscela di gas indipendentemente dalla loro massa volumica.

Dividendo entrambi i membri della (1.11.1) per la massa molare M del gas in esame espressa in [kg/mole] e sostituendo la definizione di massa volumica (1.8.1) si ottiene

$$p \frac{v}{M} = \frac{R}{M} T \quad \rightarrow \quad p v = R T \quad \rightarrow \quad p V = m R T \quad (1.11.2)$$

dove v/M rappresenta il volume specifico v e R/M rappresenta la costante riferita all'unità di massa e viene indicata con R .

sostanza	R [J/(kg K) = m ² /(s ² K)]
idrogeno	4131
elio	2088
azoto	297
aria	287
ossigeno	262
argo	209
anidride carbonica	189

Tab. 1.3.- Alcune costanti caratteristiche dei gas riferite all'unità di massa.-

Nella tab. 1.3 sono riportati alcuni valori della costante caratteristica R riferita ad un chilogrammo di sostanza.

sostanza	γ
argo	1.666
elio	1.666
idrogeno	1.408
azoto	1.402
aria	1.402
ossigeno	1.396

anidride carbonica	1.299
--------------------	-------

Tab. 1.4.- Esponenti della trasformazione adiabatica di alcuni gas.-

Al valore della costante R sono legati i calori specifici dei gas con la relazione

$$c_p = c_v + R \quad (1.11.3)$$

dove c_p è il calore specifico a pressione costante e c_v quello a volume costante. Il rapporto fra i due calori specifici

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.11.4)$$

rappresenta invece l'esponente della trasformazione adiabatica, cioè di quella trasformazione che avviene senza scambio termico con l'ambiente esterno; nella tab. 1.4 sono riportati i valori dell'esponente della trasformazione adiabatica per alcune sostanze gassose.

1.12. COMPRESSIBILITÀ

La **compressibilità** è la proprietà per cui un fluido subisce una diminuzione di volume per un incremento di pressione che agisce sulla sua superficie esterna. Per definirla numericamente, si consideri il volume V occupato da una massa fluida in determinate condizioni di pressione e di temperatura e si provochi un incremento di pressione dp costante su tutti i punti della sua superficie di contorno. Questa situazione può essere ottenuta con il cilindro a stantuffo di fig. 1.9. La forza F , applicata sullo stantuffo di area S , esercita sul fluido la pressione $p = F/S$ e il fluido trasmette la stessa pressione alle pareti del cilindro. Un incremento dF della forza F crea allora un incremento dp della pressione p su tutto il volume V .

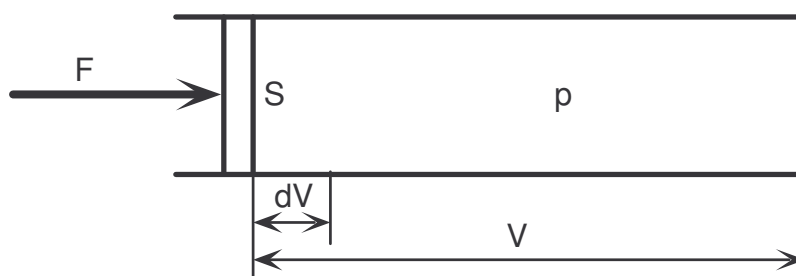


Fig. 1.9.- Fluido sottoposto a pressione nell'interno di un cilindro a stantuffo.-

Se esiste una funzione nelle tre variabili x, y, z

$$f(x, y, z) = 0,$$

una variabile, per esempio la x , dipende dalle altre due variabili y, z con una legge del tipo

$$x = x(y, z);$$

il **differenziale totale** di x è dato allora da

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y dz$$

dove i pedici z o y significano che la derivata parziale è fatta mantenendo costante la variabile indicata.

Se si assume che il fluido possa essere descritto da un'equazione di stato del tipo visto nel § 1.11, cioè da una equazione che dipende dai tre parametri di stato (p , v , T), si può scrivere per il differenziale totale del volume specifico la seguente relazione

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT ;$$

poiché durante il processo la massa del fluido rimane costante, nella relazione precedente è possibile sostituire il volume specifico v con il volume effettivo V e, dividendo per il volume V , ottenere la seguente legge di compressibilità

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT . \quad (1.12.1)$$

Definendo come **coefficiente di compressibilità isoterma** la quantità

$$\hat{e} = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T ,$$

dove il segno negativo sta indicare il senso contrario nelle variazioni del volume e della pressione, e come **coefficiente di dilatazione volumetrica** la quantità

$$\hat{a} = + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p ,$$

dove il segno positivo sta ad indicare il senso concorde nelle variazioni del volume e della temperatura, la legge di compressibilità (1.12.1) diventa

$$\frac{dV}{V} = - \hat{e} dp + \hat{a} dT . \quad (1.12.2)$$

La compressione è **perfettamente elastica**, nel senso che, al ritorno della pressione al valore iniziale, anche il volume riprende il suo valore iniziale.

Nel caso di un gas perfetto, differenziando la relazione (1.11.2), si ha

$$V dp + p dV = mR dT = m \frac{pV}{mT} dT = \frac{pV}{T} dT \quad \rightarrow \quad p dV = - V dp + \frac{pV}{T} dT$$

e, dividendo tutti i termini per il prodotto $p \cdot V$, si ricava

$$\frac{dV}{V} = - \frac{dp}{p} + \frac{dT}{T} ;$$

confrontando la relazione appena ottenuta con la legge di compressibilità (1.12.2), i coefficienti di compressibilità isoterma e di dilatazione volumetrica assumono il valore seguente

$$\hat{e} = \frac{1}{p} \quad \hat{a} = \frac{1}{T} .$$

A parità di variazione della pressione e della temperatura o di una sola di esse, l'entità della variazione del volume è enormemente diversa nei liquidi e negli aeriformi.

mi: nei primi è molto piccola, tanto che vengono considerati come fluidi **incompressibili** nella maggior parte degli studi teorici, mentre nei secondi è comodamente osservabile e viene correntemente sfruttata in molte applicazioni pratiche.

Come la legge dei gas perfetti (1.11.1) è una idealizzazione del comportamento di un fluido nella fase aeriforme, così l'incompressibilità è una idealizzazione del comportamento di un fluido nella fase liquida: in tale situazione le derivate $(\partial V/\partial p)_T$ e $(\partial V/\partial T)_p$ sono poste uguali a zero e quindi entrambi i coefficienti κ e β sono nulli. Ciò significa che il volume è una costante, indipendente quindi da p e da T , e che non esiste nessuna equazione di stato che collega i parametri di stato (p , v , T).

Quando si può considerare poco sensibile la dipendenza dei coefficienti κ e β da p e da T oppure quando si possono considerare relativamente contenute le variazioni di p e di T (situazione che si verifica di solito nei liquidi), i coefficienti κ e β possono essere ritenuti costanti e la legge di compressibilità (1.12.2) può essere integrata nel modo seguente

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\hat{e}(p_2 - p_1) + \hat{a}(T_2 - T_1) ; \quad (1.12.3)$$

mentre invece quando κ e β non possono essere considerati costanti (situazione che si verifica di solito negli aeriformi), l'integrale della (1.12.2) assume la forma generale

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\int_{p_1}^{p_2} \hat{e} dp + \int_{T_1}^{T_2} \hat{a} dT . \quad (1.12.4)$$

In prima approssimazione è possibile portare fuori dall'integrale della relazione precedente i valori medi dei coefficienti

$$\hat{e}_m = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{2} \qquad \hat{a}_m = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{2}$$

e quindi ottenere

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\hat{e}_m(p_2 - p_1) + \hat{a}_m(T_2 - T_1) . \quad (1.12.5)$$

L'effetto della pressione sui valori di κ e di β è meno incisivo di quello della temperatura; ciononostante nei fluidi liquidi, dato che le variazioni di temperatura sono molto più contenute di quelle della pressione, l'influenza del termine con il coefficiente di dilatazione termica può essere trascurato e la legge di compressibilità (1.12.2) può essere sostituita da una **legge di compressibilità isoterma**

$$\frac{dV}{V} = -\hat{e} dp , \quad (1.12.6)$$

dove κ risulta essere sensibilmente costante entro variazioni molto ampie della pressione e della temperatura. La stessa legge semplificata può essere utilizzata anche per i fluidi allo stato di aeriformi; in questo caso però si deve conglobare nel termine in cui è presente κ anche l'effetto di quello in cui è presente β , tenendo in considerazione il tipo di trasformazione che il fluido subisce durante la trasformazione di compressione.

Per un gas perfetto le leggi delle trasformazioni termodinamiche possono essere riassunte dalla relazione

$$p v^n = \text{cost}$$

dove l'esponente n per le singole trasformazioni vale

$$\text{isobara: } n = 0$$

$$\text{isocora: } n = \infty$$

$$\text{isoterma: } n = 1$$

$$\text{adiabatica: } n = \gamma$$

Mediante l'uso dell'equazione di stato si perviene anche alle seguenti relazioni

$$\text{isobara: } v T^{-1} = \text{cost}$$

$$\text{isocora: } p T^{-1} = \text{cost}$$

$$\text{isoterma: } p v = \text{cost}$$

$$\text{adiabatica: } T v^{\bar{\alpha}-1} = \text{cost}, \quad T p^{(1-\bar{\alpha})/\bar{\alpha}} = \text{cost}$$

Dall'equazione generica di una trasformazione termodinamica

$$p v^n = \text{cost} \quad \rightarrow \quad p = \text{cost} v^{-n}$$

dove n è l'esponente della trasformazione, si ottiene

$$\frac{dp}{dv} = -n \text{cost} v^{-n-1} = -n p v^n v^{-n-1} = -n p v^{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{1}{n} \frac{dp}{p}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{trasformazione isoterma } (n=1) \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p} \quad \rightarrow \quad \kappa = -\frac{1}{p} \\ \text{trasformazione adiabatica } (n=\bar{\alpha}) \quad \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{dp}{p} \quad \rightarrow \quad \kappa = -\frac{1}{\gamma p} \end{aligned} \quad (1.12.7)$$

Nel caso in cui la trasformazione sia isoterma si ottiene quindi il risultato già acquisito in precedenza; più genericamente si può affermare che per un gas perfetto il coefficiente di compressibilità isoterma sia proporzionale al reciproco della pressione.

sostanza	κ [1/Pa]	E [Pa]
aria	$9870.0000 \cdot 10^{-9}$	$0.000101 \cdot 10^9$
acqua	$0.4550 \cdot 10^{-9}$	$2.200000 \cdot 10^9$
mercurio	$0.0351 \cdot 10^{-9}$	$28.500000 \cdot 10^9$

Tab. 1.5.- Alcuni valori del coefficiente di compressibilità isoterma κ e del modulo di elasticità volumetrico E.-

Anche se molto piccola, la compressibilità dei liquidi assume un'importanza essenziale in certi fenomeni, come la propagazione delle onde sonore o le oscillazioni in genere; il coefficiente di compressibilità può essere appunto dedotto da misure di velocità del suono. A titolo indicativo nella tab. 1.5 sono riportati alcuni valori del coefficiente di compressibilità isoterma κ in condizioni normali di pressione e di temperatura e del suo reciproco E, al quale si dà il nome di **modulo di elasticità volumetrico**.

Dalla tabella si deduce che, per produrre una riduzione isoterma dell'uno per mille nel volume, bisogna esercitare la pressione di circa 285 bar nel mercurio, di circa 22 bar nell'acqua e di circa 10^{-3} bar nell'aria.

1.13. VELOCITÀ DEL SUONO

La velocità del suono in un mezzo rappresenta la velocità con cui in esso si propagano piccole perturbazioni di pressione, di velocità o di densità (come le onde sonore).

Si supponga di perturbare improvvisamente lo stato di quiete di un fluido applicando, come rappresentato in fig. 1.10, una velocità du molto piccola su un'area S in direzione della normale all'area. Dopo un intervallo di tempo dt la compressione, causata dall'improvviso aumento di velocità, avrà interessato il volume $dV = S \cdot c \cdot dt$, dove c rappresenta la velocità del suono, mentre il volume sarà diminuito della quantità $\delta V = S \cdot du \cdot dt$.

La forza attiva applicata sul volume dV è data dalla massa volte l'accelerazione

$$dF_a = dm a = \rho dV a = \rho S c dt \frac{du}{dt}$$

e ad essa, per l'equilibrio nella direzione di propagazione della perturbazione, si contrappone la forza dovuta alla differenza di pressione dp

$$p_2 = p_1 + dp \quad \rightarrow \quad dF_r = dpS$$

con ovviamente $p_2 > p_1$.

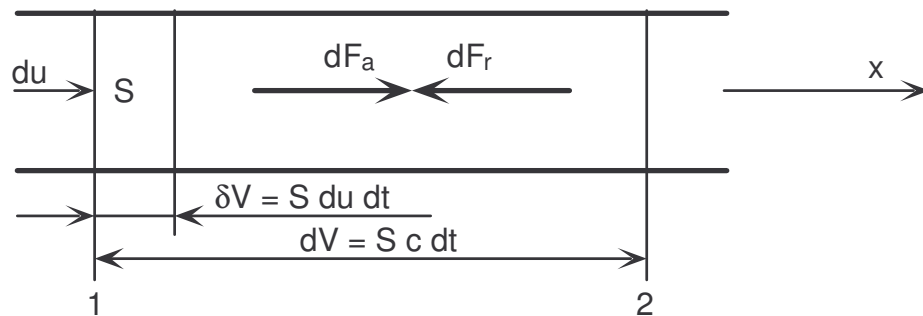


Fig. 1.10.- Perturbazione di un fluido in quiete con una variazione di velocità.-

Facendo l'equilibrio delle due forze $dF_a + dF_r = 0$, si ha

$$dp = - \rho c du$$

e dalla (1.12.6) si ottiene

$$\frac{\delta V}{dV} = - \kappa dp \quad \rightarrow \quad \frac{S du dt}{S c dt} = \kappa \rho c du \quad \rightarrow \quad c^2 = \frac{1}{\kappa \rho} .$$

Nel caso di gas perfetto, sostituendo la (1.12.7) nella relazione precedente, si ottiene ovviamente

$$\begin{aligned} \text{trasformazione isoterma (n=1)} \quad c^2 &= \frac{p}{\rho} = R T \\ \text{trasformazione adiabatica (n=\gamma)} \quad c^2 &= \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R T \end{aligned} \quad . \quad (1.13.1)$$

Nella tab. 1.6 sono riportati alcuni valori della velocità del suono in alcuni fluidi allo stato aeriforme e allo stato liquido.

sostanza	c [m/s]	note
aria	331.4	in condizioni normali
idrogeno	1270	in condizioni normali
acqua	1500	

Tab. 1.6.- Alcuni valori della velocità del suono in condizioni isoterme.-

1.14. DIFFERENZE FRA LIQUIDI E AERIFORMI

La massa volumica di una sostanza nella fase liquida è generalmente più elevata di quella nella fase aeriforme, ma ciò non è di per sé una base significativa di distinzione fra le due fasi, poiché porta solo ad una differenza nella grandezza delle forze d'inerzia.

La differenza più importante fra le proprietà meccaniche dei liquidi e degli aeriformi risiede nella **compressibilità** vista nel § 1.12. La massa, prima e dopo la variazione di volume dV conseguente a quella di pressione dp , rimane costante, per cui si verifica una variazione della massa volumica ρ tale che

$$\rho V = (\rho + d\rho)(V + dV) ;$$

da essa, trascurando l'infinitesimo di ordine superiore $dp \cdot dV$, si ha

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dV}{V} .$$

Sostituendo la (1.12.6) nella relazione precedente si ottiene

$$\frac{d\rho}{\rho} = \kappa dp = \frac{1}{E} dp \quad (1.14.1)$$

e, per quanto già detto nel § 1.12, integrando si ottiene

$$\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{1}{E} (p_2 - p_1) \quad (1.14.2)$$

per i liquidi e

$$\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{E} dp \quad (1.14.3)$$

per gli aeriformi. Poiché il coefficiente di compressibilità isoterma è maggiore negli aeriformi che non nei liquidi, di conseguenza ogni fenomeno che coinvolge apprezzabili variazioni della pressione è accompagnato da variazioni della massa volumica maggiori negli aeriformi che non nei liquidi.

Tipici fenomeni, che avvengono negli aeriformi con elevate variazioni della pressione e che costringono a considerare variabile la massa volumica, sono quelli legati alla meteorologia e quelli che si verificano in balistica e in aeronautica con movimento di corpi solidi ad alta velocità in un mezzo fluido. Vi sono però altri fenomeni in cui si verificano piccole variazioni della pressione: in tali casi gli aeriformi si comportano nello stesso modo dei liquidi, perché le variazioni della massa volumica possono essere considerate trascurabili.

1.15. VISCOSITÀ

Come già accennato nel § 1.7, la viscosità è una proprietà intrinseca di un fluido legata alla forza tangenziale che si sviluppa come resistenza al flusso di massa, cioè come **attrito interno**; infatti, se si verifica una differenza di velocità tra gruppi di molecole, la viscosità tende a ridurre il gradiente di velocità. La viscosità può quindi essere misurata mediante la forza che deve essere applicata per conservare, in condizioni di stazionarietà, una differenza di velocità fra due strati paralleli di fluido.

Le misure sperimentali descritte in fig. 1.11 risalgono a Newton, il quale trovò che la forza, necessaria per mantenere la velocità u di una superficie piana di area S abbastanza grande per poter trascurare le condizioni ai bordi e posta all'interno di un fluido ad una piccola distanza y rispetto ad un'altra superficie parallela e ferma nel fluido, vale

$$F = \mu S \frac{u}{y}$$

dove μ è chiamato **coefficiente d'attrito interno** o **viscosità dinamica** o semplicemente **viscosità**.

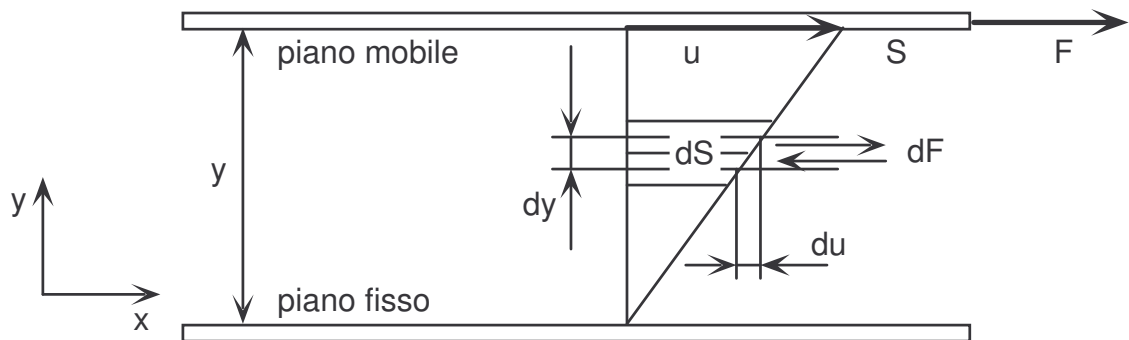


Fig. 1.11.- Schema dell'esperienza di Newton.-

La forza motrice e quella resistente si fanno equilibrio, in condizioni di regime, attraverso il fluido interposto. Se si immagina che il fluido sia suddiviso in tanti strati paralleli di spessore infinitesimo (flusso di Couette § 8.4), si può concludere che le tensioni tangenziali si trasmettano da uno strato a quello successivo e che sulla superficie infinitesima dS di separazione fra due di essi si eserciti una forza infinitesima che vale

$$dF = \mu dS \frac{du}{dy} \quad (1.15.1)$$

Per le considerazioni che saranno fatte in seguito, e che costituiscono un concetto fondamentale del moto dei fluidi viscosi, la relazione (1.15.1) può essere così modificata

$$\frac{dF}{dS} = \mu \frac{du}{dy} \quad \rightarrow \quad \sigma_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad \rightarrow \quad q = -\mu \frac{du}{dy} \quad (1.15.2)$$

Per quanto riguarda la prima modifica si è introdotta la definizione di tensione data nel § 1.5.2 e si può dire che σ_{yx} rappresenti la tensione tangenziale che deve essere esercitata su una superficie ad y costante (primo pedice) nella direzione x (secondo pedice) da parte del fluido che si trova nella zona con velocità maggiore affinché il

fluido stesso si mantenga in moto.

La seconda modifica, invece, viene suggerita dal fatto che il meccanismo del fenomeno riportato in fig. 1.11 può anche essere spiegato pensando che il fluido acquisti dal piano mobile una certa quantità di moto nella direzione x e che trasferisca una parte di essa lungo la direzione y agli strati adiacenti; la quantità q può quindi essere considerata come la componente in x del **flusso unitario di quantità di moto** in direzione y , unitario nel senso che è ripartito sull'unità di superficie. Il segno meno davanti al gradiente di velocità è dovuto al fatto che la quantità di moto tende a trasferirsi da una zona a velocità più alta verso una zona a velocità più bassa, così come il calore passa da una zona ad alta temperatura verso una a temperatura più bassa o come un corpo solido cade da un'altezza più elevata verso una meno elevata; quindi il gradiente di velocità è la causa del trasporto della quantità di moto e l'entità della quantità di moto trasportata dipende dalla viscosità del fluido.

La viscosità nei liquidi è da attribuirsi principalmente ai legami esistenti fra le molecole, mentre negli aeriformi, dove detti legami sono trascurabili, al moto disordinato di agitazione termica. Di conseguenza nei liquidi un aumento di temperatura determina una diminuzione della viscosità a causa dell'allentamento dei legami intermolecolari, mentre un aumento di pressione produce un aumento trascurabile per effetto di una maggiore compattazione delle molecole. Negli aeriformi invece un aumento di temperatura provoca un incremento della viscosità a causa dell'innalzamento della velocità di agitazione molecolare che consente una maggiore penetrazione delle molecole da strati mediamente più veloci a strati più lenti e viceversa e quindi un maggiore scambio di quantità di moto fra le particelle; un aumento di pressione agisce nello stesso senso, perché aumenta la massa volumica e quindi il numero delle particelle che si possono urtare e scambiare quantità di moto.

olio		acqua		aria	
temperatura [°C]	viscosità [Ns/m ²]	temperatura [°C]	viscosità [Ns/m ²]	temperatura [°C]	viscosità [Ns/m ²]
5	0.426	5	0.00152	0	0.0000171
10	0.234	10	0.00131	50	0.0000195
15	0.167	15	0.00114	100	0.0000217
20	0.109	20	0.00101	150	0.0000238
25	0.082	30	0.00080	200	0.0000258
30	0.063	40	0.00065	250	0.0000277
35	0.048	50	0.00055	300	0.0000295
40	0.034	60	0.00047	350	0.0000311
50	0.022	70	0.00041	400	0.0000328
65	0.013	80	0.00032	500	0.0000358

Tab. 1.7.- Viscosità dell'olio, dell'acqua e dell'aria in funzione della temperatura.-

L'unità di misura della viscosità è ottenuta direttamente dalla legge di Newton

$$\mu = \frac{dF}{dS \frac{du}{dy}} \quad \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \right]$$

Il valore numerico varia entro larghi limiti con la natura del fluido e dipende fortemente dalla temperatura. Nella tab. 1.7 vengono dati alcuni valori significativi della visco-

sità dinamica dell'olio, dell'acqua e dell'aria in funzione di alcuni valori della temperatura; da essa si nota come la temperatura abbia notevole influenza sulla viscosità dell'olio, minore su quella dell'acqua e quasi trascurabile su quella dell'aria e come la viscosità diminuisca con la temperatura nei liquidi (olio e acqua) ed invece aumenti negli aeriformi (aria).

Nella tab 1.8 sono invece riportati alcuni valori della viscosità dinamica alla temperatura di 20 °C relativi a liquidi di uso comune.

sostanza	viscosità [Ns/m ²]
benzina	0.00047
solvente	0.00085
acqua	0.00101
olio lubrificante medio	0.109
glicerina	0.835
olio di ricino	0.989

Tab. 1.8.- Viscosità di alcuni liquidi di uso comune alla temperatura di 20 °C.-

Un altro coefficiente molto usato è la **viscosità cinematica**, definita come il rapporto fra quella dinamica e la massa volumica

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]. \quad (1.15.3)$$

Essa non dipende dalla massa del fluido, ma solo da quantità cinematiche.

1.16. FLUIDI NON NEWTONIANI

In accordo con la legge della viscosità di Newton (1.15.2), il diagramma della tensione tangenziale σ_{yx} in funzione del gradiente della velocità du/dy è costituito da una retta passante per l'origine e avente un'inclinazione pari alla viscosità del fluido nelle condizioni di pressione e di temperatura considerate (fig. 1.12). Tutte le sostanze fluide a carattere molecolare semplice seguono questa legge e sono dette fluidi newtoniani, ma sempre più diffuse diventano le sostanze fluide a struttura molecolare complessa che non la seguono, perché in esse la viscosità è funzione della tensione tangenziale, del gradiente della velocità e del tempo, e pertanto sono dette fluidi non newtoniani.

Il comportamento reologico dei fluidi in condizioni di regime stazionario può allora essere generalizzato nel modo seguente

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{du}{dy}$$

dove η dipende da più parametri; se $\eta = \mu$ il fluido è ovviamente newtoniano, mentre se diminuisce all'aumentare del gradiente il fluido è detto **pseudoplastico** (vedi fig. 1.12) e se aumenta all'aumentare del gradiente il fluido è detto **dilatante** (vedi fig. 1.12).

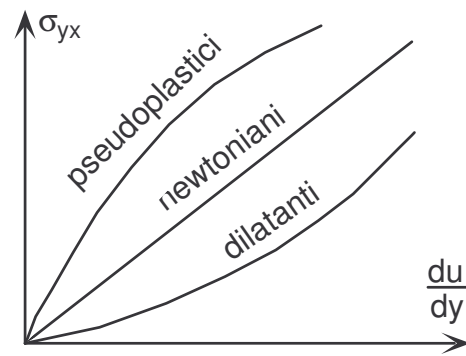


Fig. 1.12.- Diagramma tensione tangenziale – gradiente di velocità nei fluidi.-