

CAPITOLO 2

STATICA DEI FLUIDI

2.0.- RICHIAMI TEORICI

2.1.- EQUILIBRIO DI UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE

2.2.- EQUILIBRIO DI UN FLUIDO COMPRESSIBILE

2.3.- MANOMETRO DIFFERENZIALE

2.4.- CORPI IMMERSI

2.5.- SPINTA IDROSTATICA E CENTRO DI SPINTA

2.6.- SPINTA IDROSTATICA SU SUPERFICI CURVE

2.0.- RICHIAMI TEORICI

Forza di pressione

Per definizione la forza infinitesima di pressione $d\vec{F}$ agente su un volume infinitesimo dV , o di corpo immerso in un fluido o di fluido stesso, è data da

$$d\vec{F} = \text{grad}(p) dV \quad (2.1)$$

Forza peso

Per definizione la forza peso $d\vec{G}$ agente su un volume infinitesimo dV , o di corpo immerso in un fluido o di fluido stesso, è data da

$$d\vec{G} = \rho \vec{g} dV \quad (2.2)$$

dove ρ è la massa volumica in $[\text{kg}/\text{m}^3]$ e $\vec{g}$ è il vettore locale della gravità

$$\vec{g} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Equilibrio fra forza di pressione e forza peso

L'equilibrio di una massa di fluido all'interno del fluido stesso, facendo uso delle relazioni (2.1) e (2.2), è dato da

$$d\vec{F} = d\vec{G} \quad \rightarrow \quad \text{grad}(p) = \rho \vec{g} \quad (2.4)$$

le componenti della (2.4), in base alla (2.3), sono

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.5.a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.5.b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial h} = -\rho g \quad (2.5.c)$$

dove la coordinata h (profondità) è diretta verso il basso in senso contrario alla z (altezza).

Equilibrio di un fluido incompressibile

Per definizione in un fluido incompressibile la massa volumica rimane costante; si verifica cioè

$$\rho_2 = \rho_1 = \rho = \text{cost} \quad (2.6)$$

dove ρ_2 e ρ_1 sono rispettivamente la massa volumica generica e quella di riferimento; integrando la (2.5.c) e utilizzando la (2.6), si ha

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz = \int_{h_1}^{h_2} \rho g dh \quad \rightarrow \quad p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1) = \rho g (h_2 - h_1) \quad (2.7)$$

dove p_2 e p_1 sono la pressione generica all'altezza z_2 o alla profondità h_2 e quella di riferimento all'altezza z_1 o alla profondità h_1 . L'equazione (2.7) è stata trovata da **Stevin**.

Equilibrio di un fluido compressibile

Sostituendo la (2.5.c) nella relazione della compressibilità isoterma (1.22)

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa dp}{E} \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} = -\frac{\kappa \rho g dz}{E} = \frac{\kappa \rho g dh}{E}$$

e, integrando la relazione precedente, si ottiene dopo alcuni passaggi il valore della massa volumica in funzione della altezza z o della profondità h

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \kappa_m \rho_1 g (z_2 - z_1)} = \frac{\rho_1}{1 - \kappa_m \rho_1 g (h_2 - h_1)} \quad (2.8)$$

$$= \frac{\rho_1 E_m}{E_m + \rho_1 g (z_2 - z_1)} = \frac{\rho_1 E_m}{E_m - \rho_1 g (h_2 - h_1)}$$

Sostituendo la (2.7) nella relazione della compressibilità (1.23) si ha infine il valore della pressione in funzione della altezza o della profondità

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{\kappa_m} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = p_1 + \frac{1}{\kappa_m} \ln \left[\frac{1}{1 + \kappa_m \rho_1 g (z_2 - z_1)} \right] = p_1 + \frac{1}{\kappa_m} \ln \left[\frac{1}{1 - \kappa_m \rho_1 g (h_2 - h_1)} \right] \quad (2.9)$$

$$= p_1 + E_m \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = p_1 + E_m \ln \left[\frac{E_m}{E_m + \rho_1 g (z_2 - z_1)} \right] = p_1 + E_m \ln \left[\frac{E_m}{E_m - \rho_1 g (h_2 - h_1)} \right]$$

Manometro differenziale

La differenza di pressione Δp letta da un manometro differenziale è data da

$$\Delta p = p_2 - p_1 = (\rho_M - \rho) g \Delta z \quad (2.10)$$

dove ρ_M e ρ sono le masse volumiche del fluido manometrico e del fluido attivo e dove Δz è la differenza di livello nei due rami del manometro.

Corpi immersi

Integrando la (2.1) su un corpo di volume V si ha

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F} = \int_V -\text{grad}(p) dV$$

che, trasformata mediante la (2.4) in forza peso del fluido spostato dal corpo, diventa

$$\vec{F} = \int_V -\text{grad}(p) dV = \int_V -\rho \vec{g} dV = -\rho \vec{g} V ;$$

poiché è valida la (2.3), si hanno le componenti

$$F_x = 0 \quad (2.11.a)$$

$$F_y = 0 \quad (2.11.b)$$

$$F_z = \rho g V ; \quad (2.11.c)$$

la componente (2.11.c) in z , diretta verso l'alto, è nota come **spinta di Archimede**.

Spinta idrostatica

La spinta idrostatica F_i , agente su una superficie piana S immersa in un fluido, è perpendicolare alla superficie ed il suo valore, indipendente dall'inclinazione della superficie, è dato da

$$F_i = \rho g h_G S = p_G S \quad (2.12)$$

dove S è l'area della superficie, h_G è la distanza del baricentro G della superficie rispetto al pelo libero del fluido e p_G è il valore della pressione all'altezza del baricentro.

La retta d'azione della spinta idrostatica F_i , ricordando che il momento di una forza risultante rispetto ad un asse generico è uguale al momento della corrispondente forza distribuita rispetto allo stesso asse, si trova con la relazione

$$n_F F_i = \int_S n dF_i \quad (2.13)$$

dove n_F è la distanza della spinta dall'asse considerato ed n è la distanza della forza distribuita infinitesima dallo stesso asse.

Centro di spinta

Si prenda un sistema di coordinate cartesiane ortogonali piane ($x-y$) in modo che l'asse y coincida con l'intersezione del piano contenente la superficie S e il piano dei carichi piezometrici (superficie libera) e che l'asse x sia la retta, passante per il baricentro G della superficie, di massima pendenza del piano contenente la superficie. Le coordinate x_C e y_C del centro di spinta C , inteso come punto di applicazione della spinta idrostatica, sono date da

$$x_C = \frac{J_{yy}}{x_G S} = x_G + \frac{J_{gg}}{x_G S} \quad , \quad y_C = \frac{J_{xy}}{x_G S} \quad (2.14)$$

dove J_{yy} è il momento d'inerzia di area della superficie S rispetto all'asse y , J_{xy} è il momento d'inerzia centrifugo dell'area S rispetto agli assi x e y , J_{gg} è il momento d'inerzia di area della superficie S rispetto all'asse g passante per il baricentro G e parallelo all'asse y , x_G è la coordinata del baricentro G e S è l'area della superficie; la distanza fra le coordinate del centro di spinta x_C e del baricentro x_G , con la sostituzione della (2.12), diventa allora

$$x_C - x_G = \frac{J_{gg}}{x_G S} = \frac{J_{gg} \rho g \sin \alpha}{F_i} = \frac{J_{gg} \rho g \sin \alpha}{S p_G} \quad (2.15)$$

dove α è l'angolo di massima pendenza del piano contenente la superficie.

In termini di profondità h , la prima relazione delle (2.14) e la relazione (2.15) diventano rispettivamente

$$h_C = \frac{J_{yy} \sin^2 \alpha}{h_G S} = h_G + \frac{J_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S} \quad ; \quad (2.16)$$

$$h_C - h_G = \frac{J_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S} = \frac{J_{gg} \rho g \sin^2 \alpha}{F_i} = \frac{J_{gg} \rho g \sin^2 \alpha}{S p_G} \quad . \quad (2.17)$$

Spinta idrostatica su superfici curve

Si consideri prima il caso di un liquido situato sopra una superficie curva immersa; il peso del fluido deve essere sopportato dalla superficie stessa e di conseguenza, per l'equilibrio verticale, la componente verticale F_{iv} deve:

- essere uguale al peso del fluido;
- essere diretta verso il basso;
- passare attraverso il baricentro del fluido **reale** effettivamente presente.

Si consideri poi il caso di un liquido situato sotto una superficie curva immersa; se la superficie viene tolta e se lo spazio soprastante è riempito di liquido, per l'equilibrio verticale, la componente verticale F_v deve:

- essere uguale al peso del fluido soprastante inserito;
- essere diretta verso l'alto;
- passare attraverso il baricentro del fluido **immaginario** non effettivamente presente.

Riassumendo, si verifica che la forza verticale su una superficie curva immersa in un fluido è uguale al peso del fluido che "sta" oppure "potrebbe stare" verticalmente su di essa.

La componente orizzontale F_{io} della spinta idrostatica F_i (2.12) è invece uguale al prodotto della proiezione S_v della superficie curva S sul piano verticale per la pressione p_G all'altezza del baricentro G della proiezione S_v

$$F_{io} = F_i \sin \alpha = p_G S \sin \alpha = p_G S_v \quad (2.18)$$

dove α è l'angolo fra la superficie S e il piano orizzontale dei carichi piezometrici.

2.1.- EQUILIBRIO DI UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE

Esercizio 2.1.1

Convertire i seguenti carichi: a) $\Delta z = 15$ mCA (metri di colonna di acqua) in metri di colonna di olio blu; b) $\Delta z = 600$ mmHg (millimetri di mercurio) in metri di colonna di olio rosso; c) $\Delta z = 8$ mCA in cmHg.

Poiché i carichi devono determinare la stessa differenza di pressione, dalla legge di Stevin (2.7) si ha

$$\Delta p = -\rho_A g \Delta z_A = -\rho_B g \Delta z_B \quad \rightarrow \quad \Delta z_B = \frac{\rho_A}{\rho_B} \Delta z_A .$$

a) Dalla tab. T.1, in cui vengono letti i valori delle masse volumiche $\rho_A = 1000$ kg/m³ e $\rho_B = 797$ kg/m³, si ha

$$\Delta z_B = \frac{\rho_A}{\rho_B} \Delta z_A = \frac{1000}{797} \times 15 = 18.82 \text{ m} ;$$

b) dalla tab. T.1, in cui vengono letti i valori delle masse volumiche $\rho_A = 13595$ kg/m³ e $\rho_B = 827$ kg/m³, si ha

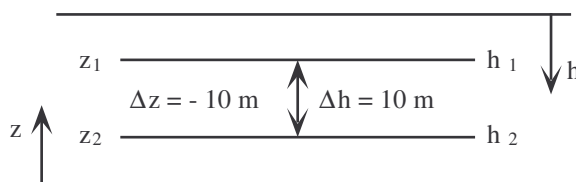
$$\Delta z_B = \frac{\rho_A}{\rho_B} \Delta z_A = \frac{1359}{827} \times 600 \times 10^{-3} = 9.86 \text{ m} ;$$

c)

$$\Delta z_B = \frac{\rho_A}{\rho_B} \Delta z_A = \frac{1000}{13595} \times 8 = 0.588 \text{ m} = 58.8 \text{ cm} .$$

Esercizio 2.1.2

Se all'altezza di riferimento, z_1 o alla profondità di riferimento h_1 , vige la pressione $p_1 = 1$ bar, calcolare la pressione p_2 esistente ad una differenza di altezza di $\Delta z = -10$ m o ad una differenza di profondità $\Delta h = 10$ m in vari fluidi (aria in condizioni normali a $T = 0$ °C, acqua, mercurio).



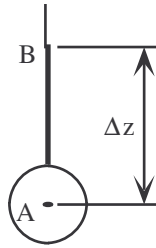
Dalla legge di Stevin (2.7) e dalla tab. T.1, in cui vengono letti i valori delle masse volumiche ρ , si ha

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 - \rho g \Delta z = p_1 + \rho g \Delta h = \\ &= 100000 - 1.294 \times 9.80665 \times (-10) = 100000 + 127 = 100127 \text{ Pa per l'aria} \\ &= 100000 - 1000.000 \times 9.80665 \times (-10) = 100000 + 98067 = 198067 \text{ Pa per l'acqua} \\ &= 100000 - 13595.000 \times 9.80665 \times (-10) = 100000 + 1333214 = 1433214 \text{ Pa per il mercurio.} \end{aligned}$$

Dai risultati ottenuti si può notare che per l'aria il termine $\rho \cdot g \cdot \Delta z$ è piccolo in confronto a p_1 tanto da poter considerare la pressione costante in ogni punto del campo interessato (e quindi il fluido come incompressibile), mentre per l'acqua esso è dello stesso ordine di grandezza e per il mercurio addirittura di un ordine di grandezza superiore.

Esercizio 2.1.3

Il piezometro, o tubo di pressione, è un tubo verticale aperto nell'estremità superiore e inserito in una tubazione o in un contenitore. L'altezza $\Delta z = 20$ cm della colonna di liquido con massa volumica $\rho = 990$ kg/m³ è dovuta alla pressione che il fluido possiede nel punto A. Calcolare la pressione p_A .



Dalla legge di Stevin (2.7) si ha

$$\Delta p = p_A - p_B = p_A - p_{\text{atm}} = \rho g \Delta z = 990 \times 9.80665 \times 0.20 = 1942 \text{ Pa} .$$

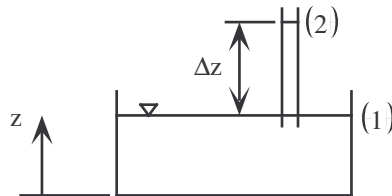
Poiché la parte superiore del tubo è aperta all'atmosfera, la pressione misurata è la pressione relativa (a quella atmosferica); per avere quella assoluta, si deve sommare il valore della pressione atmosferica $p_{\text{atm}} = 101325 \text{ Pa}$

$$p_A = \Delta p + p_{\text{atm}} = 1942 + 101325 = 103200 \text{ Pa} \cong 1.03 \text{ bar} .$$

Se il fluido è in movimento nella tubazione o nel contenitore, l'estremità inferiore del piezometro deve essere immersa fino all'altezza del punto A perché altrimenti la lettura sarebbe alterata dalla velocità del fluido.

Esercizio 2.1.4

Calcolare la differenza di pressione Δp necessaria per aspirare la glicerina lungo un tubo di diametro $d = 12.5 \text{ mm}$ fino ad una altezza $\Delta z = 22 \text{ cm}$. Si trascurano gli effetti delle resistenze passive.

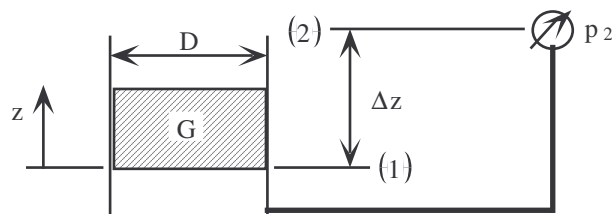


Indipendentemente dal diametro del tubo, a meno che non subentrino altri fenomeni come la tensione superficiale, dalla legge di Stevin (2.7) e dalla tab. T.1, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ , si ha

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho g \Delta z = -1260 \times 9.80665 \times 22 \times 10^{-2} = -2720 \text{ Pa} .$$

Esercizio 2.1.5

Il cilindro, di diametro $D = 1.5 \text{ m}$, e la tubazione riportati in figura contengono olio di massa volumica $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$. Il manometro si trova $\Delta z = 1.8 \text{ m}$ sopra lo stantuffo e la lettura del manometro è $p_2 = 2.2 \text{ bar}$. Calcolare il peso totale G dello stantuffo e dell'eventuale carico su di esso applicato.



Dalla legge di Stevin (2.7), sulla linea di riferimento all'altezza dello stantuffo, si ha

$$p_1 = p_2 + \rho g \Delta z = 2.2 \times 10^5 + 900 \times 9.80665 \times 1.8 = 235900 \text{ Pa} \cong 2.36 \text{ bar}$$

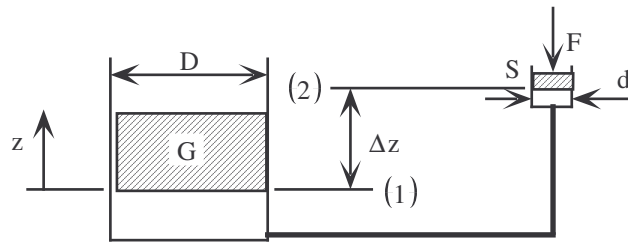
e dalla definizione di pressione (1.9) si ha

$$G = p_1 S = p_1 \frac{\pi D^2}{4} = 235900 \times \frac{\pi \times 1.5^2}{4} = 417000 \text{ N} = 417 \text{ kN} .$$

Esercizio 2.1.6

I cilindri, rispettivamente di diametro $D = 40 \text{ cm}$ e $d = 4 \text{ cm}$, e la tubazione contengono olio di massa volumica $\rho = 0.75 \text{ kg/dm}^3$. La differenza di altezza fra i due cilindri è $\Delta z = 5 \text{ m}$. Calcolare la forza F da applicare al-

lo stantuffo S necessaria a tenere in equilibrio il peso $G = 50000 \text{ N}$.



Per tenere in equilibrio il peso G , sulla linea di riferimento (1) deve gravare una pressione pari al rapporto fra il peso G e l'area S_G della sua sezione

$$p = \frac{G}{S_G} = \frac{G}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{50000}{\frac{\pi \times (40 \times 10^{-2})^2}{4}} = 397900 \text{ Pa}$$

e quindi sulla linea di riferimento (2), in base alla legge di Stevin (2.7), deve gravare una pressione

$$p_2 = p_1 - \rho g \Delta z = 397900 - 0.750 \times 10^3 \times 9.80665 \times 5 = 361100 \text{ Pa} \approx 3.61 \text{ bar} .$$

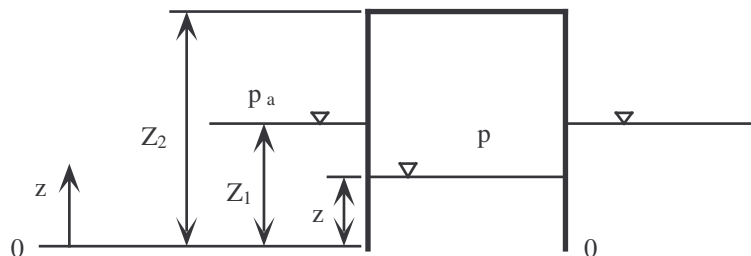
Dalla definizione di pressione (1.9) si ha che la forza F da applicare allo stantuffo di diametro d

$$F = p_2 S_s = p_2 \frac{\pi d^2}{4} = 361100 \times \frac{\pi \times (4 \times 10^{-2})^2}{4} = 454 \text{ N}$$

è molto più piccola del peso G ($454 \ll 50000$) applicato al cilindro di diametro D . Su questo principio si basano molte macchine idrauliche, come per esempio le presse.

Esercizio 2.1.7

Un serbatoio cilindrico capovolto è abbassato lentamente al di sotto della superficie di uno specchio d'acqua. L'aria intrappolata nel serbatoio è compressa isotericamente per l'aumento della pressione idrostatica. Calcolare la relazione che lega l'altezza z dell'acqua nel serbatoio alla sua immersione $Z_1 = 1.5 \text{ m}$ e alla altezza del serbatoio $Z_2 = 4 \text{ m}$.



Nel caso di compressione isoterma la pressione è inversamente proporzionale al volume ($p V = \text{cost}$) e di conseguenza, data la costanza della sezione, anche all'altezza dell'aria nel serbatoio

$$p_a Z_2 = p (Z_2 - z) \quad \rightarrow \quad p = p_a \frac{Z_2}{Z_2 - z}$$

dove p_a e p sono le pressioni esistenti all'interno del serbatoio prima della compressione (atmosferica) e dopo la compressione. L'uguaglianza delle pressioni in corrispondenza della linea isobara 0 - 0 all'interno e all'esterno del serbatoio, con la sostituzione della legge fra pressione e altezza trovata prima e con la legge di Stevin (2.7), porta all'equazione seguente

$$\begin{aligned} p_a + \rho g Z_1 &= p + \rho g z \quad \rightarrow \quad \frac{p_a}{\rho g} + Z_1 = \frac{p_a}{\rho g} \frac{Z_2}{Z_2 - z} + z \quad \rightarrow \quad \frac{p_a}{\rho g} \left(1 - \frac{Z_2}{Z_2 - z} \right) = z - Z_1 \\ \rightarrow \quad \frac{p_a}{\rho g} \frac{z}{Z_2 - z} &= Z_1 - z \quad \rightarrow \quad \frac{p_a}{\rho g} z = (Z_1 - z)(Z_2 - z) = Z_1 Z_2 - z Z_1 - z Z_2 + z^2 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad z^2 - z \left(Z_1 + Z_2 + \frac{p_a}{\rho g} \right) + Z_1 Z_2 = 0 . \end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione di secondo grado nell'altezza z dell'aria nel serbatoio deve prevedere un valore inferiore all'altezza Z_2 del serbatoio e quindi deve essere presa in considerazione quella con il segno negativo davanti al discriminante. Con i dati del problema si ha

$$z = \frac{1}{2} \left[Z_1 + Z_2 + \frac{p_a}{\rho g} - \sqrt{\left(Z_1 + Z_2 + \frac{p_a}{\rho g} \right)^2 - 4 Z_1 Z_2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1.5 + 4 + \frac{101325}{1000 \times 9.80665} - \sqrt{\left(1.5 + 4 + \frac{101325}{1000 \times 9.80665} \right)^2 - 4 \times 1.5 \times 4} \right] = 0.389 \text{ m} .$$

2.2.- EQUILIBRIO DI UN FLUIDO COMPRESSIBILE

Esercizio 2.2.1

Al livello del mare ($h_1 = 0$ m) l'acqua ha la massa volumica $\rho_1 = 1025 \text{ kg/m}^3$, la pressione $p_1 = 101325 \text{ Pa}$ e la temperatura è $T = 20^\circ\text{C}$. Assumendo costante il modulo di elasticità volumetrico E e la temperatura T , calcolare alla profondità $h_2 = 5000$ m: a) la massa volumica ρ_2 ; b) la pressione p_2 considerando il fluido compressibile; c) la pressione p_2 considerando il fluido incompressibile.

a) Dalla legge di variazione della massa volumica (2.8) per un fluido compressibile e dalla tab. T.6, in cui viene letto il valore del modulo di elasticità volumetrico E dell'acqua di mare, si ha

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{E}{E - \rho_1 g h_2} = 1025 \times \frac{2.42 \times 10^9}{2.42 \times 10^9 - 1025 \times 9.80665 \times 5000} = 1047 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

b) Dalla legge di variazione della pressione (2.9) per un fluido compressibile invece si ha

$$p_2 = p_1 + E \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = 101325 + 2.42 \times 10^9 \ln\left(\frac{1047}{1025}\right) = 1.013 \times 10^5 + 513.9 \times 10^5 = 515 \times 10^5 \text{ Pa} .$$

Se si fosse considerato il modulo di elasticità volumetrico E variabile con la pressione, si sarebbero dovuti ripetere in modo iterativo i calcoli delle due equazioni precedenti aggiornando ogni volta E in base ai valori della tab. T.6.

c) Le due relazioni usate valgono ovviamente solo per un fluido considerato come compressibile, mentre per un fluido considerato come incompressibile vale la legge di Stevin (2.7) che, nelle condizioni considerate, dà una pressione pari a

$$p'_2 = p_1 + \rho g h_2 = 101325 + 1025 \times 9.80665 \times 5000 = 1.013 \times 10^5 + 502.6 \times 10^5 = 504 \times 10^5 \text{ Pa} .$$

Lo scostamento percentuale vale quindi

$$\frac{p_2 - p'_2}{p'_2} = \frac{515 - 504}{504} = 2.18 \% .$$

Esercizio 2.2.2

Batiscafi per ricerche oceanografiche sono scesi a profondità tali sotto il livello del mare che la compressibilità dell'acqua di mare può essere significativa. Assumendo costante il modulo di elasticità volumetrico E , calcolare lo scostamento percentuale della massa volumica e della pressione alla profondità $h = 10$ km rispetto all'assunzione del fluido come incompressibile.

Per un fluido considerato come compressibile dalle relazioni (2.8) e (2.9) si ha rispettivamente

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{E}{E - \rho_1 g h_2} = 1025 \times \frac{2.42 \times 10^9}{2.42 \times 10^9 - 1025 \times 9.80665 \times 10000} = 1069 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
$$p_2 = p_1 + E \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = 101325 + 2.42 \times 10^9 \times \ln\left(\frac{1069}{1025}\right) = 1.013 \times 10^5 + 1017 \times 10^5 = 1018 \times 10^5 \text{ Pa} ,$$

mentre per un fluido considerato come incompressibile dalle relazioni (2.6) e (2.7) si ha rispettivamente

$$\rho'_2 = \rho_1 = 1025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p'_2 = p_1 + \rho g h_2 = 101325 + 1025 \times 9.80665 \times 10000 = 1.013 \times 10^5 + 1005 \times 10^5 = 1006 \times 10^5 \text{ Pa} .$$

Gli scostamenti percentuali valgono quindi

$$\frac{\rho_2 - \rho'_2}{\rho'_2} = \frac{1069 - 1025}{1025} = 4.29 \% \quad \frac{p_2 - p'_2}{p'_2} = \frac{1018 - 1006}{1006} = 1.19 \%$$

Esercizio 2.2.3

Un impianto per la produzione di energia progettato dalla OTEC (Ocean Thermal Energy Conversion) pre-

leva acqua di mare fredda alla profondità $h_2 = 1000$ m sotto il livello del mare e alla temperatura $T_2 = 5$ °C. Calcolare l'aumento percentuale di massa volumica dell'acqua di mare alla profondità h_2 rispetto a quella di superficie ($h_1 = 0$ m e $T_1 = 25$ °C) che vale $\rho_1 = 1025$ kg/m³.

Il modulo di elasticità volumetrico medio dell'acqua di mare fra $T_1 = 25$ °C, tratto dalla tab. T.6

$$E_{25} = \frac{E_{20} + E_{30}}{2} = \frac{(2.42 + 2.49) \times 10^9}{2} = 2.455 \times 10^9 \text{ Pa} ,$$

e $T_2 = 5$ °C, tratto dalla tab. T.6

$$E_5 = \frac{E_0 + E_{10}}{2} = \frac{(2.18 + 2.32) \times 10^9}{2} = 2.250 \times 10^9 \text{ Pa} ,$$

vale

$$E_m = \frac{E_5 + E_{25}}{2} = \frac{(2.455 + 2.250) \times 10^9}{2} = 2.353 \times 10^9 \text{ Pa} .$$

Dalla legge di variazione della massa volumica (2.8) per un fluido compressibile si ha allora

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{E_m}{E_m - \rho_1 g h_2} = \frac{2.353 \times 10^9}{2.353 \times 10^9 - 1025 \times 9.80665 \times 1000} = 1.0043$$

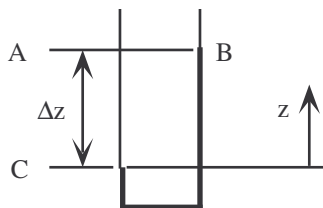
ed un incremento percentuale pari a

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = 1.0043 - 1 = 0.0043 = 0.43 \% .$$

2.3.- MANOMETRO DIFFERENZIALE

Esercizio 2.3.1

Un manometro differenziale, riempito di mercurio, è collegato ad una pompa idraulica, il ramo di sinistra con la sua uscita e il ramo di destra con la sua entrata. Se le prese sono alla stessa altezza, calcolare l'aumento di pressione Δp creato dalla pompa quando il dislivello fra le superfici libere del mercurio è $\Delta z = 15 \text{ cm}$.



Dalla legge del manometro differenziale (2.10) e dalla tab. T.1, in cui vengono lette le masse volumiche ρ , si ha

$$\Delta p = p_A - p_B = (\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}}) g \Delta z = (13595 - 1000) \times 9.80665 \times 15 \times 10^{-2} = 18530 \text{ Pa} \approx 0.185 \text{ bar}$$

ammettendo che sopra i punti A e B vi sia solo il fluido attivo.

Se si fosse trascurata la massa volumica del fluido attivo (acqua) rispetto a quella del fluido manometrico (mercurio) si sarebbe ottenuto

$$\Delta p = \rho_{\text{Hg}} g \Delta z = 13595 \times 9.80665 \times 15 \times 10^{-2} = 20000 \text{ Pa} \approx 0.200 \text{ bar}$$

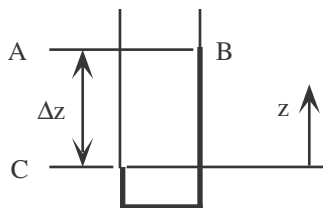
con un errore pari a

$$e = \frac{20000 - 18530}{18530} = 0.079 = 7.9 \% ,$$

che non può essere considerato trascurabile.

Esercizio 2.3.2

Un manometro differenziale, riempito d'acqua, è collegato ad un ventilatore d'aria, il ramo di sinistra con la sua uscita e il ramo di destra con la sua entrata. Se le prese sono alla stessa altezza e se l'aria all'ingresso della macchina e l'acqua si trovano alla temperatura $T = 20^\circ \text{C}$, calcolare l'aumento di pressione Δp creato dal ventilatore quando il dislivello fra le due superfici libere dell'acqua è $\Delta z = 15 \text{ cm}$.



Dalla legge del manometro differenziale (2.10) e dalla tab. T.2, in cui vengono lette le masse volumiche ρ , si ha

$$\Delta p = p_A - p_B = (\rho_{\text{acqua}} - \rho_{\text{aria}}) g \Delta z = (998.2 - 1.206) \times 9.80665 \times 15 \times 10^{-2} = 1467 \text{ Pa} \approx 0.0147 \text{ bar}$$

ammettendo che sopra i punti A e B vi sia solo il fluido attivo.

Per un calcolo esatto si sarebbe dovuto anche considerare che, per effetto della compressione, l'aria nella presa sullo scarico ha una massa volumica superiore di quella nella presa sull'aspirazione; poiché però l'incremento di pressione ottenuto è molto contenuto, questa correzione è ampiamente trascurabile. Se si fosse trascurata la massa volumica del fluido attivo (aria) rispetto a quella del fluido manometrico (acqua) si sarebbe ottenuto

$$\Delta p = \rho_{\text{acqua}} g \Delta z = 998.2 \times 9.80665 \times 15 \times 10^{-2} = 1468 \text{ Pa} \approx 0.0147 \text{ bar}$$

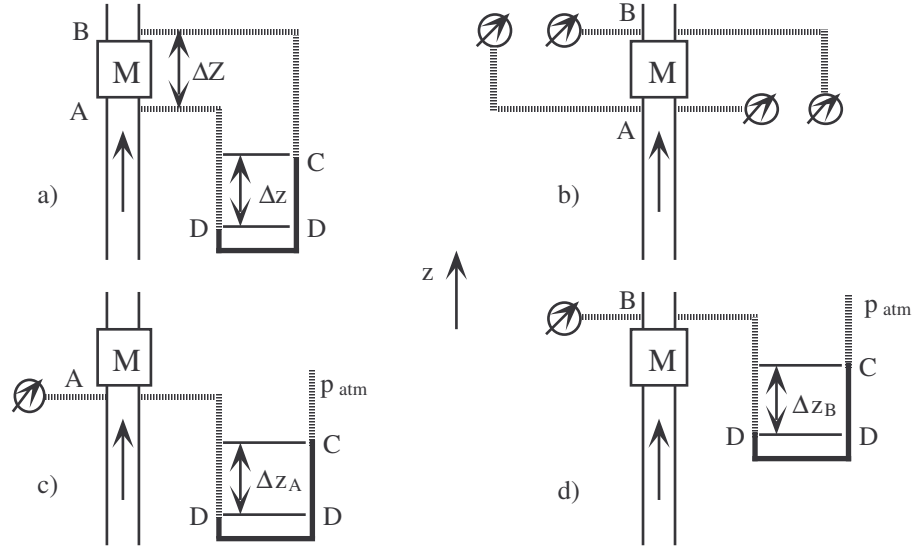
con un errore pari a

$$e = \frac{1467 - 1468}{1468} = -0.001 = -0.1 \% ,$$

che può essere considerato trascurabile.

Esercizio 2.3.3.

Calcolare la differenza di pressione fra i punti di ingresso A e di uscita B (con $p_A > p_B$) della macchina M, entro cui scorre un liquido attivo di massa volumica ρ_a , sia mediante un manometro differenziale riempito di un liquido manometrico di massa volumica ρ_m maggiore di ρ_a (fig. a), sia mediante due manometri a molla situati ognuno alle altezze dei punti A (fig. c) e B (fig. d) oppure entrambi all'altezza del punto A o del punto B (fig. b).



Facendo riferimento alla linea isobara D – D della fig. a, la pressione nel ramo di sinistra del manometro differenziale vale

$$p_D = p_A + (p_D - p_C) + (p_C - p_A)$$

e mediante la legge di Stevin (2.7) diventa

$$p_D = p_A - \rho_a g (-\Delta z) - \rho_a g [-(z_A - z_C)] ,$$

mentre la pressione nel ramo di destra vale

$$p_D = p_B + (p_D - p_C) + (p_C - p_A) + (p_A - p_B)$$

e mediante la legge di Stevin (2.7) diventa

$$p_D = p_B - \rho_m g (-\Delta z) - \rho_a g [-(z_A - z_C)] - \rho_a g (-\Delta Z) .$$

Uguagliando la pressione nei due rami del manometro e semplificando i termini uguali, alla fine si ottiene

$$\Delta p = p_A - p_B = (\rho_m - \rho_a) g \Delta z + \rho_a g \Delta Z = \Delta p' + \rho_a g \Delta Z \quad \rightarrow \quad \Delta p' = p_A - p_B - \rho_a g \Delta Z ; \quad (A)$$

la differenza di pressione $\Delta p'$, letta dalla configurazione di fig. a e pari alla legge del manometro differenziale (2.10), è uguale alla differenza di pressione fra i punti A e B meno una quantità corrispondente alla differenza di altezza di fluido attivo fra gli stessi punti.

Un manometro a molla inserito in un punto di una tubazione dà la stessa lettura di un manometro differenziale inserito fra lo stesso punto e l'atmosfera (figg. c, d); pertanto si ottengono i valori seguenti

$$p_A = p_{atm} + (\rho_m - \rho_a) g \Delta z_A , \quad p_B = p_{atm} + (\rho_m - \rho_a) g \Delta z_B$$

e la loro differenza

$$\Delta p = p_A - p_B = (\rho_m - \rho_a) g (\Delta z_A - \Delta z_B) \quad (B)$$

è uguale alla differenza di pressione fra i punti A e B. Dal confronto delle relazioni (A) e (B) risulta anche

$$\frac{\rho_m - \rho_a}{\rho_a} \Delta z + \Delta Z = \frac{\rho_m - \rho_a}{\rho_a} (\Delta z_A - \Delta z_B) \quad \rightarrow \quad \Delta z + \frac{\rho_m - \rho_a}{\rho_a} \Delta Z = (\Delta z_A - \Delta z_B) \quad \rightarrow \quad \Delta z_A - \Delta z_B > \Delta z .$$

Se infine, con una colonna di fluido attivo, il manometro in A viene portato all'altezza del punto B oppure il manometro in B viene portato all'altezza del punto A (fig. b), le letture vengono rispettivamente corrette nel modo seguente

$$p'_A = p_A - \rho_a g \Delta Z \quad , \quad p'_B = p_B + \rho_a g \Delta Z$$

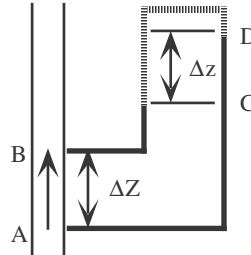
e, in base alla (A), la differenza di pressione nei due casi

$$\Delta p' = p'_A - p_B = (p_A - p_B) - \rho_a g \Delta Z = (\rho_m - \rho_a) g \Delta z$$

$$\Delta p' = p_A - p'_B = (p_A - p_B) - \rho_a g \Delta Z = (\rho_m - \rho_a) g \Delta z$$

diventa uguale a quella determinata dal manometro differenziale; la configurazione di fig. b è allora uguale alla configurazione di fig. a.

[Nota. Se il fluido manometrico avesse una massa volumica ρ_m inferiore a quella del fluido attivo ρ_a , il manometro differenziale sarebbe rivolto verso l'alto.



In questo caso, ripetendo la procedura vista in precedenza, nel ramo di sinistra e rispettivamente nel ramo di destra le pressioni all'altezza della linea di riferimento D - D valgono

$$p_D = p_B + (p_D - p_C) + (p_C - p_B) = p_B - \rho_m g (-\Delta z) - \rho_a g [-(z_B - z_C)]$$

$$p_D = p_A + (p_D - p_C) + (p_C - p_B) + (p_B - p_A) = p_A - \rho_a g (-\Delta Z) - \rho_a g [-(z_B - z_C)] - \rho_a g (-\Delta Z) ;$$

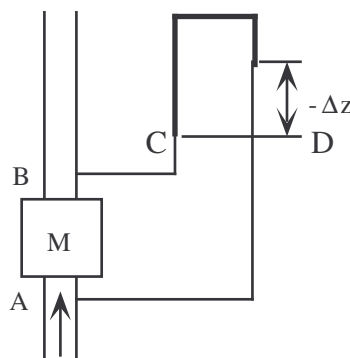
uguagliando le due pressioni si ottiene

$$\Delta p = p_A - p_B = (\rho_a - \rho_m) g \Delta z + \rho_a g \Delta Z .]$$

In conclusione, un manometro differenziale inserito fra due punti di un impianto tiene conto anche della differenza di pressione idrostatica dovuta all'altezza di colonna di fluido attivo fra le posizioni dei due punti.

Esercizio 2.3.4

Per misurare la perdita di carico subita dal fluido di massa volumica $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$ nel passaggio attraverso la macchina M, è inserito un manometro differenziale ad U rovesciato con fluido manometrico di massa volumica $\rho_M = 750 \text{ kg/m}^3$. Si sa che $\Delta z = -0.9 \text{ m}$. Calcolare la differenza di pressione Δp fra l'ingresso A e l'uscita B della macchina M.



Dalla legge del manometro differenziale (2.10) si ha

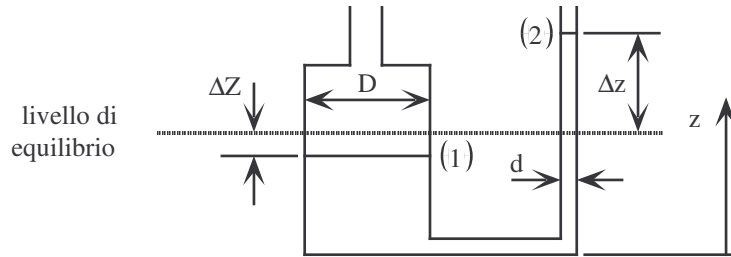
$$\Delta p = (\rho_M - \rho) g \Delta z = (750 - 1500) \times 9.80665 \times (-0.9) = 6619 \text{ Pa}$$

ammettendo che sotto i punti C e D vi sia solo fluido attivo.

Esercizio 2.3.5

Un manometro ad U ha un serbatoio di diametro $D = 50 \text{ mm}$ ed ha un tubo verticale di diametro $d = 10 \text{ mm}$; il fluido attivo è aria a $T = 20^\circ \text{C}$, mentre il liquido manometrico è olio rosso Meriam. Calcolare: a) la deviazio-

ne del manometro, cioè la variazione di altezza del pelo libero Δz dell'olio nei due bracci in funzione della differenza di pressione Δp ; b) la distanza Δz fra le tacche del tubo verticale per avere una differenza di pressione pari a $\Delta p = 10 \text{ Pa}$.



Dalla legge del manometro differenziale (2.10) si ha

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_M - \rho) g (z_2 - z_1) = (\rho_M - \rho) g (\Delta z + \Delta Z)$$

ammettendo che sopra i punti (1) e (2) vi sia solo il fluido attivo. Per mettere ΔZ in funzione di Δz , si nota che il volume del liquido manometrico deve rimanere costante; quindi, poiché il volume che esce dal serbatoio deve essere uguale a quello che entra nel tubo

$$\frac{\pi D^2}{4} \Delta Z = \frac{\pi d^2}{4} \Delta z \quad \rightarrow \quad \Delta Z = \left(\frac{d}{D} \right)^2 \Delta z ,$$

sostituendo quest'ultima relazione in quella del manometro differenziale si ha la legge del manometro in funzione solo di Δz

$$\Delta p = (\rho_M - \rho) g (\Delta z + \Delta Z) = (\rho_M - \rho) g \left[\Delta z + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \Delta z \right] = (\rho_M - \rho) g \Delta z \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] . \quad (A)$$

a) Dalla relazione precedente, dalla tab. T.1, in cui viene letta la massa volumica ρ_M , e dalla tab. T.2, in cui viene letta la massa volumica ρ , si ha

$$\Delta p = (\rho_M - \rho) g \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] \Delta z = (827 - 1.206) \times 9.80665 \times \left[1 + \left(\frac{10}{50} \right)^2 \right] \times \Delta z = 8422 \times \Delta z ;$$

se si fosse trascurata la massa volumica dell'aria rispetto a quella del liquido, si sarebbe ottenuto

$$\Delta p = \rho_M g \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] \Delta z = 827 \times 9.80665 \times \left[1 + \left(\frac{10}{50} \right)^2 \right] \times \Delta z = 8435 \times \Delta z .$$

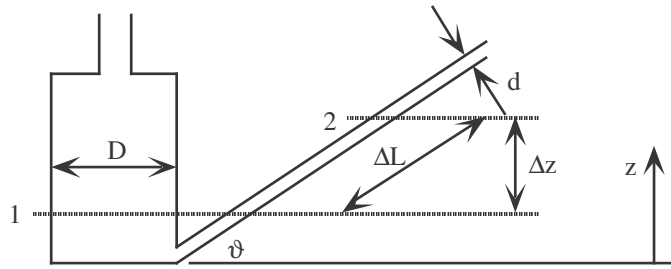
b) Dalle relazioni precedenti infine si ha la distanza Δz fra le tacche per una differenza di pressione Δp data

$$\Delta z_1 = \frac{\Delta p}{8422} = \frac{10}{8422} = 0.001187 \text{ m} \cong 1.19 \text{ mm} , \quad \Delta z_2 = \frac{\Delta p}{8435} = \frac{10}{8435} = 0.001186 \text{ m} \cong 1.19 \text{ mm} .$$

Dai risultati si nota che con rapporti ρ_M/ρ attorno al migliaio, la differenza nella distanza fra le tacche, trascurando o no ρ rispetto a ρ_M , è dell'ordine del micron.

Esercizio 2.3.6

Un manometro inclinato ha: il serbatoio di diametro D , il tubo di misura di diametro d , il liquido manometrico di massa volumica ρ_M e l'angolo di inclinazione del tubo pari a ϑ . a) Se $D = 90 \text{ mm}$, $d = 6 \text{ mm}$, $\rho = 1750 \text{ kg/m}^3$ e $\vartheta = 30^\circ$, calcolare la differenza di pressione massima Δp misurabile su una lunghezza del tubo inclinato pari a $\Delta L = 40 \text{ cm}$. b) Se $D = 75 \text{ mm}$, $d = 6 \text{ mm}$ e $\rho_M = 897 \text{ kg/m}^3$, calcolare l'angolo ϑ che su una lunghezza $\Delta L = 125 \text{ mm}$ misura una differenza di pressione Δp pari a $\Delta z = 25 \text{ mm}$ di colonna d'acqua. c) Se $D = 96 \text{ mm}$ e $d = 8 \text{ mm}$, calcolare l'angolo ϑ che crea un rapporto 5/1 nella risalita del fluido rispetto ad un manometro ad U.



Poiché dalla figura si vede che nel caso di un manometro inclinato vale la legge di trasformazione $\Delta z = \Delta L \sin \vartheta$, dalla legge (A) del manometro differenziale con serbatoio vista nell'esercizio 2.3.5 si ricava

$$\Delta p = (\rho_M - \rho) g \Delta z \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = (\rho_M - \rho) g \Delta L \sin \vartheta \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]. \quad (A)$$

a) Dalla relazione (A) e dalla tab. T.2, in cui viene letta la massa volumica ρ , si ha la differenza di pressione Δp in funzione di ΔL

$$\Delta p = (\rho_M - \rho) g \Delta L \sin \vartheta \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = (1750 - 1.206) \times 9.80665 \times 0.4 \times \sin(30^\circ) \times \left[1 + \left(\frac{6}{90} \right)^2 \right] = 3445 \text{ Pa}.$$

b) Poiché un'altezza d'acqua $\Delta z = 25 \text{ mm}$ corrisponde ad una differenza di pressione Δp pari a

$$\Delta p = \rho g \Delta z = 1000 \times 9.80665 \times 0.025 = 245.2 \text{ Pa},$$

dalla (A) si ha l'angolo ϑ per misurare un Δp dato su una base ΔL data

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &= \frac{\Delta p}{(\rho_M - \rho) g \Delta L \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]} \rightarrow \vartheta = \arcsin \left\{ \frac{\Delta p}{(\rho_M - \rho) g \Delta L \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]} \right\} = \\ &= \arcsin \left\{ \frac{245.2}{(897 - 1.206) \times 9.80665 \times 0.125 \times \left[1 + \left(\frac{6}{75} \right)^2 \right]} \right\} = \arcsin(0.2219) = 12.8^\circ. \end{aligned}$$

c) Uguagliando la differenza di pressione fra un manometro inclinato ed un manometro ad U

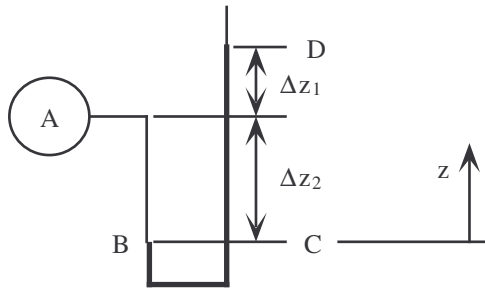
$$\Delta p = (\rho_M - \rho) g \Delta L \sin \vartheta \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = (\rho_M - \rho) g \Delta z,$$

si ha l'angolo ϑ per un rapporto, fra manometri inclinato e verticale, $\Delta L / \Delta z$ dato

$$\sin \vartheta = \frac{\Delta z}{\Delta L \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]} \rightarrow \vartheta = \arcsin \left\{ \frac{\Delta z}{\Delta L \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]} \right\} = \arcsin \left\{ \frac{1}{5 \times \left[1 + \left(\frac{8}{96} \right)^2 \right]} \right\} = 11.5^\circ.$$

Esercizio 2.3.7

Per misurare la pressione, all'interno di una tubazione è inserito un manometro differenziale collegato all'aria esterna. Il fluido manometrico è mercurio e il fluido attivo è acqua, mentre le caratteristiche geometriche sono: $\Delta z_1 = 30 \text{ cm}$ e $\Delta z_2 = 60 \text{ cm}$. Calcolare la pressione assoluta p_A del fluido nel punto A.



Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro non sono collegati allo stesso fluido attivo; dalla legge di Stevin (2.7) applicata fra i vari punti di riferimento e dalla tab. T.1, in cui vengono lette le masse volumiche dei fluidi usati nel manometro, si ha

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= -\rho g (z_A - z_B) = -\rho g \Delta z_2 \\ p_C - p_D &= p_B - p_D = -\rho_M g (z_C - z_D) = -\rho_M g (-\Delta z_1 - \Delta z_2) \\ p_D &= p_{\text{atm}} \end{aligned}$$

e quindi la pressione assoluta nel punto A vale

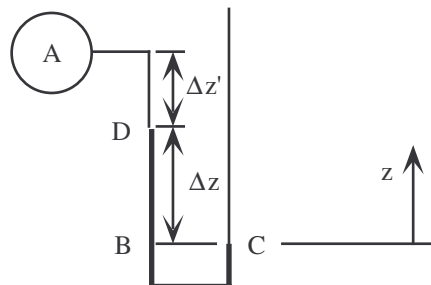
$$\begin{aligned} p_A &= (p_A - p_B) + (p_B - p_D) + p_D = -\rho g \Delta z_2 + \rho_M g (\Delta z_1 + \Delta z_2) + p_{\text{atm}} = \\ &= -1000 \times 9.80665 \times 60 \times 10^{-2} - 13595 \times 9.80665 \times (-30 - 60) \times 10^{-2} + 101325 = \\ &= 114100 + 101325 = 215400 \text{ Pa} \approx 2.15 \text{ bar} . \end{aligned}$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando la legge di Stevin (2.7) ai punti di riferimento B e C dove $p_B = p_C$; infatti

$$p_B = p_C \rightarrow p_A + \rho g \Delta z_2 = \rho_M g (\Delta z_1 + \Delta z_2) + p_{\text{atm}} \rightarrow p_A = -\rho g \Delta z_2 + \rho_M g (\Delta z_1 + \Delta z_2) + p_{\text{atm}} .$$

Esercizio 2.3.8

Per misurare la pressione, all'interno di una tubazione è inserito un manometro differenziale collegato all'aria esterna. Il fluido manometrico è mercurio e il fluido attivo è acqua, mentre le caratteristiche geometriche sono: $\Delta z = 30 \text{ cm}$ e $\Delta z' = 60 \text{ cm}$. Calcolare la pressione assoluta p_A del fluido nel punto A.



Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro non sono collegati allo stesso fluido attivo; dalla legge di Stevin (2.7) applicata fra i vari punti di riferimento e dalla tab. T.1, in cui vengono lette le masse volumiche dei fluidi usati nel manometro, si ha

$$\begin{aligned} p_A - p_D &= -\rho g (z_A - z_D) = -\rho g \Delta z' \\ p_D - p_B &= -\rho_M g (z_D - z_B) = -\rho_M g \Delta z \\ p_B &= p_C = p_{\text{atm}} \end{aligned}$$

e quindi la pressione assoluta nel punto A vale

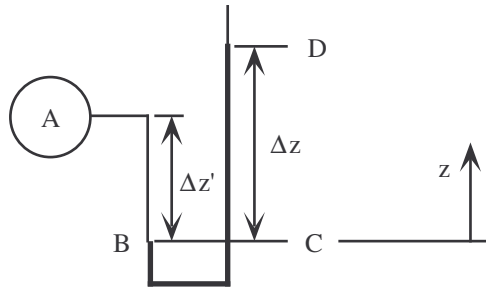
$$\begin{aligned} p_A &= (p_A - p_D) + (p_D - p_B) + p_B = -\rho g \Delta z' - \rho_M g \Delta z + p_{\text{atm}} = \\ &= -1000 \times 9.80665 \times 60 \times 10^{-2} - 13595 \times 9.80665 \times 30 \times 10^{-2} + 101325 = 55400 \text{ Pa} \approx 0.554 \text{ bar} . \end{aligned}$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando la legge di Stevin (2.7) ai punti di riferimento B e C dove $p_B = p_C$; infatti

$$p_B = p_C \rightarrow p_A + \rho g \Delta z' + \rho_M g \Delta z = p_{\text{atm}} \rightarrow p_A = -\rho g \Delta z' - \rho_M g \Delta z + p_{\text{atm}} .$$

Esercizio 2.3.9

Per misurare la pressione, all'interno di una tubazione è inserito un manometro differenziale collegato all'aria esterna. Il fluido manometrico è mercurio e il fluido attivo è acqua, mentre le caratteristiche geometriche sono: $\Delta z' = 60 \text{ cm}$ e $\Delta z = 90 \text{ cm}$. Calcolare la pressione relativa p_A del fluido nel punto A.



Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro non sono collegati allo stesso fluido attivo; dalla legge di Stevin (2.7) applicata fra i vari punti di riferimento e dalla tab. T.1, in cui vengono lette le masse volumiche dei fluidi usati nel manometro, si ha

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= -\rho g (z_A - z_B) = -\rho g \Delta z' \\ p_C - p_D &= p_B - p_D = -\rho_M g (z_C - z_D) = -\rho_M g (-\Delta z) = \rho_M g \Delta z \end{aligned}$$

e quindi la pressione relativa nel punto A vale

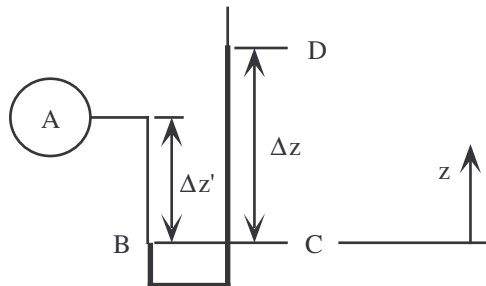
$$\begin{aligned} p_A &= (p_A - p_B) + (p_B - p_D) = -\rho g \Delta z' + \rho_M g \Delta z = \\ &= -1000 \times 9.80665 \times 60 \times 10^{-2} + 13595 \times 9.80665 \times 90 \times 10^{-2} = -5884 + 120000 = 114100 \text{ Pa} \approx 114 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 1.14 \text{ bar} . \end{aligned}$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando la legge di Stevin (2.7) ai punti di riferimento B e C dove $p_B = p_C$; infatti

$$p_B = p_C \rightarrow p_A + \rho g \Delta z' = \rho_M g \Delta z \rightarrow p_A = g (-\rho \Delta z' + \rho_M \Delta z) . \quad (A)$$

Esercizio 2.3.10

Nel manometro dell'esercizio 2.3.9 rimangono uguali il fluido manometrico mercurio, il fluido attivo acqua e l'altezza $\Delta z' = 60 \text{ cm}$, mentre viene data la pressione $p_A = 1.141 \text{ bar}$ nel punto A. Calcolare la lettura Δz del manometro differenziale.

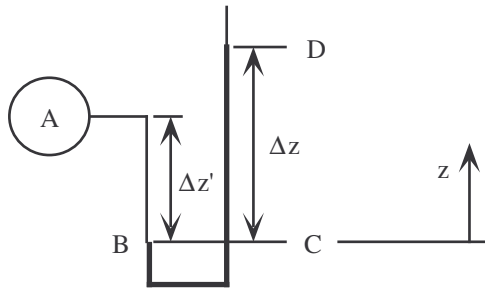


Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro differenziale non sono collegati allo stesso fluido attivo; dalla relazione (A) dell'esercizio 2.3.9 e dalla tab. T.1, in cui vengono lette le masse volumiche dei fluidi usati nel manometro differenziale, si ha

$$p_A + \rho g \Delta z' = \rho_M g \Delta z \rightarrow \Delta z = \frac{p_A + \rho g \Delta z'}{\rho_M g} = \frac{1.141 \times 10^5 + 1000 \times 9.80665 \times 0.60}{13595 \times 9.80665} = 0.900 \text{ m} .$$

Esercizio 2.3.11

Nel manometro dell'esercizio 2.3.9 il fluido manometrico e il fluido attivo diventano rispettivamente acqua e un gas di massa volumica $\rho = 7 \text{ kg/m}^3$, mentre le caratteristiche geometriche rimangono $\Delta z' = 60 \text{ cm}$ e $\Delta z = 90 \text{ cm}$. Calcolare: a) la pressione relativa p_A nel punto A. Se viene trascurata l'altezza $\Delta z'$ del gas, calcolare: b) l'errore e commesso.



Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro differenziale non sono collegati allo stesso fluido attivo.

a) Dalla relazione (A) dell'esercizio 2.3.9 si ha

$$p_A = g(-\rho \Delta z' + \rho_M \Delta z) = 9.80665 \times (-7 \times 60 \times 10^{-2} + 1000 \times 90 \times 10^{-2}) = 8785 \text{ Pa} .$$

b) Se viene trascurato $\Delta z'$, la relazione precedente diventa

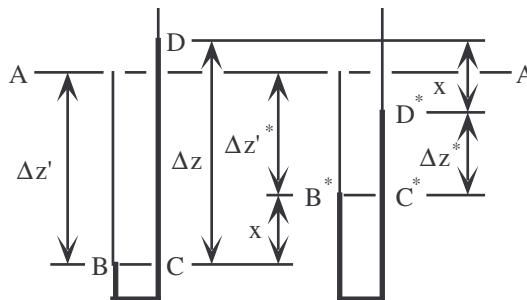
$$p_A = g \rho_M \Delta z = 9.80665 \times 1000 \times 90 \times 10^{-2} = 8826 \text{ Pa}$$

e l'errore percentuale ammonta a

$$e = \frac{8826 - 8785}{8785} = 0.00467 \approx 0.5 \% .$$

Esercizio 2.3.12

Se la pressione in A dell'esercizio 2.3.9 è ridotta di $\Delta p = 50 \text{ kN/m}^2$, calcolare la nuova differenza di livello nel mercurio $\Delta z'^*$ e Δz^* . (Da notare che il mercurio cala di x metri nel ramo di destra e sale di x metri nel ramo di sinistra).



La nuova pressione p_A^* raggiunge il valore

$$p_A^* = p_A - \Delta p = 114 - 50 = 64 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 64000 \text{ Pa} .$$

Dalla figura si vede anche che le nuove altezze $\Delta z'^*$ e Δz^* diventano

$$\Delta z'^* = \Delta z' - x \quad \text{e} \quad \Delta z^* = \Delta z - 2x .$$

Dalla legge di Stevin (2.7) applicata ai nuovi punti di riferimento B^* e C^* (dove $p_B^* = p_C^*$) si ha

$$\begin{aligned} p_B^* = p_C^* &\rightarrow p_A^* + \rho_{H_2O} g \Delta z'^* = \rho_{Hg} g \Delta z^* \rightarrow p_A^* + \rho_{H_2O} g (\Delta z' - x) = \rho_{Hg} g (\Delta z - 2x) \rightarrow \\ &\rightarrow p_A^* + g (\rho_{H_2O} \Delta z' - \rho_{Hg} \Delta z) = g (\rho_{H_2O} - 2 \rho_{Hg}) x \rightarrow x = \frac{p_A^* + g (\rho_{H_2O} \Delta z' - \rho_{Hg} \Delta z)}{g (\rho_{H_2O} - 2 \rho_{Hg})} = \\ &= \frac{64000 + 9.80665 \times (1000 \times 0.60 - 13595 \times 0.90)}{9.80665 \times (1000 - 2 \times 13595)} = 0.1951 \text{ m} \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta z'^* = \Delta z' - x = 0.60 - 0.1951 = 0.4049 \text{ m}$$

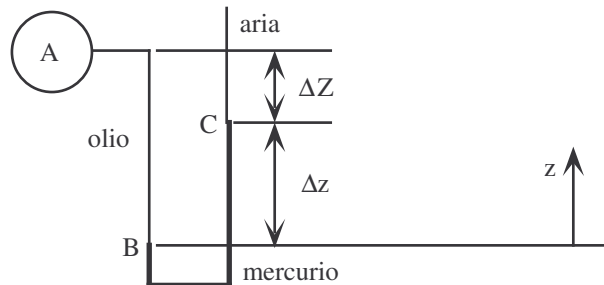
$$\Delta z^* = \Delta z - 2x = 0.90 - 2 \times 0.1951 = 0.5098 \text{ m} .$$

Come verifica del risultato, si sostituiscono i nuovi valori delle altezze nella legge della pressione (A) trovata nell'esercizio 2.3.9

$$p_A^* = g \left(-\rho_{H_2O} \Delta z'^* + \rho_{Hg} \Delta z^* \right) = 9.80665 \times (-1000 \times 0.4049 + 13595 \times 0.5098) = 64000 \text{ Pa} .$$

Esercizio 2.3.13

Un olio di massa volumica $\rho = 750 \text{ kg/m}^3$ defluisce attraverso il tubo A alterando l'equilibrio del mercurio nel manometro ad U. Si sa che $p_A = 1.4 \text{ bar}$ e che $\Delta Z = 0.825 \text{ m}$. Calcolare la differenza di altezza Δz fra i peli liberi del manometro differenziale.



Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro differenziale non sono collegati allo stesso fluido attivo; dalla legge di Stevin (2.7) applicata fra i vari punti di riferimento si ha

$$p_A - p_B = -\rho_{olio} g (\Delta z + \Delta Z)$$

$$p_B - p_C = -\rho_{Hg} g (-\Delta Z)$$

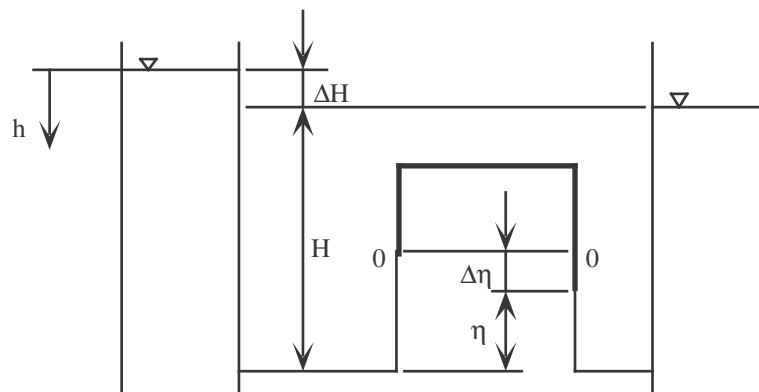
$$p_C = p_{atm}$$

e quindi

$$\begin{aligned} p_A - p_C &= (p_A - p_B) + (p_B - p_C) \quad \rightarrow \quad p_A - p_{atm} = (\rho_{Hg} - \rho_{olio}) g \Delta Z - \rho_{olio} g \Delta z \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \Delta z &= \frac{(p_A - p_{atm}) + \rho_{olio} g \Delta Z}{(\rho_{Hg} - \rho_{olio}) g} = \frac{(1.4 \times 10^5 - 101325) + 750 \times 9.80665 \times 0.825}{(13595 - 750) \times 9.80665} = 0.355 \text{ m} . \end{aligned}$$

Esercizio 2.3.14

Un sofisticato sistema laser per valutare la differenza di livello dell'acqua in due grandi serbatoi è costituito da un manometro rovesciato nel cui interno si trova olio con massa volumica leggermente più leggera dell'acqua. Calcolare la massa volumica dell'olio ρ che determina un dislivello fra olio e acqua con un coefficiente di amplificazione pari a $r = 10$ volte quello esistente fra i due serbatoi.



Dalla legge di Stevin (2.7) si ha la differenza di pressione Δp creata dalla differenza di livello ΔH dei due serbatoi

$$\Delta p = \rho g \Delta H ;$$

sostituendo quest'ultima relazione nella legge del manometro differenziale (2.10), si ha

$$\Delta p = (\rho_M - \rho) g \Delta \eta \quad \rightarrow \quad \rho g \Delta H = (\rho_M - \rho) g (-\Delta \eta) \quad \rightarrow \quad \rho (\Delta H - \Delta \eta) = -\rho_M \Delta \eta ;$$

poiché è

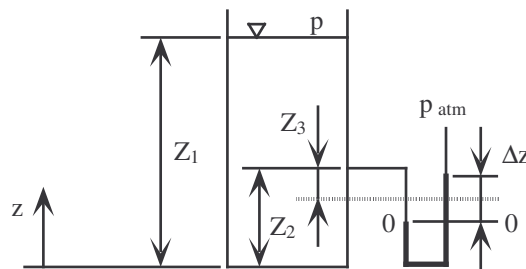
$$\Delta\eta = r \Delta H$$

alla fine si ha

$$\rho (r-1) \Delta H = \rho_M r \Delta H \quad \rightarrow \quad \rho_M = \frac{r-1}{r} \rho = \frac{10-1}{10} 1000 = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Esercizio 2.3.15

Un serbatoio aperto all'atmosfera è riempito d'acqua fino ad un'altezza $Z_1 = 2.5$ m e possiede, ad un'altezza $Z_2 = 0.7$ m dal fondo, un manometro differenziale ad U nel quale il fluido manometrico è in equilibrio ad un livello $Z_3 = 0.2$ m sotto la presa al serbatoio. Calcolare il dislivello Δz del manometro: a) se il fluido manometrico ha una massa volumica $\rho_m = 1750$ kg/m³; b) se il fluido manometrico è mercurio con massa volumica $\rho_m = 13595$ kg/m³; c) se il serbatoio è chiuso con una pressione pari a una volta e mezza quella atmosferica e se il fluido manometrico è mercurio.



Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro differenziale non sono collegati allo stesso fluido attivo; dalla legge di Stevin (2.7), applicata in corrispondenza della linea isobara di riferimento 0-0, si ha

$$p + \rho_a g \left(Z_1 - Z_2 + Z_3 + \frac{\Delta z}{2} \right) = p_{\text{atm}} + \rho_m g \Delta z$$

e quindi a

$$\Delta z = \frac{(p - p_{\text{atm}}) + \rho_a g (Z_1 - Z_2 + Z_3)}{g \left(\rho_m - \frac{\rho_a}{2} \right)}$$

Nei vari casi il dislivello del manometro vale:

a) quando $p = p_{\text{atm}}$

$$\Delta z = \frac{\rho_a (Z_1 - Z_2 + Z_3)}{\rho_m - \frac{\rho_a}{2}} = \frac{1000 \times (2.5 - 0.7 + 0.2)}{1750 - \frac{1000}{2}} = \frac{1000 \times 2}{1250} = 1.60 \text{ m} ;$$

b) quando $p = p_{\text{atm}}$

$$\Delta z = \frac{\rho_a (Z_1 - Z_2 + Z_3)}{\rho_m - \frac{\rho_a}{2}} = \frac{1000 \times (2.5 - 0.7 + 0.2)}{13595 - \frac{1000}{2}} = \frac{1000 \times 2}{13095} = 0.153 \text{ m} ;$$

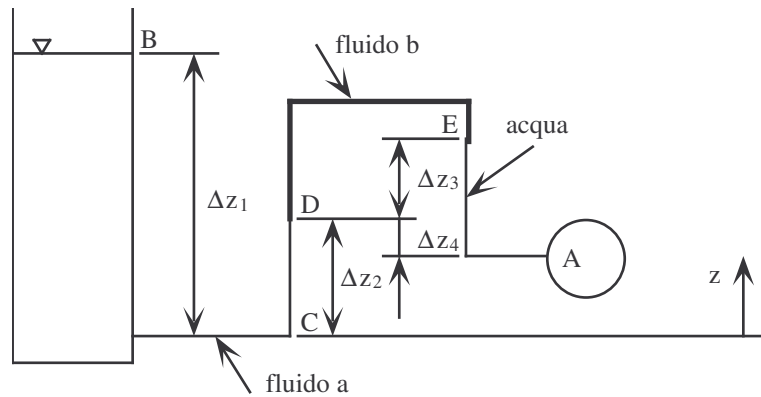
c) quando $p = 1.5 p_{\text{atm}}$

$$\Delta z = \frac{0.5 p_{\text{atm}} + \rho_a g (Z_1 - Z_2 + Z_3)}{g \left(\rho_m - \frac{\rho_a}{2} \right)} = \frac{0.5 \times 101325 + 1000 \times 9.80665 (2.5 - 0.7 + 0.2)}{9.80665 \times \left(13595 - \frac{1000}{2} \right)} = 0.547 \text{ m} .$$

Esercizio 2.3.16

I fluidi a e b hanno una massa volumica rispettivamente pari a $\rho_a = 750$ kg/m³ e a $\rho_b = 1200$ kg/m³ e il serba-

toio di sinistra è aperto all'atmosfera. Si sa che: $\Delta z_1 = 90$ cm, $\Delta z_2 = 37.5$ cm, $\Delta z_3 = 25$ cm e $\Delta z_4 = 12.5$ cm. Calcolare la pressione p_A nel punto A all'interno dell'acqua.



Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro differenziale non sono collegati allo stesso fluido attivo; dalla legge di Stevin (2.7) applicata fra i vari punti di riferimento si ha

$$p_B = p_{\text{atm}} = 101325 \text{ Pa}$$

$$p_C - p_B = -\rho_a g (z_C - z_B) = -\rho_a g (-\Delta z_1) = -750 \times 9.80665 \times (-90 \times 10^{-2}) = 6619 \text{ Pa}$$

$$p_D - p_C = -\rho_a g (z_D - z_C) = -\rho_a g \Delta z_2 = -750 \times 9.80665 \times 37.5 \times 10^{-2} = -2758 \text{ Pa}$$

$$p_E - p_D = -\rho_b g (z_E - z_D) = -\rho_b g \Delta z_3 = -1200 \times 9.80665 \times 25 \times 10^{-2} = -2942 \text{ Pa}$$

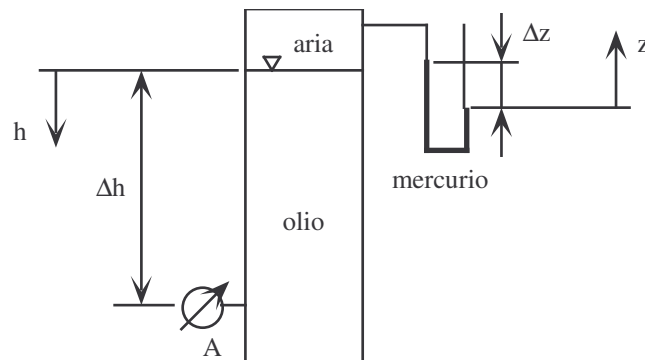
$$p_A - p_E = -\rho_{\text{H}_2\text{O}} g (z_A - z_E) = -\rho_{\text{H}_2\text{O}} g (-\Delta z_3 - \Delta z_4) = -1000 \times 9.80665 \times (-25 - 12.5) \times 10^{-2} = 3677 \text{ Pa}$$

e quindi

$$p_A = (p_A - p_E) + (p_E - p_D) + (p_D - p_C) + (p_C - p_B) + p_B = 3677 - 2942 - 2758 + 6619 + 101325 = 106000 \text{ Pa} .$$

Esercizio 2.3.17

Un serbatoio contiene olio di massa volumica $\rho_{\text{olio}} = 750 \text{ kg/m}^3$ e il dislivello del manometro a mercurio segna $\Delta z = 23$ cm. Calcolare il valore della pressione p_A indicata dal manometro A alla profondità $\Delta h = 3$ m.



Dalla legge del manometro differenziale (2.10) si ha

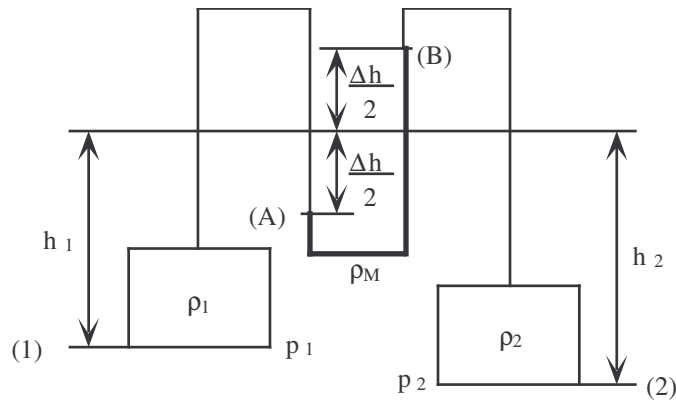
$$p_{\text{aria}} = p_{\text{atm}} - (\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{aria}}) g \Delta z \cong p_{\text{atm}} - \rho_{\text{Hg}} g \Delta z = 101325 - 13595 \times 9.80665 \times 0.23 = 70660 \text{ Pa}$$

e dalla legge di Stevin (2.7) si ha

$$p_A = p_{\text{aria}} + \rho_{\text{olio}} g \Delta h = 70660 + 750 \times 9.80665 \times 3 = 92700 \text{ Pa} .$$

Esercizio 2.3.18

Due contenitori riempiti di fluidi con massa volumica differente, $\rho_1 = 920 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_2 = 850 \text{ kg/m}^3$, sono collegati fra loro mediante un manometro differenziale a mercurio con $\rho_M = 13595 \text{ kg/m}^3$. Si sa che: $\Delta h = 0.2$ m, $h_1 = 0.25$ m e $h_2 = 0.35$ m. Calcolare la differenza di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ fra i fondi dei due contenitori.



Non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10) perché i due rami del manometro differenziale non sono collegati allo stesso fluido attivo; dalla legge di Stevin (2.7), applicata nella posizione (A) del ramo di sinistra del manometro differenziale, si ha

$$p_A = p_1 - \rho_1 g \left(h_1 - \frac{\Delta h}{2} \right)$$

e, applicata nella posizione (B) del ramo di destra, si ha

$$p_B = p_2 - \rho_2 g \left(h_2 + \frac{\Delta h}{2} \right) ;$$

perciò la differenza di pressione fra queste due posizioni diventa

$$p_A - p_B = \left[p_1 - \rho_1 g \left(h_1 - \frac{\Delta h}{2} \right) \right] - \left[p_2 - \rho_2 g \left(h_2 + \frac{\Delta h}{2} \right) \right] = (p_1 - p_2) - g (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) + g (\rho_1 + \rho_2) \frac{\Delta h}{2} .$$

La stessa differenza di pressione, calcolata all'interno del fluido manometrico, è

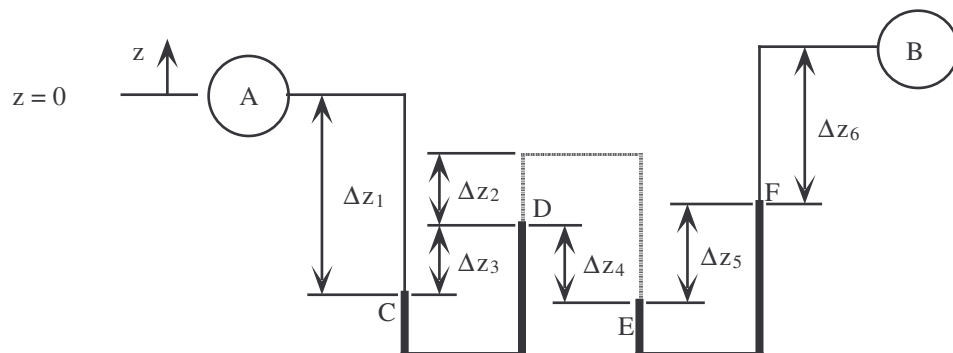
$$p_A - p_B = \rho_M g \Delta h .$$

Uguagliando le due differenze, si ottiene

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2) - g (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) + g (\rho_1 + \rho_2) \frac{\Delta h}{2} &= \rho_M g \Delta h \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad p_1 - p_2 &= g (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) + \rho_M g \Delta h \left(1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2 \rho_M} \right) = \\ &= 9.80665 \times (900 \times 0.25 - 850 \times 0.35) + 13595 \times 9.80665 \times 0.2 \times \left(1 - \frac{920 + 850}{2 \times 13595} \right) = \\ &= 9.80665 \times [-67.5 + 2542] = 24300 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Esercizio 2.3.19

Attraverso i tubi A e B visti in sezione scorre acqua di massa volumica $\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3$, mentre olio di massa volumica $\rho_o = 800 \text{ kg/m}^3$ si trova nella U rovesciata del manometro e mercurio di massa volumica $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$ si trova nelle parti inferiori del manometro. Si sa che: $\Delta z_1 = 25.5 \text{ cm}$, $\Delta z_2 = 9 \text{ cm}$, $\Delta z_3 = 9 \text{ cm}$, $\Delta z_4 = 10 \text{ cm}$, $\Delta z_5 = 12.5 \text{ cm}$ e $\Delta z_6 = 20 \text{ cm}$. Calcolare la differenza di pressione $p_A - p_B$ fra i due tubi.



Data la complessità del sistema, non è possibile utilizzare la legge del manometro differenziale (2.10); dalla legge di Stevin (2.7) applicata fra i vari punti di riferimento del sistema si ha

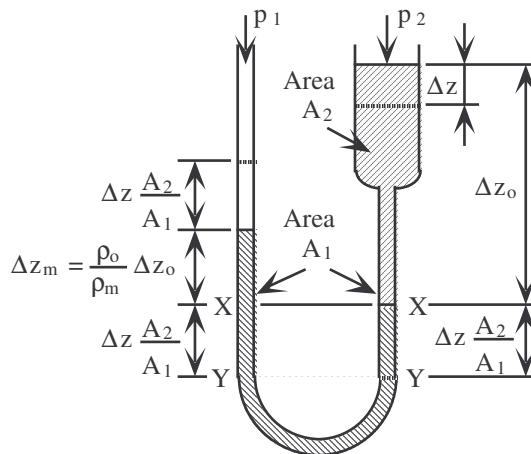
$$\begin{aligned}
 p_A - p_C &= -\rho_a g (z_A - z_C) = -\rho_a g \Delta z_1 = -1000 \times 9.80665 \times 25.5 \times 10^{-2} = -2501 \text{ Pa} \\
 p_C - p_D &= -\rho_m g (z_C - z_D) = -\rho_m g (-\Delta z_3) = -13595 \times 9.80665 \times (-9 \times 10^{-2}) = 12000 \text{ Pa} \\
 p_D - p_E &= -\rho_o g (z_D - z_E) = -\rho_o g \Delta z_4 = -800 \times 9.80665 \times 10 \times 10^{-2} = -785 \text{ Pa} \\
 p_E - p_F &= -\rho_m g (z_E - z_F) = -\rho_m g (-\Delta z_5) = -13595 \times 9.80665 \times (-12.5 \times 10^{-2}) = 16670 \text{ Pa} \\
 p_F - p_B &= -\rho_a g (z_F - z_B) = -\rho_a g (-\Delta z_6) = -1000 \times 9.80665 \times (-20 \times 10^{-2}) = 1961 \text{ Pa} \\
 p_E - p_F &= -\rho_m g (z_E - z_F) = -\rho_m g (-\Delta z_5) = -13595 \times 9.80665 \times (-12.5 \times 10^{-2}) = 16670 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 p_A - p_B &= (p_A - p_C) + (p_C - p_D) + (p_D - p_E) + (p_E - p_F) + (p_F - p_B) = \\
 &= -2501 + 12000 - 785 + 16670 + 1961 = 27400 \text{ Pa} .
 \end{aligned}$$

Esercizio 2.3.20

Un manometro, con mercurio di massa volumica $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$ e con olio di massa volumica $\rho_o = 850 \text{ kg/m}^3$, consiste in un tubo a U di diametro $D_1 = 5 \text{ mm}$ avente il ramo di destra allargato nella parte superiore ad un diametro $D_2 = 25 \text{ mm}$. Il ramo di destra contiene olio che ha la superficie libera nella porzione allargata e che ha la superficie di separazione con il mercurio al di sotto della porzione allargata; se è collegato a un serbatoio contenente gas sotto pressione, la superficie libera dell'olio cala di $\Delta z = 2 \text{ cm}$, ma rimane nella porzione allargata. Il ramo di sinistra contiene invece solo mercurio e la sua parte superiore è aperta all'atmosfera. Calcolare la pressione relativa p_2 del gas.



Quando la pressione applicata ai due rami è la stessa ($p_1 = p_2$), si supponga che la superficie di separazione fra olio e mercurio sia al livello X-X e che l'altezza dell'olio sia Δz_o . La pressione al livello X-X deve essere la stessa in entrambi i rami perché lo spazio al di sotto di questo piano è riempito di mercurio. Per il ramo di destra si ha

$$p_X = \rho_o g \Delta z_o$$

e l'altezza del mercurio Δz_m nel ramo di sinistra deve essere proporzionale a quella dell'olio rispetto alle masse volumiche

$$\Delta z_m = \frac{p_X}{\rho_m g} = \frac{\rho_o g \Delta z_o}{\rho_m g} = \frac{\rho_o}{\rho_m} \Delta z_o .$$

Quando p_2 è più grande di p_1 , la superficie libera dell'olio cala di Δz nel tubo allargato di destra e, di conseguenza, l'interfaccia fra l'olio e il mercurio nel tubo ristretto di destra si muove verso il basso di una quantità proporzionale al rapporto delle aree dei tubi $\Delta z \cdot A_2/A_1$, fino a raggiungere il livello Y-Y. Si verifica allora:

- volume di olio uscito dalla parte allargata del ramo di destra = $\Delta z A_2$;
- diminuzione di livello nella parte sottile del ramo di destra = $\Delta z \frac{A_2}{A_1}$;

c) volume di mercurio entrato nel ramo di sinistra = $\Delta z A_2$;

d) aumento di livello nel ramo di sinistra = $\Delta z \frac{A_2}{A_1}$.

Poiché tutto lo spazio al di sotto di Y-Y è riempito di mercurio, la pressione p_Y a questo livello deve essere la stessa nei due rami. Per il ramo di destra, in cui l'olio arriva fino a Y-Y, si ha

$$p_Y = p_2 + \rho_o g \left(\Delta z_o + \Delta z \frac{A_2}{A_1} - \Delta z \right) ,$$

mentre per il ramo di sinistra si ha

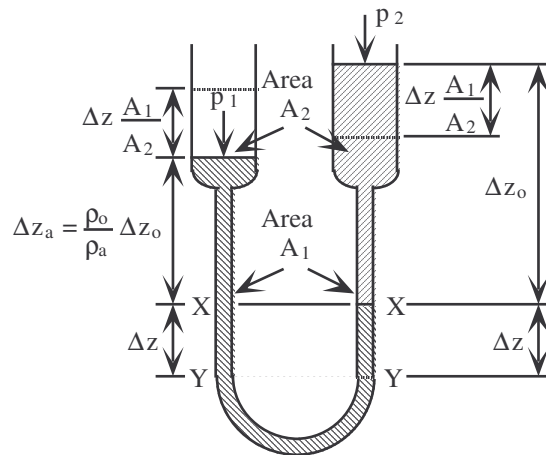
$$p_Y = p_1 + \rho_m g \left(\frac{\rho_o}{\rho_m} \Delta z_o + \Delta z \frac{A_2}{A_1} + \Delta z \frac{A_2}{A_1} \right) .$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \Delta p = p_2 - p_1 &= \rho_o g \Delta z_o + \rho_m g 2 \Delta z \frac{A_2}{A_1} - \rho_o g \Delta z_o - \rho_o g \Delta z \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) = \\ &= g \Delta z \left[2 \rho_m \frac{A_2}{A_1} - \rho_o \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) \right] = 9.80665 \times 2 \times 10^{-2} \left[2 \times 13600 \times \frac{25^2}{5^2} - 850 \times \left(\frac{25^2}{5^2} - 1 \right) \right] = 129000 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Esercizio 2.3.21

La sensibilità di un tubo a U aumenta se si allargano le estremità e se si riempie una parte di acqua ($\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3$) e l'altra di olio ($\rho_o = 950 \text{ kg/m}^3$). L'area A_2 di ogni allargamento è 50 volte l'area A_1 del tubo ($A_2/A_1 = 50$). Se la superficie di separazione fra l'olio e l'acqua si muove di $\Delta z = 25 \text{ mm}$ (nel ramo di destra da X a Y), calcolare la differenza di pressione corrispondente $\Delta p = p_2 - p_1$.



Quando la pressione applicata ai due rami è la stessa ($p_1 = p_2$), si supponga che la superficie di separazione fra olio e acqua sia al livello X-X e che l'altezza dell'olio sia Δz_o . La pressione al livello X-X deve essere la stessa in entrambi i rami perché lo spazio al di sotto di questo piano è riempito da acqua. Per il ramo di destra si ha

$$p_X = \rho_o g \Delta z_o$$

e l'altezza dell'acqua Δz_a nel ramo di sinistra deve essere proporzionale a quella dell'olio rispetto alle masse volumiche

$$\Delta z_a = \frac{p_X}{\rho_a g} = \frac{\rho_o g \Delta z_o}{\rho_a g} = \frac{\rho_o}{\rho_a} \Delta z_o .$$

Quando p_2 è più grande di p_1 , l'interfaccia fra l'olio e l'acqua si muove verso il basso nel ramo di destra di una quantità Δz fino al livello Y-Y. Si verifica allora:

- a) volume di olio uscito dalla parte allargata del ramo di destra = $\Delta z A_1$;
- b) diminuzione di livello nella parte allargata del ramo di destra = $\Delta z \frac{A_1}{A_2}$;
- c) volume di acqua entrato nella parte allargata del ramo di sinistra = $\Delta z A_1$;
- d) aumento di livello nella parte allargata del ramo di sinistra = $\Delta z \frac{A_1}{A_2}$.

Poiché tutto lo spazio al di sotto di Y–Y è riempito di acqua, la pressione p_Y a questo livello deve essere la stessa nei due rami. Per il ramo di destra, in cui l'olio arriva fino a Y–Y, si ha

$$p_Y = p_2 + \rho_o g \left(\Delta z_o + \Delta z - \Delta z \frac{A_1}{A_2} \right) ,$$

mentre per il ramo di sinistra si ha

$$p_Y = p_1 + \rho_a g \left(\frac{\rho_o}{\rho_a} \Delta z_o + \Delta z + \Delta z \frac{A_1}{A_2} \right) .$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \Delta p = p_2 - p_1 &= \rho_o g \Delta z_o + \rho_a g \Delta z \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \right) - \rho_o g \Delta z_o - \rho_o g \Delta z \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right) = \\ &= g \Delta z \left[\rho_a \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \right) - \rho_o \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right) \right] = 9.80665 \times 25 \times 10^{-3} \left[1000 \times \left(1 + \frac{1}{50} \right) - 950 \times \left(1 - \frac{1}{50} \right) \right] = 21.8 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

2.4. CORPI IMMERSI

Esercizio 2.4.1

Un corpo a forma di parallelepipedo lungo $X = 40$ cm, largo $Y = 20$ cm e alto $Z = 30$ cm in acqua dolce pesa $G' = 60$ N. Calcolare: a) il peso in aria G ; b) la massa volumica ρ_c .

- a) La spinta di Archimede (2.11.c) corrisponde al peso del volume di acqua occupato dal corpo

$$F_{pz} = \rho g V = \rho g X Y Z = 1000 \times 9.80665 \times 0.4 \times 0.2 \times 0.3 = 235.4 \text{ N}$$

e il peso in aria è dato da

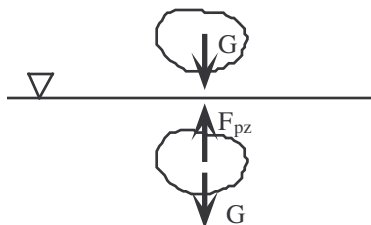
$$G = G' + F_{pz} = 60 + 235.4 = 295.4 \text{ N}.$$

- b) Dalla definizione di forza di gravità (2.3) si ha la massa volumica del corpo

$$G = m g = \rho_c V g = \rho_c X Y Z g \quad \rightarrow \quad \rho_c = \frac{G}{X Y Z g} = \frac{295.4}{0.4 \times 0.2 \times 0.3 \times 9.80665} = 1260 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Esercizio 2.4.2

Un sasso, che in aria pesa $G = 60$ N, immerso in acqua dolce pesa $G' = 33$ N. Calcolare: a) il suo volume V ; b) la sua massa volumica ρ_s ; c) l'innalzamento subito dall'acqua se il sasso viene immerso in una vasca di forma cubica di lato $L = 60$ cm.



- a) Dalla spinta di Archimede (2.11.c) si ha la differenza di peso fra aria e acqua $G - G'$ e il volume V

$$F_{pz} = G - G' = \rho g V \quad \rightarrow \quad V = \frac{G - G'}{\rho g} = \frac{60 - 33}{1000 \times 9.80665} = 2.753 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

- b) Dalla definizione di forza di gravità (2.3) si ha la massa volumica

$$G = m g = \rho_s V g \quad \rightarrow \quad \rho_s = \frac{G}{V g} = \frac{60}{2.753 \times 10^{-3} \times 9.80665} = 2220 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

- c) L'innalzamento viene calcolato nel modo seguente

$$V = L L z \quad \rightarrow \quad z = \frac{V}{L L} = \frac{2.753 \times 10^{-3}}{0.6 \times 0.6} = 0.00765 \text{ m} \approx 7.7 \text{ mm}.$$

Esercizio 2.4.3

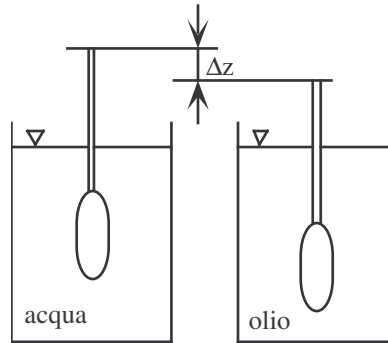
Una tavola di legno, di massa volumica $\rho_t = 500 \text{ kg/m}^3$, ha una sezione $Y = 30$ cm per $Z = 7.5$ cm. Calcolare la sua lunghezza X per sostenere in acqua di mare una persona che ha una massa $m = 45$ kg.

Nelle condizioni limite di galleggiamento i pesi della tavola G_t e della persona G_p diretti verso il basso devono equilibrare la spinta di Archimede F_{pz} diretta verso l'alto; allora, prendendo dalla tab. T.1 il valore della massa volumica dell'acqua di mare, si ha

$$\begin{aligned} G_t + G_p &= F_{pz} \quad \rightarrow \quad \rho_t V g + m g = \rho g V \quad \rightarrow \quad \rho_t X Y Z + m = \rho X Y Z \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad (\rho - \rho_t) X Y Z &= m \quad \rightarrow \quad X = \frac{m}{(\rho - \rho_t) Y Z} = \frac{45}{(1025 - 500) \times 0.30 \times 0.075} = 3.81 \text{ m}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.4.4

Un idrometro (densimetro) pesa $G = 2.5$ g e nella parte superiore ha un gambo cilindrico di diametro $d = 2.5$ mm; calcolare l'affondamento, rispetto all'acqua, all'interno di un olio lubrificante.



Poiché l'idrometro galleggia, dalla spinta d'Archimede (2.11.c) si ha il volume sommerso nel caso dell'acqua

$$G = F_{pz} = \rho_{\text{acqua}} g V_{\text{acqua}} \quad \rightarrow \quad V_{\text{acqua}} = \frac{G}{\rho_{\text{acqua}} g} = \frac{0.0025}{1000 \times 9.80665} = 0.2549 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 255 \text{ mm}^3$$

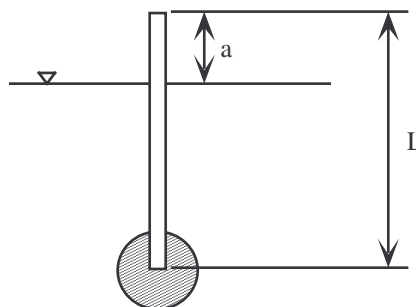
e dal volume sommerso nel caso dell'olio si trova la differenza di affondamento Δz

$$G = F_{pz} = \rho_{\text{olio}} g V_{\text{olio}} = \rho_{\text{olio}} g \left(V_{\text{acqua}} + S \Delta z \right) = \rho_{\text{olio}} g \left(V_{\text{acqua}} + \frac{\pi d^2}{4} \Delta z \right) \quad \rightarrow$$
$$\Delta z = \frac{\frac{G}{\rho_{\text{olio}} g} - V_{\text{acqua}}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{\frac{0.0025}{880 \times 9.80665} - 0.2549 \times 10^{-6}}{\frac{\pi \times 0.0025^2}{4}} = 0.007088 \text{ m} \approx 7.1 \text{ mm}$$

dove S è la sezione del tubicino di lettura dell'idrometro.

Esercizio 2.4.5

Un pezzo di legno, di massa volumica $\rho_1 = 650 \text{ kg/m}^3$, ha sezione quadrata di lato $l = 7.5 \text{ cm}$ ed è lungo $L = 1.5 \text{ m}$. Calcolare la quantità di piombo che deve essere legata ad una sua estremità affinché esso galleggi sull'acqua di mare in assetto verticale sporgendo dall'acqua per $a = 30 \text{ cm}$. Si trascura il volume del piombo.



Per l'equilibrio il peso del pezzo di legno e del pezzo di piombo deve uguagliare il peso del volume di liquido spostato dalla parte sommersa del complesso; allora dalla definizione di forza di gravità (1.4) e dalla spinta di Archimede (2.11.c) si ha

$$G = F_{pz} \quad \rightarrow \quad (m_1 + m_p)g = \rho g V \quad \rightarrow \quad \rho_1 l l L + m_p = \rho l l (L - a)$$

dove m_1 è la massa del legno, m_p è la massa del piombo, ρ_1 è la massa volumica del legno e ρ è la massa volumica dell'acqua di mare ricavata dalla tab. T.1. Con i dati del problema si ha

$$m_p = \rho l l (L - a) - \rho_1 l l L = l l [(\rho - \rho_1)L - \rho a] = 0.075 \times 0.075 \times [(1025 - 65) \times 1.5 - 1000 \times 0.3] = 1.48 \text{ kg} .$$

Esercizio 2.4.6

Calcolare la percentuale in volume di un pezzo di metallo, di massa volumica $\rho_m = 7200 \text{ kg/m}^3$, che emerge dal mercurio su cui galleggia.

Se V_t è il volume totale, V_i è il volume immerso e V_e è il volume emerso, dalla relazione di equilibrio si ha

$$G = F_{pz} \quad \rightarrow \quad \rho_m V_t g = \rho_{Hg} g V_i \quad \rightarrow \quad \rho_m V_t = \rho_{Hg} (V_t - V_e) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \rho_m V_t = \rho_{Hg} V_t - \rho_{Hg} V_e \quad \rightarrow \quad \frac{V_e}{V_t} = \frac{\rho_{Hg} - \rho_m}{\rho_{Hg}} = \frac{13595 - 7200}{13595} = 0.47 = 47 \% .$$

[Nota. Se fosse ghiaccio che galleggia su acqua dolce si avrebbe

$$\frac{V_e}{V_t} = \frac{\rho_a - \rho_g}{\rho_a} = \frac{1000 - 917}{1000} = 0.083 = 8.3 \% ,$$

mentre se galleggiasse su acqua di mare si avrebbe

$$\frac{V_e}{V_t} = \frac{\rho_a - \rho_g}{\rho_a} = \frac{1025 - 917}{1025} = 0.11 = 11 \% .$$

Da considerare la non trascurabile differenza di galleggiamento del ghiaccio in acqua dolce e in acqua di mare.]

Esercizio 2.4.7

Un cassone di metallo, lungo $X = 10$ m, largo $Y = 4$ m, alto $Z = 5$ m e pesante $G = 0.54 \times 10^6$ N galleggia su acqua dolce. Calcolare: a) l'immersione; b) il peso minimo che deve essere caricato a bordo per affondarlo.

a) In condizioni di equilibrio (galleggiamento) il peso del cassone è sostenuto dalla spinta della parte immersa; dalla spinta di Archimede (2.11.c) si ha

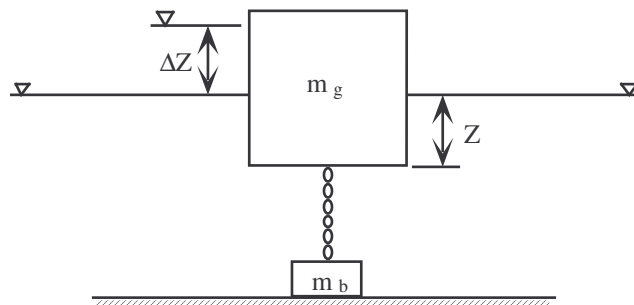
$$G = \rho g V = \rho g X Y z \quad \rightarrow \quad z = \frac{G}{\rho g X Y} = \frac{540000}{1000 \times 9.80665 \times 10 \times 4} = 1.38 \text{ m} .$$

b) Per affondare il cassone si deve caricare un peso P che vinca la spinta del volume d'acqua relativo alla rimanente altezza $Z - z$

$$P = \rho g X Y (Z - z) = 1000 \times 9.80665 \times 10 \times 4 \times (5 - 1.38) = 1.42 \times 10^6 \text{ N} .$$

Esercizio 2.4.8

Un galleggiante cubico di lato $L = 1.2$ m ha una massa $m_g = 180$ kg ed è ancorato mediante una catena di massa trascurabile ad un blocco di cemento di massa $m_b = 680$ kg. Nella configurazione normale il galleggiante è immerso per $Z = 23$ cm e il blocco è adagiato sul fondo. Calcolare: a) la forza con cui è sollecitata la catena; b) l'innalzamento dell'acqua ΔZ necessario per sollevare il blocco dal fondo.



a) Dalla spinta di Archimede (2.11.c) si ha

$$F_{pz} = \rho g V = \rho g L L Z = 1000 \times 9.80665 \times 1.2 \times 1.2 \times 0.23 = 3248 \text{ N} .$$

Questa forza equilibra il peso del galleggiante G_g e la forza F con cui è sollecitata la catena; si ha allora

$$F_{pz} = G_g + F \quad \rightarrow \quad F = F_{pz} - G_g = F_{pz} - m_g g = 3248 - 180 \times 9.80665 = 1480 \text{ N} .$$

b) Per iniziare il sollevamento dei pesi sia del galleggiante sia del blocco di cemento, la spinta deve essere almeno pari a

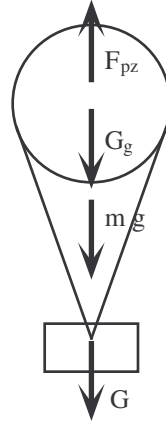
$$F_{pz} = G_g + G_b \quad \rightarrow \quad \rho g L L (Z + \Delta Z) = (m_g + m_b) g$$

e l'innalzamento del pelo libero deve essere almeno pari a

$$\Delta Z = \frac{m_g + m_b - \rho L L Z}{\rho L L} = \frac{180 + 680 - 1000 \times 1.2 \times 1.2 \times 0.23}{1000 \times 1.2 \times 1.2} = 0.367 \text{ m} .$$

Esercizio 2.4.9

Un pallone sonda senza strumentazione ha una massa $m = 50 \text{ kg}$ e, gonfiato con un gas di peso specifico $\rho_g = 0.55 \text{ kg/m}^3$, raggiunge un diametro $d = 6 \text{ m}$. Calcolare il peso G della strumentazione che può sollevare.



In condizioni di equilibrio la spinta F_{pz} diretta verso l'alto sostiene il peso del pallone $m.g$, il peso del gas G_g in esso contenuto e il peso della strumentazione G . Allora si ha

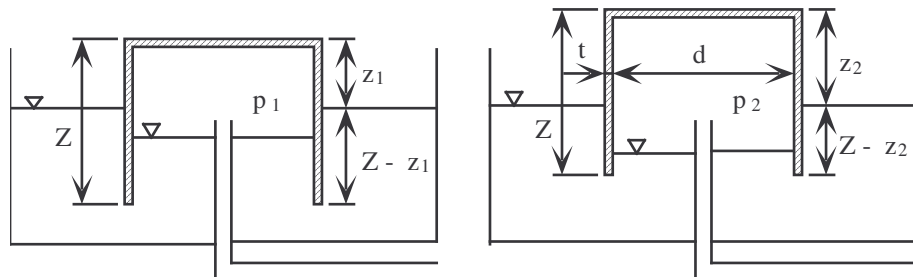
$$F_{pz} = m g + G_g + G \quad \rightarrow \quad G = \rho V g - m g - \rho_g g V = [(\rho - \rho_g) V - m] g$$

dove V è il volume del pallone e ρ è la massa volumica dell'aria tratta dalla tab. T.2 alla temperatura $T = 20^\circ \text{C}$. Con i dati del problema si ha

$$G = \left[(\rho - \rho_g) \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 - m \right] g = \left[(1.206 - 0.55) \times \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{6}{2} \right)^3 - 50 \right] \times 9.80665 = 237 \text{ N} .$$

Esercizio 2.4.10

Un manometro è costituito da una tazza cilindrica capovolta che galleggia su un liquido contenuto in un recipiente aperto all'atmosfera; la pressione che deve essere misurata giunge all'interno della camera chiusa attraverso un tubo di collegamento e viene determinata mediante l'altezza z tra la sommità emersa della tazza e il pelo libero del liquido. Calcolare la sensibilità del manometro, cioè la variazione Δz dell'altezza in funzione della variazione di pressione Δp , sapendo che il diametro della tazza è $d = 25 \text{ mm}$ e che lo spessore del suo mantello è $t = 0.25 \text{ mm}$.



La tazza cilindrica galleggia in una certa posizione per effetto dell'equilibrio fra la forza peso diretta verso il basso e le forze, dovute alla pressione interna e alla spinta di Archimede della parte di tazza immersa, dirette verso l'alto; per le due posizioni raffigurate si ha quindi

$$p_1 \frac{\pi d^2}{4} + \rho g \pi d t (Z - z_1) = p_2 \frac{\pi d^2}{4} + \rho g \pi d t (Z - z_2)$$

dove t è lo spessore medio del mantello cilindrico della tazza e d è il suo diametro. Aprendo le parentesi e semplificando si ottiene la relazione

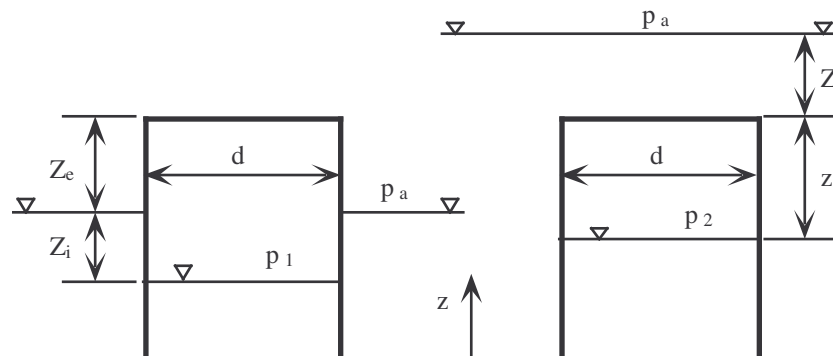
$$\rho g \pi d t (z_2 - z_1) = (p_2 - p_1) \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow \rho g t \Delta z = \Delta p \frac{d}{4}$$

e i parametri da cui dipende la sensibilità dello strumento

$$\frac{\Delta z}{\Delta p} = \frac{d}{4 \rho g t} = \frac{25 \times 10^{-3}}{4 \times 1000 \times 9.80665 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 2.55 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{Pa}} .$$

Esercizio 2.4.11

Una campana cilindrica di diametro $d = 1.2 \text{ m}$ si trova in acqua dolce, in condizioni di equilibrio, semisommersa al di sopra della superficie libera di una quantità $Z_e = 0.9 \text{ m}$ e con il pelo libero interno al di sotto di quello esterno di una quantità $Z_i = 0.3 \text{ m}$. Calcolare: a) il peso G ; b) la pressione interna p_1 . La campana viene poi spinta al di sotto della superficie libera di una quantità $Z = 3 \text{ m}$. Calcolare: c) la altezza z dell'aria nella campana; d) la pressione interna p_2 .



- a) Dalla spinta di Archimede (2.11.c), in condizioni di equilibrio, si ha

$$G = F_{pz} = \rho g V = \rho g \frac{\pi d^2}{4} \Delta Z_i = 1000 \times 9.80665 \times \frac{\pi \times 1.2^2}{4} \times 0.3 = 3330 \text{ N} .$$

- b) Dalla legge di Stevin (2.7) si ha

$$p_1 = p_a - \rho g (-\Delta Z_i) = 101325 - 1000 \times 9.80665 \times (-0.30) = 101325 + 2942 = 104300 \text{ Pa} .$$

- c) Se si ipotizza che durante l'affondamento la compressione sia isoterma, la pressione è inversamente proporzionale al volume ($p \cdot V = \text{cost}$) e quindi, data la costanza della sezione, all'altezza dell'aria nel serbatoio

$$p_1 (Z_e + Z_i) = p_2 z \rightarrow p_2 = p_1 \frac{Z_e + Z_i}{z} ; \quad (\text{A})$$

questa pressione è uguale a quella ottenibile dalla legge di Stevin (2.7)

$$p_2 = p_a - \rho g [-(Z + z)] \quad (\text{B})$$

per cui, uguagliando le due espressioni

$$p_1 (Z_e + Z_i) = [p_a + \rho g (Z + z)] z ,$$

dopo aver aperto le parentesi e dopo aver raggruppato i coefficienti si ha

$$z^2 + \left(\frac{p_a}{\rho g} + Z \right) z - \frac{p_1 (Z_e + Z_i)}{\rho g} = 0 .$$

La soluzione dell'equazione di secondo grado nell'altezza z dell'aria nel serbatoio deve essere positiva e quindi deve essere presa in considerazione quella con il segno positivo davanti al discriminante

$$z = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{p_a}{\rho g} + Z \right) + \sqrt{\left(\frac{p_a}{\rho g} + Z \right)^2 + 4 \frac{p_1 (Z_e + Z_i)}{\rho g}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{101325}{1000 \times 9.80665} + 3 \right) + \sqrt{\left(\frac{101325}{1000 \times 9.80665} + 3 \right)^2 + 4 \times \frac{104300 \times (0.9 + 0.3)}{1000 \times 9.80665}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[- (10.33 + 3) + \sqrt{(10.33 + 3)^2 + 51.05} \right] = 0.8971 \text{ m} .$$

Da notare che la pressione atmosferica p_a corrisponde ad una altezza di 10.33 m di colonna d'acqua.

d) La pressione interna può essere ottenuta o dalla (A)

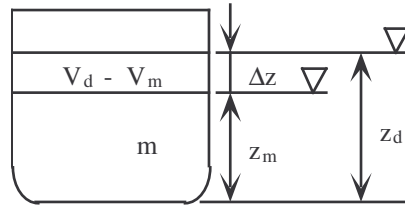
$$p_2 = p_1 \frac{Z_e + Z_i}{z} = 104300 \times \frac{0.9 + 0.3}{0.8971} \cong 139500 \text{ Pa}$$

o dalla (B)

$$p_2 = p_a - \rho g [-(Z + z)] = 101325 - 1000 \times 9.80665 \times [-(3 + 0.8971)] = 101325 + 38220 \cong 139500 \text{ Pa} .$$

Esercizio 2.4.12

Una nave ha una massa $m = 10 \times 10^6 \text{ kg}$ e pesca $z_m = 7.5 \text{ m}$ in acqua di mare; se si scarica una zavorra $m_z = 0.25 \times 10^6 \text{ kg}$, il pescaggio in acqua di mare si riduce a $z_z = 7.2 \text{ m}$ e sulla linea di galleggiamento l'area S della sezione retta della nave rimane costante. Calcolare il pescaggio z_d in acqua dolce prendendo la massa volumica dell'acqua di mare $\rho_m = 1025 \text{ kg/m}^3$ e quella dell'acqua dolce $\rho_d = 1000 \text{ kg/m}^3$.



Poiché il peso della zavorra scaricata corrisponde alla diminuzione della spinta esercitata dall'acqua di mare, è possibile dalla spinta di Archimede (2.11.c) calcolare l'area della sezione retta della nave sulla linea di galleggiamento

$$G_z = \Delta F_{pz} \quad \rightarrow \quad m_z g = \rho_m g S (z_m - z_z) \quad \rightarrow \quad S = \frac{m_z}{\rho_m (z_m - z_z)} = \frac{250000}{1025 \times (7.5 - 7.2)} = 813 \text{ m}^2 ;$$

passando poi da acqua di mare ad acqua dolce, la spinta che tiene in equilibrio la nave deve avere lo stesso valore e di conseguenza impegna volumi differenti data la diversità delle masse volumiche dei fluidi

$$m g = \rho_m g V_m \quad \rightarrow \quad V_m = \frac{m}{\rho_m} = \frac{10000000}{1025} = 9756 \text{ m}^3$$

$$m g = \rho_d g V_d \quad \rightarrow \quad V_d = \frac{m}{\rho_d} = \frac{10000000}{1000} = 10000 \text{ m}^3 .$$

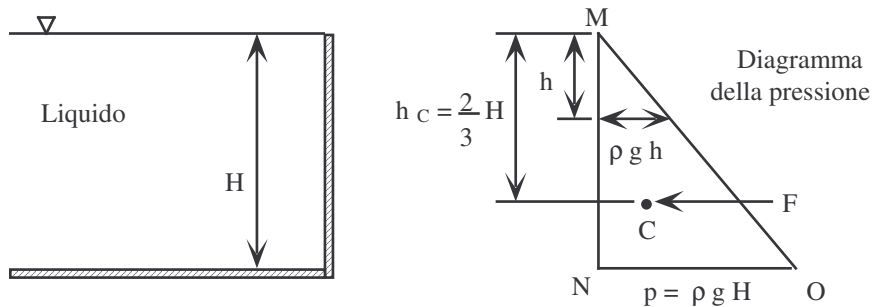
Il maggior volume di acqua dolce rispetto a quello di acqua di mare costituisce quindi l'aumento del pescaggio

$$z_d = z_m + \Delta z = z_m + \frac{V_d - V_m}{S} = 7.5 + \frac{10000 - 9756}{813} = 7.5 + 0.3 = 7.8 \text{ m} .$$

2.5. SPINTA IDROSTATICA E CENTRO DI SPINTA

Esercizio 2.5.1

Una faccia di un serbatoio rettangolare è larga $B = 1.5 \text{ m}$ e alta $H = 2 \text{ m}$. Il serbatoio è completamente riempito di olio di massa volumica $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$. Trovare la spinta idrostatica F sulla faccia verticale e la profondità del suo centro di pressione rispetto alla sommità superiore.



La legge di Stevin (2.7) fra la pressione p e la profondità h è

$$p = \rho g h = \gamma h$$

ed è mostrata graficamente nella figura; essa è un triangolo in cui la coordinata verticale rappresenta la profondità e la coordinata orizzontale rappresenta la intensità della pressione.

L'area del diagramma è il prodotto della profondità [m] e della pressione [N/m^2] e rappresenta, in scala, la forza risultante per unità di larghezza $f = F/B$ [N/m] gravante sulla superficie immersa normale al diagramma.

Se H è l'altezza del liquido e se la superficie immersa si estende dalla superficie libera fino al fondo del serbatoio, il diagramma della pressione è il triangolo $S \equiv MNO$ e quindi

$$f = \frac{F}{B} = S = \frac{1}{2} NO \times MN = \frac{1}{2} \rho g H \times H = \frac{1}{2} \rho g H^2$$

Con i dati del problema si ha:

$$f = \frac{1}{2} \rho g H^2 = \frac{1}{2} \times 920 \times 9.80665 \times 2^2 = 18040 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

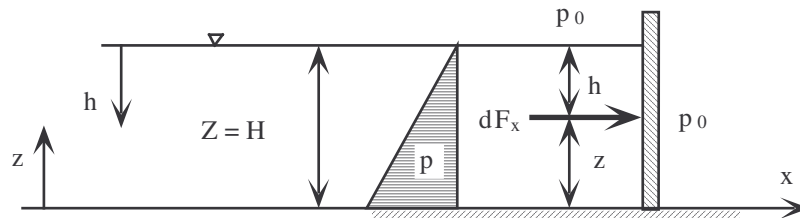
$$F = f B = 18040 \times 1.5 = 27100 \text{ N} = 27.1 \text{ kN}$$

La risultante F passa attraverso il centro di area C del diagramma della pressione che si trova dal punto M ad una distanza pari a

$$h = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \times 2 = 1.33 \text{ m}$$

Esercizio 2.5.2

Una diga lunga $Y = 1.5 \text{ m}$ crea un bacino in cui l'acqua raggiunge un'altezza Z o una profondità H pari a $Z = H = 3 \text{ m}$ a seconda che si prenda la coordinata z diretta verso l'alto o la coordinata h diretta verso il basso; calcolare la forza totale esercitata dall'acqua sulla superficie della diga.



Poiché sulla faccia sinistra della diga agisce la pressione generica p maggiore di quella (atmosferica) p_0 agente sulla faccia di destra, la differenza di pressione, a seconda che si consideri la altezza o la profondità dell'acqua, è data dalla legge di Stevin (2.7)

$$\Delta p = p - p_0 = \begin{aligned} & -\rho g (z - z_0) = \rho g (Z - z) \\ & +\rho g (h - h_0) = \rho g h \end{aligned}$$

e la relativa forza infinitesima è data dalla forza idrostatica dF_x in direzione perpendicolare alla diga (2.12)

$$dF_x = \Delta p \, dS = \frac{\Delta p \, Y \, dz}{\Delta p \, Y \, dh} = \rho \, g \, Y \, (Z - z) \, dz$$

Di conseguenza la forza totale agente sulla diga, a seconda che si consideri la altezza o la profondità dell'acqua, è data rispettivamente da

$$F_x = \int_S dF_x = \int_0^Z \rho \, g \, Y \, (Z - z) \, dz = \rho \, g \, Y \, Z \int_0^Z dz - \rho \, g \, Y \int_0^Z z \, dz = \rho \, g \, Y \, Z^2 - \rho \, g \, Y \, \frac{Z^2}{2} = \rho \, g \, Y \, \frac{Z^2}{2}$$

$$F_x = \int_S dF_x = \int_0^H \rho \, g \, Y \, h \, dh = \rho \, g \, Y \int_0^H h \, dh = \rho \, g \, Y \, \frac{H^2}{2}$$

Con i dati del problema si ha il valore numerico della spinta in direzione orizzontale

$$F_x = \rho \, g \, Y \, \frac{Z^2}{2} = \rho \, g \, Y \, \frac{H^2}{2} = 1000 \times 9.80665 \times 1.5 \times \frac{3^2}{2} = 66200 \, \text{N} \cong 66 \, \text{kN}$$

[Nota. Si sarebbe ottenuto lo stesso risultato nel seguente modo:

a) calcolando dapprima la pressione idrostatica a livello del pelo libero p_1 ($z = Z$, $h = 0$) ed alla base della diga p_2 ($z = 0$, $h = H$)

$$p_1 = 0 \quad p_2 = -\rho \, g \, (-Z) = \rho \, g \, H = 1000 \times 9.80665 \times 3 = 29420 \, \text{Pa}$$

b) calcolando poi la media delle due pressioni (in questo caso la metà di quella corrispondente alla profondità H perché si prende in considerazione solo la pressione idrostatica)

$$p_m = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{0 + 29420}{2} = 14710 \, \text{Pa}$$

c) moltiplicando infine la pressione media per l'area

$$F_m = p_m \, Y \, Z = p_m \, Y \, H = 14710 \times 1.5 \times 3 = 66200 \, \text{Pa}$$

La posizione della retta d'azione, a seconda che si consideri la altezza o la profondità dell'acqua, è data dalla relazione (2.13); rispettivamente si ha

$$z_F = \frac{\int_S z \, dF_x}{F_x} = \frac{\rho \, g \, Y \int_0^Z (Z - z) \, z \, dz}{\rho \, g \, Y \, \frac{Z^2}{2}} = \frac{\frac{Z^3}{2} - \frac{Z^3}{3}}{\frac{Z^2}{2}} = \frac{\frac{Z^3}{6}}{\frac{Z^2}{2}} = \frac{1}{3} Z = \frac{1}{3} 3 = 1 \, \text{m}$$

(partendo dal basso) dove si è fatto ricorso alla relazione che dà F_x in funzione dell'altezza z e

$$h_F = \frac{\int_S h \, dF_x}{F_x} = \frac{\rho \, g \, Y \int_0^H h^2 \, dh}{\rho \, g \, Y \, \frac{H^2}{2}} = \frac{\frac{H^3}{3}}{\frac{H^2}{2}} = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} 3 = 2 \, \text{m}$$

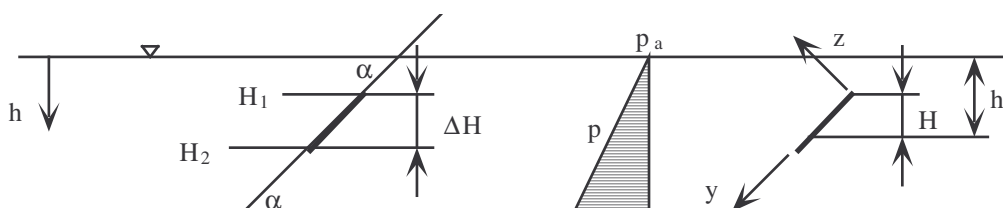
(partendo dall'alto) dove si è fatto ricorso alla relazione che dà F_x in funzione alla profondità h .

[Nota. Si sarebbe ottenuto lo stesso risultato calcolando la posizione del baricentro del triangolo della pressione idrostatica

$$h_F = \frac{2}{3} Z = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} 3 = 2 \, \text{m}$$

Esercizio 2.5.3

Una parete inclinata dell'angolo $\alpha = 45^\circ$ è larga $X = 1.2 \, \text{m}$ ed è situata fra le profondità $H_1 = 1.5 \, \text{m}$ e $H_2 = 3.5 \, \text{m}$; calcolare la forza totale esercitata da un olio di massa volumica $\rho = 900 \, \text{kg/m}^3$.



Per determinare in modo completo la forza, si deve specificarne la grandezza, la retta d'azione e il verso.

Considerando la parete inclinata giacente sul piano (x - y), la grandezza della forza idrostatica F_z (2.12) lungo la coordinata z vale

$$F_z = - \int_S \Delta p \, dS = - \int_S \Delta p \, dx \, dy$$

dove Δp è la differenza di pressione fra la faccia interna e quella esterna del serbatoio. Per effettuare la integrazione è necessario trovare la differenza di pressione in funzione della coordinata y; questo risultato si ottiene sostituendo la relazione

$$h = H_1 + H = H_1 + y \sin \alpha ,$$

in cui si è applicata la trasformazione di coordinate

$$H = y \sin \alpha \quad \rightarrow \quad y = \frac{H}{\sin \alpha}$$

nella legge di Stevin (2.7)

$$p = p_a + \rho g h = p_a + \rho g (H_1 + y \sin \alpha) ,$$

e osservando che dalla parte opposta della parete agisce la pressione atmosferica p_a

$$\Delta p = p - p_a = \rho g (H_1 + y \sin \alpha) .$$

Si ottiene allora una forza pari a

$$\begin{aligned} F_z &= - \int_0^X \int_0^{\Delta H / \sin \alpha} \Delta p \, dx \, dy = - \rho g \int_0^X dx \int_0^{\Delta H / \sin \alpha} (H_1 + y \sin \alpha) dy = \\ &= - \rho g \left[x \right]_0^X \left[H_1 y + \frac{y^2}{2} \sin \alpha \right]_0^{\Delta H / \sin \alpha} = - \rho g X \left(H_1 \frac{\Delta H}{\sin \alpha} + \frac{\Delta H^2 / \sin^2 \alpha}{2} \sin \alpha \right) = \\ &= - \rho g X \left[\frac{\Delta H}{\sin \alpha} \left(H_1 + \frac{\Delta H}{2} \right) \right] = - 900 \times 9.80665 \times 1.2 \times \left[\frac{2}{\sin(45^\circ)} \times \left(1.5 + \frac{2}{2} \right) \right] = - 74890 \, \text{N} \end{aligned}$$

ed un verso diretto in senso contrario all'asse z (per effetto del segno negativo).

[Nota. Si sarebbe ottenuto lo stesso risultato nel seguente modo:

a) calcolando la pressione idrostatica alla profondità H_1 e alla profondità H_2

$$p_1 = \rho g H_1 = 900 \times 9.80665 \times 1.5 = 13240 \, \text{Pa} \quad p_2 = \rho g H_2 = 900 \times 9.80665 \times 3.5 = 30890 \, \text{Pa}$$

b) calcolando la media delle due pressioni

$$p_m = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{13240 + 30890}{2} = 22070 \, \text{Pa}$$

c) moltiplicando la pressione media per l'area

$$F_z = p_m X \frac{\Delta H}{\sin \alpha} = 22070 \times 1.2 \times \frac{2}{\sin(45^\circ)} = 74890 \, \text{N}$$

c') moltiplicando la pressione media per la proiezione dell'area sul piano verticale e riproiettando la forza orizzontale così ottenuta in direzione perpendicolare all'area

$$F_o = p X \Delta H = 22070 \times 1.2 \times 2 = 52960 \, \text{N} \quad , \quad F_z = \frac{F_o}{\sin \alpha} = \frac{52960}{\sin(45^\circ)} = 74890 \, \text{N} .]$$

La posizione della retta d'azione è data dalla relazione (2.13). Considerando i momenti attorno all'asse x si ha

$$y_F | F_z | = \int_S y \Delta p \, dS$$

e quindi

$$\begin{aligned} y_F &= \frac{1}{|F_z|} \int_0^X \int_0^{\Delta H / \sin \alpha} y \Delta p \, dx \, dy = \frac{\rho g}{|F_z|} \int_0^X dx \int_0^{\Delta H / \sin \alpha} y (H_1 + y \sin \alpha) dy = \\ &= \frac{\rho g}{|F_z|} \left[x \right]_0^X \left[H_1 \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \sin \alpha \right]_0^{\Delta H / \sin \alpha} = \frac{\rho g X}{|F_z|} \left(H_1 \frac{\Delta H^2 / \sin^2 \alpha}{2} + \frac{\Delta H^3 / \sin^3 \alpha}{3} \sin \alpha \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho g X}{|F_z|} \left[\frac{\Delta H^2}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{H_1}{2} + \frac{\Delta H}{3} \right) \right] = \frac{900 \times 9.80665 \times 1.2}{74890} \times \left[\frac{2^2}{\sin^2(45^\circ)} \times \left(\frac{1.5}{2} + \frac{2}{3} \right) \right] = 1.60 \text{ m} .$$

Considerando invece i momenti attorno all'asse y si ha

$$x_F |F_z| = \int_S x \Delta p dS$$

e quindi

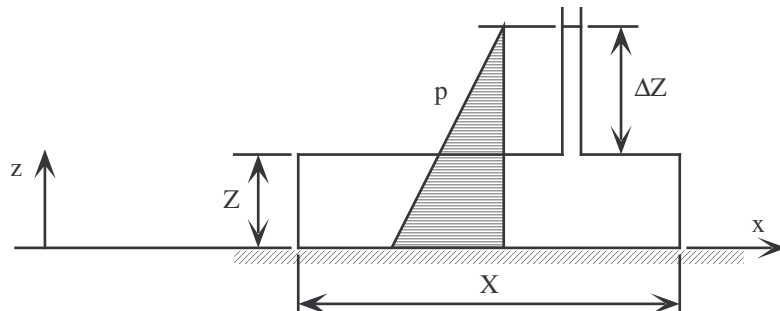
$$\begin{aligned} x_F &= \frac{1}{|F_z|} \int_0^X \int_0^{\Delta H/\sin \alpha} x \Delta p dx dy = \frac{\rho g}{|F_z|} \int_0^X dx \int_0^{\Delta H/\sin \alpha} y (H_1 + y \sin \alpha) dy = \\ &= \frac{\rho g}{|F_z|} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^X \left[H_1 y + \frac{y^2}{2} \sin \alpha \right]_0^{\Delta H/\sin \alpha} = \frac{\rho g}{|F_z|} \frac{X^2}{2} \left(H_1 \frac{\Delta H}{\sin \alpha} + \frac{\Delta H^2 / \sin^2 \alpha}{2} \sin \alpha \right) = \\ &= \frac{\rho g}{\rho g X \left[\frac{\Delta H}{\sin \alpha} \left(H_1 + \frac{\Delta H}{2} \right) \right]} \frac{X^2}{2} \left[\frac{\Delta H}{\sin \alpha} \left(H_1 + \frac{\Delta H}{2} \right) \right] = \frac{X}{2} = \frac{1.2}{2} = 0.60 \text{ m} . \end{aligned}$$

La retta d'azione $\vec{f}$ della forza F_z è allora data da

$$\vec{f} = x_F \vec{i} + y_F \vec{j} = 0.60 \vec{i} + 1.6 \vec{j}$$

Esercizio 2.5.4

Nel tubo, di diametro $d = 35$ cm e collegato ad un serbatoio lungo $X = 6$ m, largo $Y = 2.4$ m e alto $Z = 1.8$ m, l'acqua sale fino all'altezza $\Delta Z = 3.6$ m. Trascurando il peso del serbatoio e del tubo calcolare: a) le forze idrostatiche sulle pareti laterali del serbatoio; b) la forza agente sul fondo del serbatoio; c) il peso totale dell'acqua. Infine: d) confrontare e commentare i risultati ottenuti nei punti b, c.



Dalla legge di Stevin (2.7) si hanno i valori della pressione all'altezza della parte superiore p_1 e della parte inferiore del serbatoio p_2

$$p_1 = \rho g \Delta Z = 1000 \times 9.80665 \times 3.6 = 35300 \text{ Pa}$$

$$p_2 = \rho g (\Delta Z + Z) = 1000 \times 9.80665 \times (3.6 + 1.8) = 52960 \text{ Pa}$$

il valore medio agente sulle pareti laterali vale quindi

$$p_m = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{35300 + 52960}{2} = 44130 \text{ Pa} .$$

Di conseguenza:

a) le spinte sulle pareti laterali, che a due a due si fanno equilibrio in direzione x e in direzione y rispettivamente, valgono

$$F_x = p_m Y Z = 44130 \times 2.4 \times 1.8 = 190600 \text{ N} \cong 191 \text{ kN}$$

$$F_y = p_m X Z = 44130 \times 6.0 \times 1.8 = 476600 \text{ N} \cong 477 \text{ kN} ,$$

b) la forza agente sul fondo del serbatoio vale

$$F_z = p_2 X Z = 52960 \times 6.0 \times 2.4 = 762600 \text{ N} \cong 763 \text{ kN} ,$$

c) il peso totale dell'acqua contenuta nel volume del serbatoio V_s e del tubo V_t è invece

$$G = \rho g (V_s + V_t) = \rho g \left(X Y Z + \frac{\pi d^2}{4} \Delta Z \right) = 1000 \times 9.80665 \times \left(6.0 \times 2.4 \times 1.8 + \frac{\pi \times 0.35^2}{4} \times 3.6 \right) = 257600 \text{ N} \cong 258 \text{ kN} .$$

d) Considerando il serbatoio come un corpo isolato, si nota che la reazione del terreno $R = 258 \text{ kN}$ (diretta verso l'alto), contrastante la forza peso dell'acqua, non riesce ad equilibrare la spinta $F_z = 763 \text{ kN}$ (diretta verso il basso); per l'equilibrio lungo la z bisogna infatti considerare anche la spinta S che riceve la parete superiore del serbatoio (diretta verso l'alto)

$$S = p_1 \left(X Y - \frac{\pi d^2}{4} \right) = 35300 \times \left(6.0 \times 2.4 - \frac{\pi \times 0.35^2}{4} \right) = 505000 \text{ N} \cong 505 \text{ kN}$$

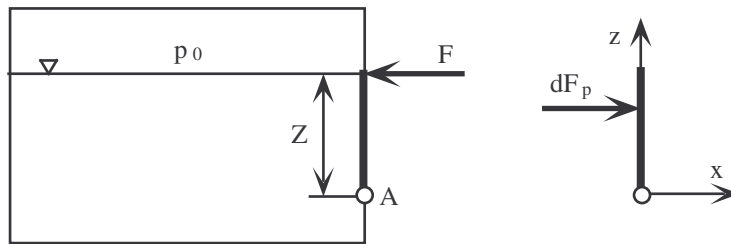
in conclusione si ha

$$\begin{array}{rcl} \text{forze verso il basso} & = & \text{forze verso l'alto} \\ F_z & = & S + G \\ 763 & = & 505 + 258 \end{array}$$

In altre parole la pressione idrostatica, e quindi le spinte ad essa relative, sono dovute non al peso reale del fluido sovrastante (G), ma a quello "immaginario" che potrebbe esserci in base all'altezza piezometrica ($Z + \Delta Z$) provocata anche da un tubo di diametro modesto d .

Esercizio 2.5.5

Il portellone, situato su una faccia di un serbatoio, è largo $Y = 60 \text{ cm}$, è alto $Z = 1 \text{ m}$ ed è incernierato sulla sua estremità inferiore. Se sulla superficie libera del fluido è applicata una pressione $p_0 = 5000 \text{ Pa}$ e se il fluido ha una massa volumica $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$, calcolare la forza F richiesta per tenere il portellone chiuso.



Dalla relazione della spinta idrostatica (2.12), facendo l'equilibrio dei momenti attorno all'asse y passante per A , si ottiene

$$Z F - \int_A z dF_p = 0 \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{Z} \int_A z dF_p = \frac{1}{Z} \int_A z p dA = \frac{1}{Z} \int_0^Z z p Y dz$$

dove dF_p è la forza infinitesima dovuta alla spinta del fluido; per calcolare il valore dell'integrale, prima si trova dalla legge di Stevin (2.7) la pressione in funzione dell'altezza

$$p = p_0 - \rho g (z - Z)$$

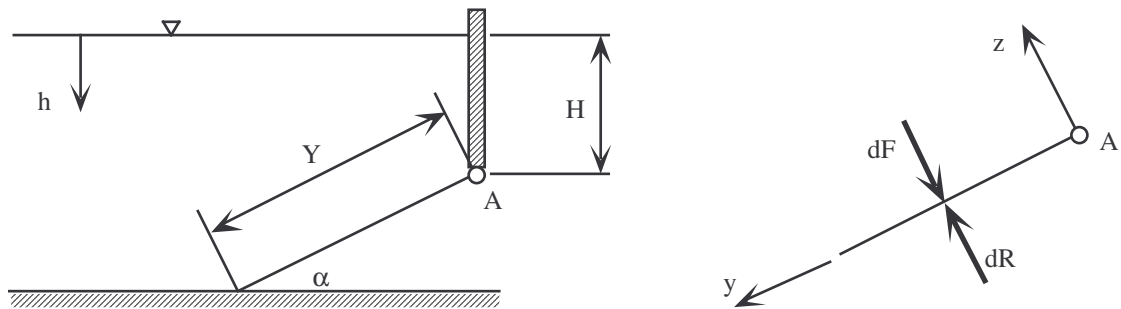
e poi la si sostituisce nell'equazione di equilibrio

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{Z} \int_0^Z z p Y dz = \frac{1}{Z} \int_0^Z z [p_0 - \rho g (z - Z)] Y dz = \frac{1}{Z} \left[\int_0^Z p_0 Y z dz - \int_0^Z \rho g Y (z - Z) z dz \right] = \\ &= \frac{Y}{Z} \left\{ p_0 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^Z - \rho g \left[\frac{z^3}{3} - Z \frac{z^2}{2} \right]_0^Z \right\} = \frac{Y}{Z} \left[\frac{p_0 Z^2}{2} - \rho g \left(\frac{Z^3}{3} - \frac{Z^3}{2} \right) \right] = Y Z \left(\frac{p_0}{2} + \frac{\rho g Z}{6} \right) = \\ &= 0.6 \times 1 \times \left(\frac{5000}{2} + \frac{1600 \times 9.80665 \times 1}{6} \right) = 3069 \text{ N} . \end{aligned}$$

Esercizio 2.5.6

Un portellone è inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$, è alto $Y = 4 \text{ m}$, è largo $X = 5 \text{ m}$ ed è incernierato lungo A ad una profondità $H = 2 \text{ m}$. Calcolare la reazione alla spinta provocata dall'acqua per effetto della differenza di

pressione fra le due facce del portellone.



Considerando la parete inclinata giacente sul piano $(x - y)$, la grandezza della forza idrostatica (2.12) lungo la coordinata z vale

$$R_z = -F_z = \int_S \Delta p \, dS = \int_S \Delta p \, dx \, dy$$

dove Δp è la differenza di pressione fra le due facce del portellone. Per effettuare l'integrazione è necessario trovare la differenza di pressione in funzione della coordinata y ; questo risultato si ottiene sostituendo la relazione

$$h = H + y \sin \alpha$$

nella legge di Stevin (2.7)

$$p = p_a + \rho g h = p_a + \rho g (H + y \sin \alpha)$$

e osservando che dalla parte opposta della paratia vige la pressione atmosferica p_a

$$\Delta p = p - p_a = \rho g (H + y \sin \alpha) .$$

Si perviene allora a

$$\begin{aligned} R_z &= \int_0^X \int_0^Y \Delta p \, dx \, dy = \rho g \int_0^X dx \int_0^Y (H + y \sin \alpha) \, dy = \rho g \left[x \right]_0^X \left[H y + \frac{y^2}{2} \sin \alpha \right]_0^Y = \\ &= \rho g X \left(H Y + \frac{Y^2}{2} \sin \alpha \right) = 1000 \times 9.80665 \times 5 \times \left(2 \times 4 + \frac{16}{2} 0.5 \right) = 588300 \, \text{N} . \end{aligned}$$

La posizione della retta d'azione è data dalla relazione (2.13). Considerando i momenti attorno all'asse x si ha

$$y_R |R_z| = \int_S y \Delta p \, dS$$

e quindi

$$\begin{aligned} y_R &= \frac{1}{|R_z|} \int_0^X \int_0^Y y \Delta p \, dx \, dy = \frac{\rho g}{|R_z|} \int_0^X dx \int_0^Y y (H + y \sin \alpha) \, dy = \frac{\rho g}{|R_z|} \left[x \right]_0^X \left[H \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \sin \alpha \right]_0^Y = \\ &= \frac{\rho g X}{|R_z|} \left(H \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} \sin \alpha \right) = \frac{1000 \times 9.80665 \times 5}{588300} \times \left(\frac{2 \times 4^2}{2} + \frac{4^3}{3} 0.5 \right) = 2.22 \, \text{m} . \end{aligned}$$

Considerando invece i momenti rispetto all'asse y si ha

$$x_R |R_z| = \int_S x \Delta p \, dS$$

e quindi

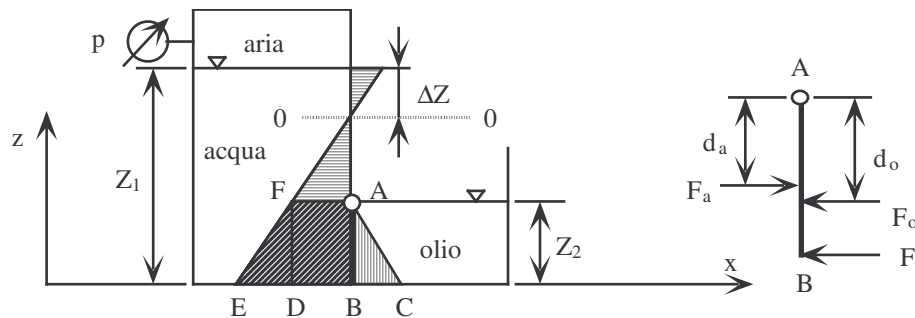
$$\begin{aligned} x_R &= \frac{1}{|R_z|} \int_0^X \int_0^Y x \Delta p \, dx \, dy = \frac{\rho g}{|R_z|} \int_0^X x \, dx \int_0^Y (H + y \sin \alpha) \, dy = \frac{\rho g}{|R_z|} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^X \left[H y + \frac{y^2}{2} \sin \alpha \right]_0^Y = \\ &= \frac{\rho g}{\rho g X \left(H Y + \frac{Y^2}{2} \sin \alpha \right)} \frac{X^2}{2} \left(H Y + \frac{Y^2}{2} \sin \alpha \right) = \frac{X}{2} = \frac{5}{2} = 2.50 \, \text{m} . \end{aligned}$$

La retta d'azione $\vec{r}$ della forza R_z è allora data da

$$\vec{r} = x_R \vec{i} + y_R \vec{j} = 2.50 \vec{i} + 2.22 \vec{j} .$$

Esercizio 2.5.7

Il portellone, situato sul setto di separazione fra la parte di destra e la parte di sinistra di un serbatoio, è alto $Z_2 = 1.8$ m, è largo $Y = 1.2$ m ed è incernierato sulla sua estremità superiore. Nel caso in cui il serbatoio a destra sia aperto e contenga olio con massa volumica $\rho_o = 750$ kg/m³ e a sinistra sia chiuso e contenga un'altezza d'acqua pari a $Z_1 = 5.4$ m con una depressione $p = -0.15$ bar rispetto alla pressione atmosferica, calcolare la forza orizzontale F da applicare all'estremità B del portellone per tenerlo in equilibrio.



Per effettuare l'equilibrio dei momenti agenti sul portellone rispetto all'asse x passante per A si devono conoscere le spinte idrostatiche e le loro rette d'azione.

Per quanto riguarda l'olio, la spinta è uguale a

$$F_o = p_{mo} Y Z_2 = \frac{\rho_o g Z_2}{2} Y Z_2 = \frac{750 \times 9.80665 \times 1.8}{2} \times 1.2 \times 1.8 = 14300 \text{ N}$$

e la sua retta di applicazione, passante attraverso il baricentro del parallelepipedo triangolare ABC formato dalla pressione, si trova alla distanza

$$d_o = \frac{2}{3} Z_2 = \frac{2}{3} \times 1.8 = 1.20 \text{ m}$$

dal punto A.

Invece per quanto riguarda l'acqua, la pressione nei punti A e B vale rispettivamente

$$p_A = p + \rho_a g (Z_1 - Z_2) = -15000 + 1000 \times 9.80665 \times (5.4 - 1.8) = 20300 \text{ Pa}$$

$$p_B = p + \rho_a g Z_1 = -15000 + 1000 \times 9.80665 \times 5.4 = 37960 \text{ Pa} ,$$

la pressione media vale

$$p_{ma} = \frac{p_A + p_B}{2} = \frac{20300 + 37960}{2} = 29130 \text{ Pa} ,$$

la spinta vale

$$F_a = p_{ma} Y Z_2 = 29130 \times 1.2 \times 1.8 = 62920 \text{ N}$$

e la sua retta di applicazione, passante attraverso il baricentro del parallelepipedo quadrangolare ABEF formato dalla pressione, si trova alla distanza d_a . Il valore di d_a è determinato dall'equilibrio fra il momento statico del trapezio ABEF e la somma dei momenti statici delle due parti che lo compongono, quella rettangolare ABDE e quella triangolare FDE, rispetto all'asse x passante per A; si ha allora

$$\begin{aligned} S_{ABEF} d_a &= S_{ABDE} \frac{1}{2} Z_2 + S_{FDE} \frac{2}{3} Z_2 \quad \rightarrow \quad d_a = \frac{S_{ABDE} \frac{1}{2} Z_2 + S_{FDE} \frac{2}{3} Z_2}{S_{ABDE} + S_{FDE}} = \\ &= \frac{p_A Z_2 \frac{1}{2} Z_2 + \frac{1}{2} (p_B - p_A) Z_2 \frac{2}{3} Z_2}{p_A Z_2 + \frac{1}{2} (p_B - p_A) Z_2} = Z_2 \frac{\frac{1}{2} p_A + \frac{1}{3} p_B - \frac{1}{3} p_A}{p_A + \frac{1}{2} p_B - \frac{1}{2} p_A} = \end{aligned}$$

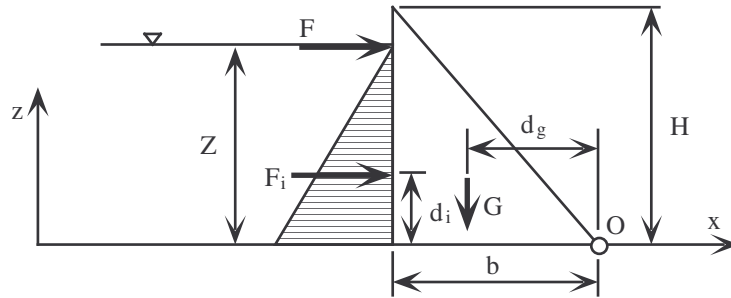
$$= Z_2 \frac{\frac{1}{6} p_A + \frac{1}{3} p_B}{\frac{1}{2} (p_A + p_B)} = 1.8 \times \frac{\frac{1}{6} \times 20300 + \frac{1}{3} \times 37960}{\frac{1}{2} \times (29130 + 37960)} = 0.9910 \text{ m} .$$

Per l'equilibrio, la forza F deve essere tale che

$$F_a d_a = F_o d_o + F Z_2 \quad \rightarrow \quad F = \frac{F_a d_a - F_o d_o}{Z_2} = \frac{62920 \times 0.9910 - 14300 \times 1.20}{1.8} = 25100 \text{ N} .$$

Esercizio 2.5.8

Una diga a gravità, lunga $Y = 150 \text{ m}$ e alta $H = 30 \text{ m}$, è sottoposta alla spinta dei ghiacci $f = 0.19 \text{ MN}$ per ogni metro di lunghezza e alla spinta idrostatica F_i dell'acqua alta $Z = 25 \text{ m}$. Se la massa volumica del cemento è $\rho_c = 2500 \text{ kg/m}^3$, calcolare il valore minimo della base b affinché la diga non ruoti attorno al punto O.



La spinta totale dei ghiacci è data da

$$F = f Y = 190000 \times 150 = 28.50 \times 10^6 \text{ N} = 28.5 \text{ MN}$$

ed è applicata all'altezza del pelo libero, mentre la spinta idrostatica è data da

$$F_i = p_m Y Z = \frac{\rho_a g Z}{2} Y Z = \frac{1000 \times 9.80665 \times 30}{2} \times 150 \times 30 = 661.9 \times 10^6 \text{ N} \cong 662 \text{ MN}$$

ed è applicata ad una distanza dal terreno pari a

$$d_i = \frac{1}{3} Z = \frac{1}{3} \times 25 = 8.333 \text{ m} .$$

Il peso della diga è dato da

$$G = \rho_c V = \rho_c \frac{b Y}{2} = 2500 \times \frac{b \times 150 \times 30}{2} = 5.625 \times 10^6 b$$

ed è applicato alla distanza

$$d_g = \frac{2}{3} b$$

dall'asse passante per O.

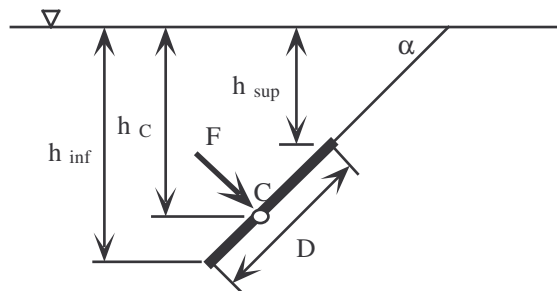
Dall'equilibrio dei momenti attorno all'asse passante per O infine si ha

$$G d_d - F_i d_i - F Z = 5.625 \times 10^6 b \frac{2}{3} b - F_i d_i - F Z = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad b = \sqrt{\frac{F_i d_i + F Z}{5.625 \times 10^6 \times \frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{661.9 \times 10^6 \times 8.333 + 28.50 \times 10^6 \times 25}{5.625 \times 10^6 \times \frac{2}{3}}} = 40.8 \text{ m} .$$

Esercizio 2.5.9

Una lamina circolare di diametro $D = 125 \text{ cm}$, inclinata dell'angolo α rispetto al piano dei carichi piezometrici, è immersa in acqua in modo che la distanza del suo perimetro misurato verticalmente sotto la superficie dell'acqua varia fra $h_{inf} = 150 \text{ cm}$ e $h_{sup} = 60 \text{ cm}$. Calcolare: a) la spinta idrostatica F dovuta all'acqua che agisce su un lato della lamina; b) la distanza verticale h_c del centro di spinta C sotto la superficie libera.



- a) Premesso che la profondità h_G del baricentro e l'area S della lamina valgono rispettivamente

$$h_G = \frac{h_{\text{inf}} + h_{\text{sup}}}{2} = \frac{1.5 + 0.60}{2} = 1.050 \text{ m} \quad , \quad S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 1.25^2}{4} = 1.227 \text{ m}^2 \quad ,$$

dalla (2.12) si ricava la spinta idrostatica F

$$F = \rho g h_G S = 1000 \times 9.80665 \times 1.050 \times 1.227 = 12640 \text{ N} \quad .$$

- b) Premesso che il momento d'inerzia di area J_{gg} rispetto all'asse baricentrale g (vedi tab. 2.1 del capitolo 2 della teoria) e il seno dell'angolo di inclinazione $\sin \alpha$ della lamina valgono rispettivamente

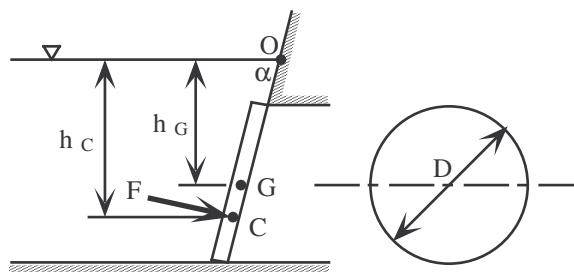
$$J_{gg} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \times 1.25^4}{64} = 0.1198 \text{ m}^4 \quad , \quad \sin \alpha = \frac{h_{\text{inf}} - h_{\text{sup}}}{D} = \frac{1.5 - 0.60}{1.25} = 0.720 \quad ,$$

dalla (2.17) si ricava la profondità del centro di spinta

$$h_C = h_G + \frac{J_{gg} \rho g \sin^2 \alpha}{F} = 1.050 + \frac{0.1198 \times 1000 \times 9.80665 \times 0.720^2}{12640} = 1.050 + 0.04818 = 1.10 \text{ m} \quad .$$

Esercizio 2.5.10

Un canale spilla acqua alla base di un serbatoio le cui facce sono inclinate di un angolo $\alpha = 80^\circ$ rispetto all'orizzontale. L'entrata del canale è chiusa da una paratoia circolare di diametro $D = 1.25 \text{ m}$, che può ruotare attorno al suo diametro orizzontale. Se la paratoia è completamente immersa: a) dimostrare che il momento M della spinta idrostatica F sulla paratoia è indipendente dall'altezza dell'acqua; b) calcolare il valore del momento M .



- a) Se la paratoia è completamente immersa, la spinta idrostatica F agisce sul centro di pressione C ad una profondità h_C sotto il pelo libero e l'asse di rotazione G passa attraverso il baricentro della paratoia ad una profondità h_G sotto il pelo libero.

Di conseguenza il momento M agente sulla paratoia per effetto della spinta idrostatica F è dato da

$$M = F \cdot \overline{CG} = F (\overline{OC} - \overline{OG}) = F \frac{h_C - h_G}{\sin \alpha}$$

dove $\overline{CG}$ è la distanza fra il centro di spinta C e il baricentro G della paratoia; sostituendo questa distanza mediante la (2.16), si ha allora la relazione

$$M = F \frac{h_C - h_G}{\sin \alpha} = F \frac{J_{gg} \rho g \sin^2 \alpha}{F \sin \alpha} = \rho g J_{gg} \sin \alpha$$

che è indipendente dall'altezza dell'acqua.

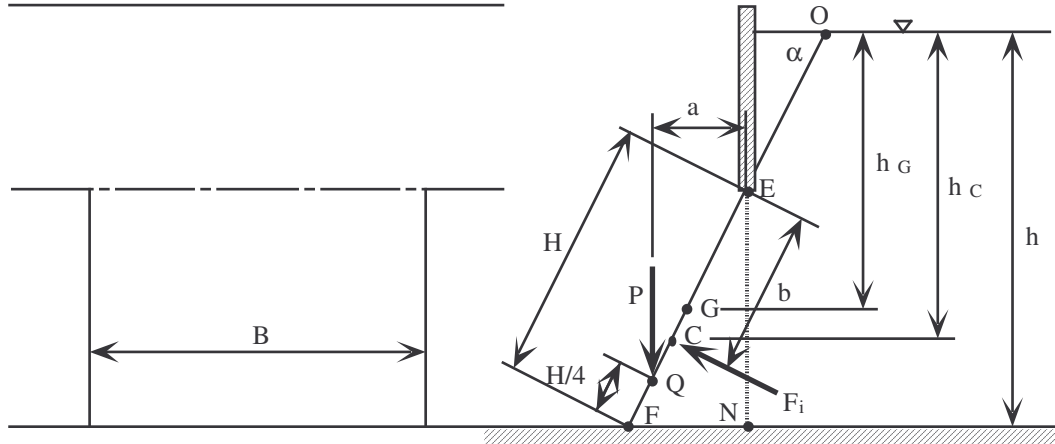
- b) Con i dati del problema e dalla tab. 2.1 del capitolo 2 della teoria, in cui si ricava il momento d'inerzia di area J_{gg} rispetto all'asse baricentrale g , si ha

$$M = \rho g J_{gg} \sin \alpha = \frac{\pi}{64} \rho g D^4 \sin \alpha = \frac{\pi}{64} \times 1000 \times 9.80665 \times 1.25^4 \times \sin(80^\circ) = 1160 \text{ N.m} .$$

Esercizio 2.5.11

Una paratoia rettangolare EF, incernierata nell'estremità superiore E e tenuta chiusa tramite un peso, è larga $B = 120 \text{ cm}$, è alta $H = 90 \text{ cm}$ ed è inclinata dell'angolo $\alpha = 60^\circ$, mentre il peso totale, dovuto a quello della paratoia e a quello aggiuntivo, vale $P = 20000 \text{ N}$ ed è applicato nel punto Q. Trovare l'altezza h dell'acqua che provoca l'apertura della paratoia.

La paratoia si apre quando il momento della spinta idrostatica F_i rispetto alle cerniere è uguale al momento del peso P rispetto alle stesse cerniere.



L'altezza verticale H_v della paratoia è data da

$$H_v = EN = H \sin \alpha = 0.9 \times \sin(60^\circ) = 0.7794 \text{ m} ;$$

la profondità h_G del baricentro G della paratoia è data da

$$h_G = h - \frac{1}{2} EN = h - \frac{1}{2} \times 0.7794 = h - 0.3897 \text{ [m]} ;$$

l'area S della paratoia è data da

$$S = B H = 1.2 \times 0.9 = 1.080 \text{ m}^2 .$$

Di conseguenza, dall'equazione della spinta idrostatica (2.12), si ricava

$$F_i = \rho g h_G S = 1000 \times 9.80665 \times (h - 0.3897) \times 1.080 = 10590 \times (h - 0.3897) \text{ [N]} .$$

Il momento d'inerzia di area J_{gg} della paratoia rispetto all'asse baricentrico g (vedi tab. 2.1 del capitolo 2 della teoria) vale

$$J_{gg} = \frac{B H^3}{12} = \frac{1.2 \times 0.90^3}{12} = 0.07290 \text{ m}^4$$

e la profondità h_C del centro di pressione C può essere ottenuta dalla relazione (2.17)

$$h_C = h_G + \frac{J_{gg} \rho g \sin^2 \alpha}{F} = h - 0.3897 + \frac{0.07290 \times 1000 \times 9.80665 \times \sin^2(60^\circ)}{10590 \times (h - 0.3897)} = h - 0.3897 + \frac{0.05063}{h - 0.3897} \text{ [m]} .$$

Il braccio b della spinta idrostatica F_i rispetto alle cerniere è dato da

$$b = \frac{h_C - (h - H_v)}{\sin \alpha} = \frac{h - 0.3897 + \frac{0.05063}{h - 0.3897} - (h - 0.7794)}{\sin(60^\circ)} = 0.50 + \frac{0.05846}{h - 0.3897} \text{ [m]}$$

e il momento M_F della spinta idrostatica è dato da

$$M_F = F_i b = 10590 \times (h - 0.3897) \times \left(0.50 + \frac{0.05846}{h - 0.3897} \right) = 5295 \times (h - 0.3897) + 619.1 = 5295 h - 1444 \text{ [N.m]} .$$

Il braccio a del peso P rispetto alle cerniere è dato da

$$a = \frac{3}{4} H \cos \alpha = \frac{3}{4} \times 0.90 \times \cos(60^\circ) = 0.3375 \text{ m}$$

e il momento M_P è dato da

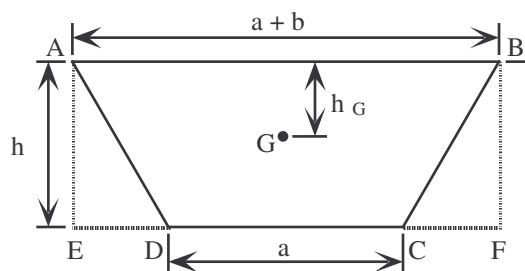
$$M_P = P a = 20000 \times 0.3375 = 6750 \text{ N.m.}$$

L'uguaglianza dei due momenti porta a

$$M_F = M_P \quad \rightarrow \quad 5295 h - 1444 = 6750 \quad \rightarrow \quad h = 1.55 \text{ m.}$$

Esercizio 2.5.12

La sezione di una diga ha la forma di un trapezio. La larghezza del lato inferiore è a , mentre quella del lato superiore è $(a + b)$. La diga è verticale e l'altezza dell'acqua è h . Dimostrare che: a) la forza risultante sulla diga è $F = \frac{1}{6} \rho g (3a + b) h^2$; b) la profondità del centro di pressione è $h_C = \frac{1}{2} \frac{4a + b}{3a + b} h$.



Per determinare la posizione del baricentro h_G del trapezio ABCD si ricorre ai momenti statici di area rispetto al lato AB:

- area del trapezio ABCD: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (2a + b) h$;
- distanza del baricentro del trapezio ABCD da AB: h_G ;
- area del rettangolo ABFE: $S_{ABFE} = (a + b) h$;
- distanza del baricentro del rettangolo ABFE da AB: $h_{ABFE} = \frac{1}{2} h$;
- area dei due triangoli ADE e BFC: $S_{ADE} = S_{BFC} = \frac{1}{4} b h$;
- distanza del baricentri dei due triangoli ADE e BFC da AB: $h_{ADE} = h_{BFC} = \frac{2}{3} h$;
- momento statico del trapezio ABCD rispetto ad AB =
= momento statico del rettangolo ABFE rispetto ad AB +
- momenti statici dei triangoli ADE e BFC rispetto ad AB

$$S_{ABCD} h_G = S_{ABFE} h_{ABFE} - S_{ADE} h_{ADE} - S_{BFC} h_{BFC} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} (2a + b) h h_G = (a + b) h \frac{1}{2} h - \frac{1}{4} b h \frac{2}{3} h - \frac{1}{4} b h \frac{2}{3} h \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(a + \frac{b}{2} \right) h h_G = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{6} \right) h^2 \quad \rightarrow \quad h_G = \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{6}}{a + \frac{b}{2}} h = \frac{1}{3} \frac{3a + b}{2a + b} h.$$

a) Dalla relazione (2.12) si trova la spinta idraulica risultante

$$F = \rho g h_G S_{ABCD} = \rho g \frac{1}{3} \frac{3a + b}{2a + b} h \frac{2a + b}{2} h = \frac{1}{6} \rho g (3a + b) h^2 \text{ [N]}.$$

b) Per determinare la profondità del centro di pressione h_C del trapezio ABCD si ricorre ai momenti d'inerzia di area rispetto al lato AB:

- momento d'inerzia del rettangolo ABFE rispetto ad AB:

$$J_{ABFE} = J_{ABFE-GG} + S_{ABFE} h_{ABFE} = \frac{(a+b)h^3}{12} + (a+b)h \left(\frac{1}{2}h \right)^2 = \frac{(a+b)h^3}{12} + \frac{(a+b)h^3}{4} = \frac{(a+b)h^3}{3}$$

- momento d'inerzia del triangolo ADE rispetto ad AB:

$$J_{ADE} = J_{ADE-GG} + S_{ADE} h_{ADE} = \frac{\frac{b}{3}h^3}{36} + \frac{1}{4}bh \times \left(\frac{2}{3}h \right)^2 = \frac{bh^3}{72} + \frac{bh^3}{9} = \frac{bh^3}{8}$$

- momento d'inerzia del triangolo BFC rispetto ad AB: $J_{BFC} = \frac{bh^3}{8}$

- momento d'inerzia del trapezio ABCD rispetto ad AB =

= momento d'inerzia del rettangolo ABFE rispetto ad AB +

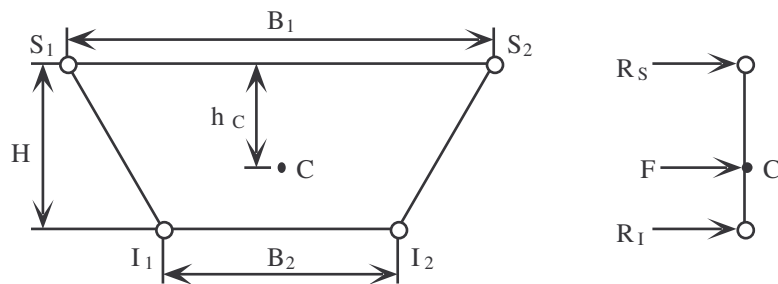
– momenti d'inerzia dei triangoli ADE e BFC rispetto ad AB

$$J_{ABCD} = J_{ABFE} - J_{ADE} - J_{BFC} = \frac{(a+b)h^3}{3} - \frac{bh^3}{8} - \frac{bh^3}{8} = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(4a+b)h^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow h_C = \frac{J_{ABCD}}{h_G S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{12}(4a+b)h^3}{\frac{1}{3} \frac{3a+b}{2} h \frac{1}{2}(2a+b)h} = \frac{1}{2} \frac{4a+b}{3a+b} h [m] .$$

Esercizio 2.5.13

Un canale orizzontale, con una sezione trapezia larga $B_1 = 150$ cm nella parte superiore e $B_2 = 90$ cm nella parte inferiore e alta $H = 1.8$ m, è chiuso da una paratia verticale fissata con chiavistelli sui quattro angoli. Calcolare: a) la forza totale F dovuta all'acqua; b) la profondità h_C del centro di pressione; c) le forze F_{S1} , F_{S2} , F_{I1} e F_{I2} esercitate su ogni chiavistello.



- a) Dall'esercizio 2.5.12 si trova la forza dovuta all'acqua ($h = H$, $a = B_2$ e $b = B_1 - B_2$)

$$F = \frac{1}{6} \rho g (3a+b)h^2 = \frac{1}{6} \rho g (2B_2 + B_1)H^2 = \frac{1}{6} 1000 \times 9.80665 \times (2 \times 0.9 + 1.5) \times 1.8^2 = 17500 \text{ N} .$$

- b) Dall'esercizio 2.5.12 si trova la profondità del centro di pressione ($h = H$, $a = B_2$ e $b = B_1 - B_2$)

$$h_C = \frac{1}{2} \frac{4a+b}{3a+b} h = \frac{1}{2} \frac{3B_2 + B_1}{2B_2 + B_1} H = \frac{1}{2} \times \frac{3 \times 0.9 + 1.5}{2 \times 0.9 + 1.5} \times 1.8 = 1.15 \text{ m} .$$

- c) Per trovare le forze sui chiavistelli, bisogna dapprima determinare le risultanti di quelli superiori R_S e di quelli inferiori R_I facendo gli equilibri attorno all'asse orizzontale passante per il punto C

$$\begin{aligned} R_S H &= F(H - h_C) & \rightarrow & & R_S &= F \frac{H - h_C}{H} = 17500 \times \frac{1.80 - 1.15}{1.80} = 6320 \text{ N} \\ R_I H &= F h_C & \rightarrow & & R_I &= F \frac{h_C}{H} = 17500 \times \frac{1.15}{1.80} = 11180 \text{ N} \end{aligned} ;$$

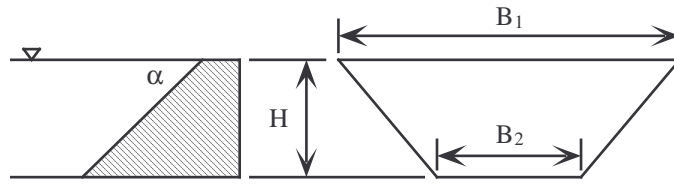
data la simmetria, le forze sui chiavistelli sono

$$F_{S1} = F_{S2} = \frac{R_S}{2} = \frac{6320}{2} = 3160 \text{ N} \quad \text{e} \quad F_{I1} = F_{I2} = \frac{R_I}{2} = \frac{11180}{2} = 5590 \text{ N} .$$

Esercizio 2.5.14

Un canale, di sezione trapezoidale, è alto $H = 3.6$ m ed è largo nella parte superiore $B_1 = 10.5$ m e nella parte

inferiore $B_2 = 6$ m. Una diga è costruita normalmente al canale con un angolo di inclinazione, verso l'acqua del canale, $\alpha = 50^\circ$ rispetto alla orizzontale. Calcolare la forza totale sulla diga e la posizione del centro di pressione quando il canale è completamente pieno.



Dall'esercizio 2.5.12 si trova la forza orizzontale dovuta all'acqua ($h = H$, $a = B_2$ e $b = B_1 - B_2$)

$$F_o = \frac{1}{6} \rho g (3a + b) h^2 = \frac{1}{6} \rho g (2B_2 + B_1) H^2 = \frac{1}{6} \times 1000 \times 9.80665 \times (2 \times 6 + 10.5) \times 3.6^2 = 477 \times 10^3 \text{ N} ;$$

la forza normale alla diga è quindi

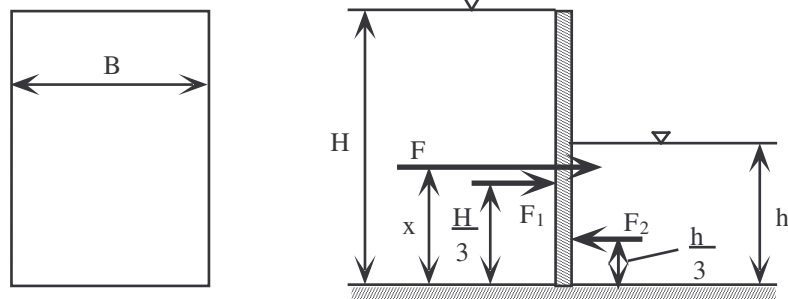
$$F = \frac{F_o}{\sin \alpha} = \frac{477 \times 10^3}{\sin(50^\circ)} = 622 \times 10^3 .$$

Dall'esercizio 2.5.12 si trova la profondità del centro di pressione ($h = H$, $a = B_2$ e $b = B_1 - B_2$)

$$h_c = \frac{1}{2} \frac{4a + b}{3a + b} h = \frac{1}{2} \frac{3B_2 + B_1}{2B_2 + B_1} H = \frac{1}{2} \times \frac{3 \times 6 + 10.5}{2 \times 6 + 10.5} \times 3.6 = 2.28 \text{ m} .$$

Esercizio 2.5.15

Una chiusa verticale è larga $B = 5$ m e ha l'acqua da una parte fino all'altezza $H = 7.5$ m e dall'altra fino a $h = 3$ m. calcolare: a) la forza risultante orizzontale F sulla chiusa; b) la posizione della retta d'azione di F ; c) la posizione cui la retta tende quando h tende a 7.5 m.



Se F_1 è la forza risultante sulla parte sinistra della chiusa e F_2 è la forza risultante sulla parte destra della chiusa, si ha:

- area della faccia sinistra bagnata dall'acqua : $S_1 = B H$;
- area della faccia destra bagnata dall'acqua : $S_2 = B h$;
- altezza del baricentro della faccia sinistra dal fondo : $h_{G1} = \frac{1}{2} H$;
- altezza del baricentro della faccia destra dal fondo : $h_{G2} = \frac{1}{2} h$;
- risultante sulla faccia sinistra : $F_1 = \rho g h_{G1} S_1 = \frac{1}{2} \rho g B H^2$;
- risultante sulla faccia destra : $F_2 = \rho g h_{G2} S_2 = \frac{1}{2} \rho g B h^2$;
- altezza di F_1 dal fondo : $x_1 = \frac{1}{3} H$;
- altezza di F_2 dal fondo : $x_2 = \frac{1}{3} h$.

a) F_1 e F_2 hanno una forza risultante F pari a

$$F = F_1 - F_2 = \frac{1}{2} \rho g B (H^2 - h^2) = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.80665 \times 5 \times (7.5^2 - 3^2) = 1.16 \times 10^6 \text{ N} = 1.16 \text{ MN} .$$

b) Per l'equilibrio, il momento di F rispetto al fondo è uguale al momento di F_1 rispetto al fondo meno il momento di F_2 rispetto al fondo; si ha allora

$$\begin{aligned} F x = F_1 x_1 - F_2 x_2 & \rightarrow \frac{1}{2} \rho g B (H^2 - h^2) x = \frac{1}{2} \rho g B H^2 \frac{1}{3} H - \frac{1}{2} \rho g B h^2 \frac{1}{3} h & \rightarrow \\ & \rightarrow x = \frac{1}{3} \frac{H^3 - h^3}{H^2 - h^2} = \frac{1}{3} \frac{H^2 + H h + h^2}{H + h} = \frac{1}{3} \times \frac{7.5^2 + 7.5 \times 3 + 3^2}{7.5 + 3} = 2.79 \text{ m} . \end{aligned}$$

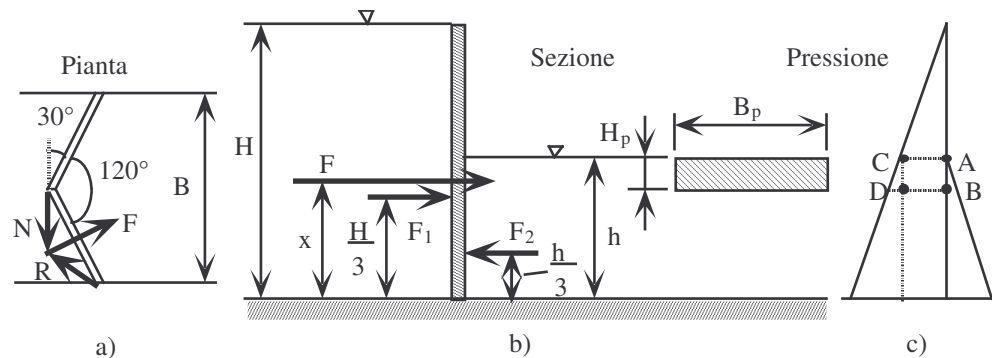
c) La retta d'azione della risultante tende al punto centrale della chiusa quando il livello più basso ($h = 3$ m) raggiunge quello più alto ($H = 7.5$ m):

$$H \rightarrow h \quad x \rightarrow \frac{3 H^2}{6 H} = \frac{1}{2} H .$$

Esercizio 2.5.16

Le due porte di una diga, che è larga $B = 7.5$ m, formano fra loro un angolo di 120° . Ogni porta ruota attorno a due cerniere che sono situate a $h_b = 0.75$ m e a $h_t = 6.25$ m sopra il fondo della diga. Le altezze dell'acqua nei due lati della diga sono $H = 9$ m e $h = 3$ m rispettivamente. Trovare: a) la forza agente su ogni cerniera; b) la spinta fra le due pareti.

In una parete del canale è inserita una paratoia larga $B_p = 1$ m e alta $H_p = 0.75$ m avente il suo livello superiore coincidente con il livello inferiore della diga. Trovare: c) la grandezza della risultante; d) il punto di applicazione della risultante.



Se F_1 e F_2 sono le forze risultanti dell'acqua a monte e a valle di una delle porte, dalla fig. b si ha:

- larghezza di una porta : $B' = \frac{B}{2 \cos(30^\circ)} = \frac{B}{\sqrt{3}}$
- forza risultante : $F_1 = \rho g h_{G1} S_1 = \rho g \frac{1}{2} H \frac{B H}{\sqrt{3}} = 1000 \times 9.80665 \times \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{7.5 \times 9}{\sqrt{3}} = 1725000 \text{ N} = 1725 \text{ kN} ;$
- forza risultante : $F_2 = \rho g h_{G2} S_2 = \rho g \frac{1}{2} h \frac{B h}{\sqrt{3}} = 1000 \times 9.80665 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{7.5 \times 3}{\sqrt{3}} = 192000 \text{ N} = 192 \text{ kN} ;$
- altezza di F_1 dal fondo : $x_1 = \frac{1}{3} H = \frac{1}{3} \times 9 = 3 \text{ m} ;$
- altezza di F_2 dal fondo : $x_2 = \frac{1}{3} h = \frac{1}{3} \times 3 = 1 \text{ m} ;$
- forza risultante sulla diga : $F = F_1 - F_2 = 1725 - 192 = 1533 \text{ kN} ;$
- altezza di F rispetto al fondo : $x = \frac{1}{3} \frac{H^2 + H h + h^2}{H + h} = \frac{1}{3} \times \frac{9^2 + 9 \times 3 + 3^2}{9 + 3} = 3.25 \text{ m} .$

La diga è in equilibrio sotto la forza dell'acqua F, la risultante R delle reazioni delle cerniere superiore e inferiore (fig. a) e della reazione N fra le porte che agisce normalmente all'unione e quindi con un angolo retto rispetto all'asse della diga. Le tre forze sono sullo stesso piano orizzontale e si incontrano in un punto perché sono fra loro in equilibrio. In direzione parallela alla diga si ha:

$$N \cos(30^\circ) = R \cos(30^\circ) \quad \rightarrow \quad N = R ,$$

mentre in direzione normale alla diga si ha:

$$N \sin(30^\circ) + R \sin(30^\circ) = 2 N \sin(30^\circ) = 2 R \sin(30^\circ) = F \quad \rightarrow \quad H = R = F = 1533 \text{ kN} ;$$

le tre forze agiscono ad un'altezza dal fondo $x = 3.25 \text{ m}$.

La reazione risultante R è divisa fra le cerniere superiore ed inferiore:

- forza sulla cerniera superiore: $R_t = R \frac{x - h_b}{h_t - h_b} = 1533 \times \frac{3.25 - 0.75}{6.25 - 0.75} = 697 \text{ kN} ;$
- forza sulla cerniera inferiore: $R_b = R - R_t = 1533 - 697 = 836 \text{ kN} .$

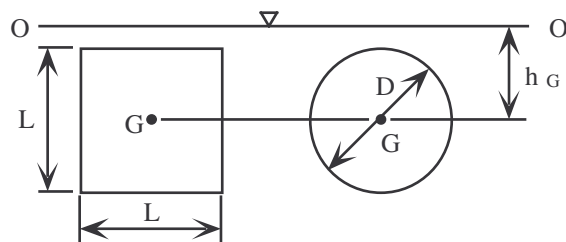
La fig. c mostra il diagramma della pressione della diga. Sotto il livello AD la pressione aumenta in modo uguale sulle sue due facce in modo che, al di sotto del livello inferiore dell'acqua, la pressione rimane costante e uguale al valore AD. La parte superiore della paratoia si trova in A e la forza risultante è rappresentata dall'area ABCD:

- pressione: $p_p = \rho g (H - h) = 1000 \times 9.80665 \times (9 - 3) = 58860 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cong 59 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} ;$
- area della paratoia: $S_p = B_p H_p = 1 \times 0.75 = 0.75 \text{ m}^2 ;$
- forza sulla paratoia: $F_p = p_p S_p = 58.86 \times 0.75 = 44 \text{ kN} .$

Poiché la pressione è uniforme su tutta la paratoia, la forza F_p agisce sulla sua altezza media, pari a $x = 37.5 \text{ cm}$ sotto il livello inferiore dell'acqua.

Esercizio 2.5.17

Trovare la forza risultante e il centro di pressione su: a) una superficie piana verticale quadrata di lato $L = 1.8 \text{ m}$; b) una superficie piana verticale circolare di diametro $D = 1.8 \text{ m}$. In entrambi i casi il baricentro delle superfici è $h_G = 1.2 \text{ m}$ sotto il pelo libero dell'acqua.



La forza risultante su una superficie piana è data dalla relazione (2.12)

$$F = \rho g h_G S$$

mentre la profondità del centro di pressione è data dalla relazione (2.16)

$$h_C = h_G + \frac{J_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S}$$

dove α è l'angolo di inclinazione della superficie rispetto al piano dei carichi piezometrici. Nel caso di parete verticale, in cui $\alpha = 90^\circ$, si ha:

a) per il quadrato:

$$F = \rho g h_G S \sin \alpha = \rho g h_G L^2 \sin \alpha = 1000 \times 9.80665 \times 1.2 \times 1.8^2 \times \sin(90^\circ) = 38100 \text{ N}$$

$$h_C = h_G + \frac{J_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S} = h_G + \frac{\frac{L^4}{12} \sin^2 \alpha}{h_G L^2} = h_G + \frac{L^2 \sin^2 \alpha}{12 h_G} = 1.2 + \frac{1.8^2 \times \sin^2(90^\circ)}{12 \times 1.2} = 1.425 \text{ m} ;$$

b) per il cerchio:

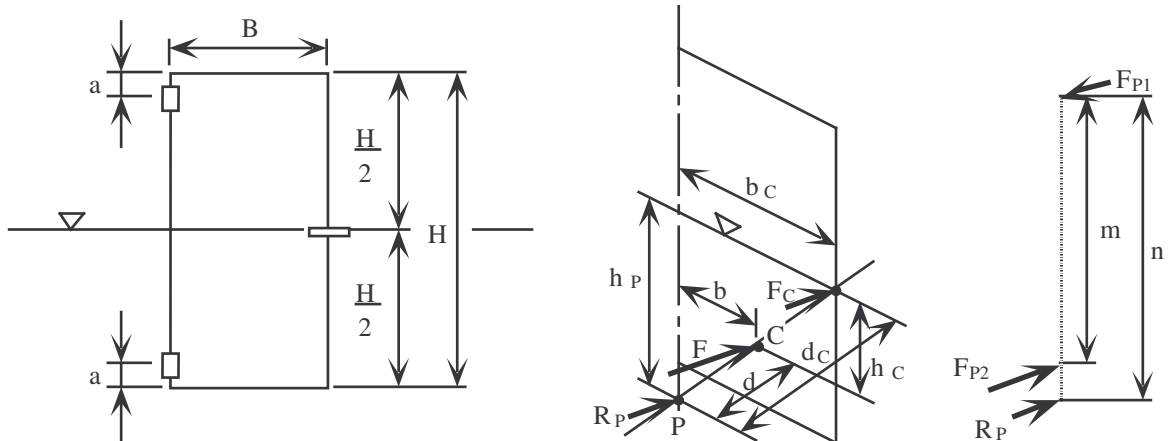
$$F = \rho g h_G S \sin \alpha = \rho g h_G \frac{\pi D^2}{4} \sin \alpha = 1000 \times 9.80665 \times 1.2 \times \frac{\pi \times 1.8^2}{4} \times \sin(90^\circ) = 29900 \text{ N}$$

$$h_C = h_G + \frac{J_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S} = h_G + \frac{\frac{\pi D^4}{64} \sin^2 \alpha}{h_G \frac{\pi D^2}{4}} = h_G + \frac{D^2 \sin^2 \alpha}{16 h_G} = 1.2 + \frac{1.8^2 \times \sin^2(90^\circ)}{16 \times 1.2} = 1.369 \text{ m} .$$

A parità di dimensioni massime, il quadrato rispetto al cerchio ha una superficie maggiore e quindi la forza risultante è più grande e il centro di spinta più profondo.

Esercizio 2.5.18

Una paratia verticale ha una porta alta $H = 2 \text{ m}$ e larga $B = 1 \text{ m}$ fissata mediante due cerniere situate ad una distanza $a = 15 \text{ cm}$ sotto la parte superiore e ad una distanza $a = 15 \text{ cm}$ sopra la parte inferiore di un lato verticale e mediante un chiavistello nel centro dell'altro lato verticale. Quando una faccia della paratia è sottoposta alla pressione dell'acqua il cui pelo libero si trova all'altezza del chiavistello ($H/2$) calcolare: a) la forza sul chiavistello F_C ; b) le forze F_{P1} e F_{P2} su ogni cerniera, dopo aver trovato la loro risultante R_P .



La forza risultante su una superficie piana è data dalla relazione (2.12)

$$F = \rho g h_G S$$

mentre la profondità del centro di pressione è data dalla relazione (2.16)

$$h_C = h_G + \frac{J_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S}$$

dove α è l'angolo di inclinazione della superficie rispetto al piano dei carichi piezometrici. Nel caso di parete verticale, in cui $\alpha = 90^\circ$, si ha:

$$F = \rho g h_G S = \rho g h_G B H = 1000 \times 9.80665 \times 0.5 \times 1 \times 1 = 4900 \text{ N}$$

$$h_C = h_G + \frac{I_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S} = h_G + \frac{\frac{B H^3}{12} \sin^2 \alpha}{h_G B H} = h_G + \frac{H^2 \sin^2 \alpha}{12 h_G} = 0.5 + \frac{1^2 \times \sin^2(90^\circ)}{12 \times 0.5} = 0.6667 \text{ m}$$

oppure

$$h_C = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \times 1 = 0.6667 \text{ m} .$$

La forza sul chiavistello viene trovata facendo l'equilibrio della porta attorno all'asse passante per i perni delle due cerniere

$$F b = F_C b_C$$

dove b è il braccio della spinta F dell'acqua e vale $b = B/2$, F_C è la forza sul chiavistello e b_C è il braccio della forza F_C e vale $b_C = B$; allora

$$F_C = F \frac{b}{b_C} = F \frac{\frac{B}{2}}{B} = \frac{F}{2} = \frac{4900}{2} = 2450 \text{ N} .$$

Per trovare le forze sulle cerniere, bisogna dapprima determinare la loro risultante R_p sul punto intersezione dell'asse passante per i perni delle cerniere e dell'asse passante per i punti di applicazione della spinta F e della forza sul chiavistello F_C . Il punto d'intersezione si trova alla profondità h_p ad una distanza d dalla spinta F e ad una distanza d_C dalla forza sul chiavistello F_C . In base alla simmetria della configurazione si verifica che

$$h_p = 2 h_C = 2 \times 0.6667 = 1.333 \text{ m}$$

$$d_C = \sqrt{h_p^2 + B^2} = \sqrt{1.333^2 + 1^2} = 1.667 \text{ m}$$

$$d = \frac{d_C}{2} = \frac{1.667}{2} = 0.8333 \text{ m}$$

$$R_p d = F_C d \quad \rightarrow \quad R_p = F_C = 2450 \text{ N} .$$

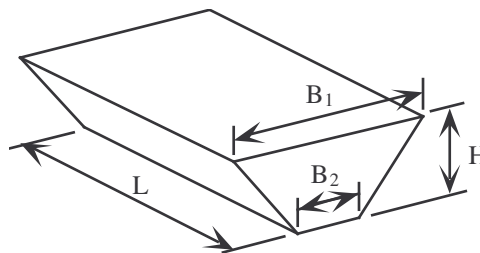
A questo punto è possibile calcolare le due forze agenti sulle cerniere mediante il sistema di equazioni seguente

$$F_{p1} m = R_p (n - m) \quad \rightarrow \quad F_{p1} = R_p \frac{n - m}{m} = R_p \frac{h_p - \frac{H}{2} + a}{H - 2a} = 2450 \times \frac{1.333 - \frac{2}{2} + 0.15}{2 - 2 \times 0.15} = 697 \text{ N}$$

$$F_{p2} m = R_p n \quad \rightarrow \quad F_{p2} = R_p \frac{h_p + \frac{H}{2} - a}{H - 2a} = R_p \frac{n}{m} = 2450 \times \frac{1.333 + \frac{2}{2} - 0.15}{2 - 2 \times 0.15} = 3150 \text{ N}$$

Esercizio 2.5.19

Un recipiente è lungo $L = 180 \text{ cm}$, alto $H = 90 \text{ cm}$, largo $B_1 = 90 \text{ cm}$ nella parte superiore e $B_2 = 30 \text{ cm}$ nella parte inferiore ed è completamente riempito di acqua. Calcolare: a) il peso totale dell'acqua; b) la forza totale esercitata dall'acqua sulla parete di fondo; c) la forza totale esercitata su una delle pareti laterali inclinate. Verificare: d) l'equilibrio in direzione verticale.



- a) Il peso totale dell'acqua del recipiente è dato da

$$G = \rho g V = \rho g S L = \rho g \frac{(B_1 + B_2) H}{2} L = 1000 \times 9.80665 \times \frac{(0.90 + 0.30) \times 0.90}{2} \times 1.80 = 9530 \text{ N} .$$

- b) Poiché la pressione p_f agente sulla parete di fondo è data dalla legge di Stevin (2.7)

$$p_f = \rho g H = 1000 \times 9.80665 \times 0.90 = 8830 \text{ Pa} ,$$

la forza F_f agente sulla parete di fondo è data dalla relazione (2.12)

$$F_f = p_f S = p_f L B_2 = 8830 \times 1.80 \times 0.30 = 4770 \text{ N} .$$

- c) Poiché la pressione media p_m all'altezza del baricentro di una parete laterale è data da

$$p_m = \frac{p_0 + p_f}{2} = \frac{0 + 8830}{2} = 4415 \text{ Pa} ,$$

la forza F_l agente su una parete laterale inclinata è data da

$$\text{componente orizzontale : } F_{lo} = p_m L H = 4415 \times 1.80 \times 0.90 = 7150 \text{ N} ;$$

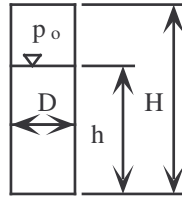
$$\text{componente verticale : } F_{lv} = p_m L \frac{B_1 - B_2}{2} = 4415 \times 1.80 \times \frac{0.90 - 0.30}{2} = 2380 \text{ N} .$$

- d) Per l'equilibrio deve essere:

$$G = F_f + 2 \times F_{lv} \quad \rightarrow \quad 9530 = 4770 + 2 \times 2380 \quad \rightarrow \quad 9530 = 9530 \quad \text{c.v.d.}$$

Esercizio 2.5.20

Un serbatoio cilindrico verticale chiuso, di diametro $D = 60$ cm e di altezza $H = 1.8$ m, contiene acqua fino ad una altezza $h = 1.2$ m. Nel cilindro è pompata aria alla pressione $p_o = 35$ kN/m² sopra quella atmosferica. Calcolare: a) la forza normale totale F sulla parete verticale del serbatoio; b) la distanza h_C del centro di pressione dalla base.



La pressione sulla parete verticale può essere considerata come somma di una quantità costante, corrispondente alla pressione p_o , e di una quantità idrostatica variabile linearmente da p_{is} , agente a livello del pelo libero, a p_{il} , agente sul fondo del serbatoio.

a) Per quanto riguarda la forza si ha

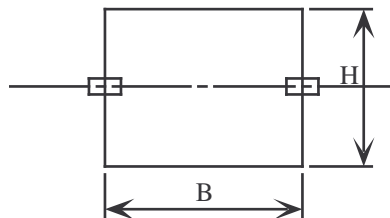
- superficie su cui grava p_o : $S_o = \pi D H = \pi \times 0.6 \times 1.8 = 3.393 \text{ m}^2$;
- forza dovuta alla pressione p_o : $F_o = p_o S_o = 35000 \times 3.393 = 119000 \text{ N}$;
- pressione idrostatica a livello del pelo libero : $p_{is} = 0 \text{ Pa}$;
- pressione idrostatica sul fondo : $p_{il} = \rho g h = 1000 \times 9.80665 \times 1.2 = 11770 \text{ Pa}$;
- pressione idrostatica media : $p_{im} = \frac{p_{is} + p_{il}}{2} = \frac{0 + 11770}{2} = 5885 \text{ Pa}$;
- superficie su cui grava p_i : $S_i = \pi D h = \pi \times 0.6 \times 1.2 = 2.262 \text{ m}^2$;
- forza dovuta alla pressione p_{im} : $F_i = p_{im} S_i = 5885 \times 2.262 = 13000 \text{ N}$;
- forza totale : $F = F_o + F_i = 119000 + 13000 = 132000 \text{ N}$

b) Per quanto riguarda il centro di pressione, si può considerare la parete cilindrica come una parete rettangolare avente per base la circonferenza del serbatoio; allora:

- altezza del centro di spinta di F_o : $h_{C_o} = \frac{H}{2} = \frac{1.8}{2} = 0.9 \text{ m}$;
- altezza del centro di spinta di F_i : $h_{C_i} = \frac{H}{3} = \frac{1.2}{3} = 0.4 \text{ m}$;
- $F h_C = F_o h_{C_o} + F_i h_{C_i} \rightarrow h_C = \frac{F_o h_{C_o} + F_i h_{C_i}}{F} = \frac{119000 \times 0.9 + 13000 \times 0.4}{132000} = 0.851 \text{ m}$

Esercizio 2.5.21

Un'apertura rettangolare sulla faccia bagnata dall'acqua di una diga è chiusa mediante un portellone montato su due perni orizzontali passanti attraverso il centro dei due lati verticali. Se il livello dell'acqua è al di sopra del bordo superiore del portellone: a) dimostrare che il momento richiesto per aprirlo è indipendente dal livello dell'acqua; b) calcolare il valore del momento per un portellone largo $B = 1.25$ m e alto $H = 1$ m.



Se si indica con h l'altezza dell'acqua al di sopra del bordo superiore del portellone, la pressione può essere considerata come somma di una quantità costante, dovuta solamente all'altezza h e corrispondente alla pressione p_s agente sul bordo superiore, e di una quantità idrostatica variabile linearmente da p_{is} agente sul bordo superiore a p_{il} agente sul bordo inferiore.

a) Allora

- pressione costante : $p_s = \rho g h$;
- forza dovuta a p_s : $F_s = p_s S = \rho g h B H$;

- altezza del centro di spinta di F_S : $h_{C_S} = \frac{H}{2}$.

La forza F_S è applicata alla stessa altezza dei perni e quindi non crea momento; di conseguenza l'altezza h non influenza il momento di apertura del portellone.

c.v.d.

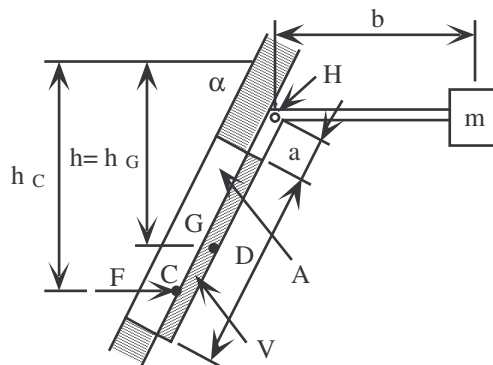
b) Ancora:

- pressione idrostatica superiore : $p_{iS} = 0$;
- pressione idrostatica inferiore : $p_{iI} = \rho g H$;
- pressione idrostatica media : $p_{im} = \frac{p_{iS} + p_{iI}}{2} = \frac{0 + \rho g H}{2} = \frac{\rho g H}{2}$;
- forza della pressione idrostatica : $F_i = p_{im} S = \frac{\rho g H}{2} B H = \frac{\rho g B H^2}{2} = \frac{1000 \times 9.80665 \times 1.25 \times 1^2}{2} = 6129 \text{ N}$;
- altezza del centro di spinta di F_i : $h_{C_i} = \frac{H}{3} = \frac{1}{3} = 0.333 \text{ m}$;
- momento di F :

$$M = F_i \left(\frac{H}{2} - h_{C_i} \right) = \frac{\rho g B H^2}{2} \left(\frac{H}{2} - \frac{H}{3} \right) = \frac{\rho g B H^3}{12} = \frac{1000 \times 9.80665 \times 1.25 \times 1^3}{12} = 1021 \text{ N.m} .$$

Esercizio 2.5.22

Un'apertura circolare A nella parete inclinata ($\alpha = 60^\circ$) di un serbatoio è chiusa mediante una valvola a disco V di diametro $D = 70 \text{ cm}$. Il disco è incernierato in H e il braccio del contrappeso è appena sufficiente a tenere la valvola chiusa quando il serbatoio è vuoto. Sapendo che $a = 15 \text{ cm}$, trovare la massa addizionale m che deve essere posta sul braccio a una distanza $b = 90 \text{ cm}$ dalla cerniera per poter mantenere chiusa la valvola fino a che il livello dell'acqua non raggiunga l'altezza $h = 60 \text{ cm}$ sopra il centro della valvola (si trascura il peso del braccio).



La forza risultante orizzontale su una superficie piana è data dalla proiezione della relazione (2.12) sul piano verticale

$$F = \rho g h_G S \sin \alpha$$

dove α è l'angolo di inclinazione della superficie rispetto al piano dei carichi piezometrici, mentre la profondità del centro di pressione è dato dalla relazione (2.16)

$$h_C = h_G + \frac{J_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S} .$$

Nel caso in cui $\alpha = 60^\circ$, per il cerchio si ha:

$$F = \rho g h_G S \sin \alpha = \rho g h_G \frac{\pi D^2}{4} \sin \alpha = 1000 \times 9.80665 \times 0.6 \times \frac{\pi \times 0.7^2}{4} \times \sin(60^\circ) = 1961 \text{ N} ;$$

$$h_C = h_G + \frac{J_{gg} \sin^2 \alpha}{h_G S} = h_G + \frac{\frac{\pi D^4}{64} \sin^2 \alpha}{h_G \frac{\pi D^2}{4}} = h_G + \frac{D^2 \sin^2 \alpha}{16 h_G} = 0.6 + \frac{0.7^2 \times \sin^2(60^\circ)}{16 \times 0.6} = 0.6383 \text{ m} .$$

Rispetto all'asse di rotazione H il momento creato dalla forza F deve essere uguale a quello creato dal peso P della massa m. Il braccio della forza F è dato da

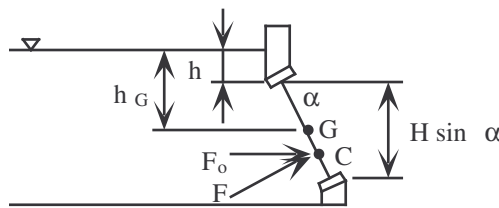
$$b_F = \left(a + \frac{D}{2} + GC \right) \sin \alpha = \left(a + \frac{D}{2} + \frac{h_C - h}{\sin \alpha} \right) \sin \alpha = \left[0.15 + \frac{0.7}{2} + \frac{0.6383 - 0.6}{\sin(60^\circ)} \right] \times \sin(60^\circ) = 0.4713 \text{ m}$$

e quindi

$$F b_F = m g b \quad \rightarrow \quad m = \frac{F b_F}{g b} = \frac{1961 \times 0.4713}{9.80665 \times 0.9} = 105 \text{ kg} .$$

Esercizio 2.5.23

Una paratoia rettangolare, larga $B = 1.8 \text{ m}$ e alta $H = 1.5 \text{ m}$, con il bordo superiore posizionato $h = 1.2 \text{ m}$ sotto il pelo libero, viene aperta mediante scorrimento su guide. Sapendo che la paratoia e le guide sono inclinate di $\alpha = 45^\circ$ rispetto alla orizzontale e che il coefficiente di attrito fra paratoia e guide è $f = 0.12$, calcolare la forza necessaria lungo le guide per aprire la paratoia.



La forza orizzontale su una superficie piana è data dal prodotto della pressione agente all'altezza del suo baricentro per la proiezione, sul piano verticale, dell'area della superficie stessa; allora:

- $h_G = \frac{H}{2} \sin \alpha + h$;
- $p_G = \rho g h_G = \rho g \left(\frac{H}{2} \sin \alpha + h \right)$;
- $F_o = p_G \times A \sin \alpha = \rho g \left(\frac{H}{2} \sin \alpha + h \right) \times B H \sin \alpha$;
- $F = \frac{F_o}{\sin \alpha} = \rho g \left(\frac{H}{2} \sin \alpha + h \right) B H = 1000 \times 9.80665 \times \left[\frac{1.5}{2} \sin(50^\circ) + 1.2 \right] \times 1.8 \times 1.5 = 47000 \text{ N} .$

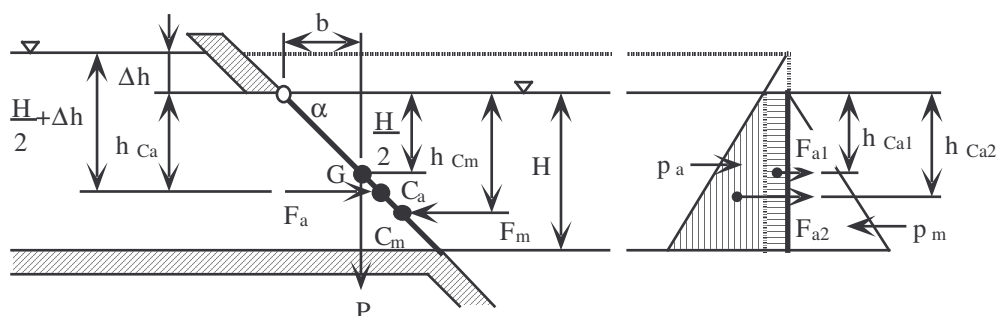
La forza lungo le guide diventa allora

$$T = f F = 0.12 \times 47000 = 5640 \text{ N} .$$

Esercizio 2.5.24

Un canale rettangolare, largo $B = 120 \text{ cm}$ e alto $H = 90 \text{ cm}$, scarica acqua dolce in mare attraverso un foro praticato in un argine avente un angolo $\alpha = 50^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il canale è chiuso tramite una valvola a cerniera, che ruota attorno al bordo superiore e che ha massa $m = 500 \text{ kg}$ con centro di gravità coincidente con il baricentro. Se il livello del mare si trova all'altezza delle cerniere, calcolare il dislivello Δh fra acqua dolce e acqua di mare affinché la valvola si apra e consenta lo scarico in mare (massa volumica acqua $\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3$ e massa volumica mare $\rho_m = 1025 \text{ kg/m}^3$).

P.S. Nella figura di destra è mostrato, per l'acqua dolce, come sia $F_a = F_{a1} + F_{a2}$ e come h_{Ca} sia ricavabile da h_{Ca1} e h_{Ca2} .



Per l'equilibrio attorno alle cerniere, il momento creato dall'acqua dolce deve essere uguale ai momenti creati dall'acqua di mare e dal peso della valvola

$$F_a h_{C_a} = F_m h_{C_m} + P b$$

A sua volta il momento creato dall'acqua dolce può essere scomposto in due quantità: quella dovuta alla pressione (costante) in corrispondenza delle cerniere e quella (variabile) dovuta al carico piezometrico che aumenta con la profondità

$$F_a h_{C_a} = F_{a1} h_{C_{a1}} + F_{a2} h_{C_{a2}}$$

dove

- $F_{a1} = p_1 \times A \sin \alpha = \rho_a g \Delta h \times B H \sin \alpha = 1000 \times 9.80665 \times \Delta h \times 1.2 \times 0.9 \times \sin(50^\circ) = 8113 \Delta h \text{ [N]} ;$
- $h_{C_{a1}} = \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} \times 0.9 = 0.45 \text{ m} ;$
- $F_{a2} = p_2 \times A \sin \alpha = \rho_a g \frac{H}{2} \times B H \sin \alpha = 1000 \times 9.80665 \times \frac{0.9}{2} \times 1.2 \times 0.9 \times \sin(50^\circ) = 3651 \text{ [N]} ;$
- $h_{C_{a2}} = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \times 0.9 = 0.60 \text{ m} .$

Ancora:

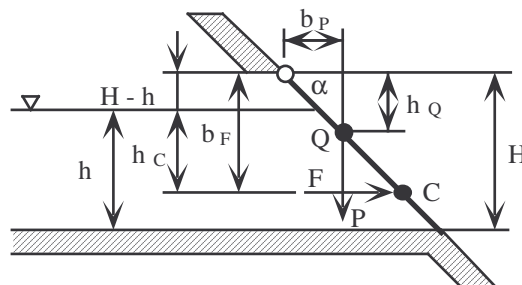
- $F_m = p_m \times A \sin \alpha = \rho_m g \frac{H}{2} \times B H \sin \alpha = 1025 \times 9.80665 \times \frac{0.9}{2} \times 1.2 \times 0.9 \times \sin(50^\circ) = 3742 \text{ N} ;$
- $h_{C_m} = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \times 0.9 = 0.6 \text{ m} ;$
- $P = m g = 500 \times 9.80665 = 4903 \text{ N} ;$
- $b = \frac{H}{2} \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{0.90}{4} \times \frac{1}{\tan(50^\circ)} = 0.3776 \text{ m} .$

In conclusione

$$\begin{aligned} F_{a1} h_{C_{a1}} + F_{a2} h_{C_{a2}} &= F_m h_{C_m} + P b \quad \rightarrow \\ \rightarrow 8113 \times \Delta h \times 0.45 + 3651 \times 0.6 &= 3742 \times 0.6 + 4903 \times 0.3776 \quad \rightarrow \\ \rightarrow 3651 \times \Delta h \times 0.45 - 1906 &= 0 \quad \rightarrow \Delta h = 0.522 \text{ m} . \end{aligned}$$

Esercizio 2.5.25

L'estremità di uscita di un canale rettangolare, largo $B = 1.2 \text{ m}$ e alto $H = 0.9 \text{ m}$, è chiusa da una valvola a cerniera inclinata di $\alpha = 50^\circ$ rispetto all'orizzontale e incernierata sul lato superiore del canale. La valvola ha una massa $m = 830 \text{ kg}$ e il suo centro di gravità si trova $h_Q = 0.33 \text{ m}$ sotto le cerniere. Quale deve essere il livello h dell'acqua, rispetto alla base, affinché la valvola si apra?



Per l'equilibrio attorno alle cerniere, il momento creato dalla spinta dell'acqua deve essere uguale a quello creato dal peso della valvola

$$F b_F = P b_P$$

La forza orizzontale su una superficie piana è data dal prodotto della pressione agente all'altezza del baricentro della parte immersa per la proiezione, sul piano verticale, dell'area della superficie stessa (2.12)

$$F = p_G S = \rho g \frac{h}{2} B h = \frac{1}{2} \rho g B h^2$$

mentre il suo braccio è dato da

$$b_F = h_C + (H - h) = \frac{2}{3} h + (H - h) = H - \frac{1}{3} h ;$$

il peso della valvola è dato da

$$P = m g$$

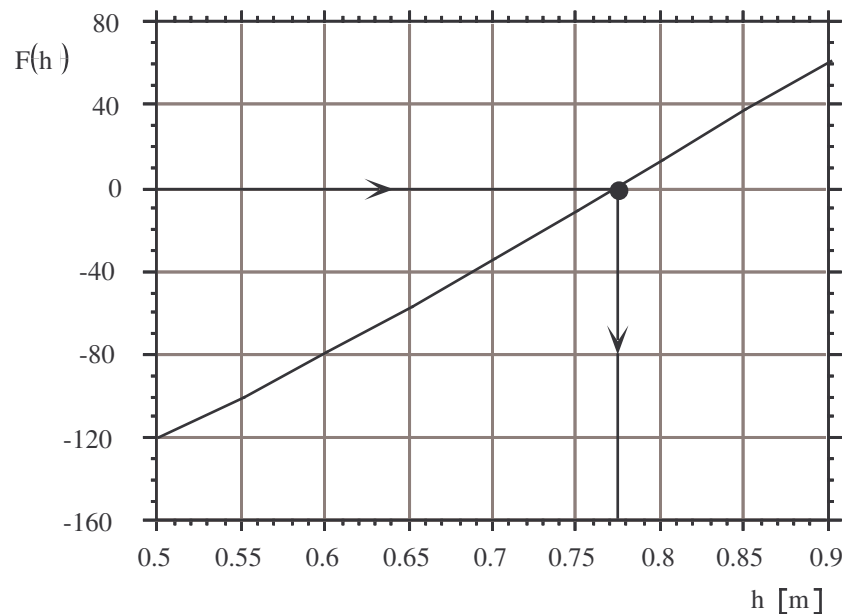
mentre il suo braccio è dato da

$$b_P = \frac{h_Q}{\operatorname{tg} \alpha} .$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio, si ha

$$\begin{aligned} F b_F = P b_P &\rightarrow \frac{1}{2} \rho g B h^2 \times \left(H - \frac{1}{3} h \right) = m g \frac{h_Q}{\operatorname{tg} \alpha} \rightarrow -\frac{1}{6} \rho B h^3 + \frac{1}{2} \rho B H h^2 = \frac{m h_Q}{\operatorname{tg} \alpha} \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{6} \times 1000 \times 1.2 \times h^3 + \frac{1}{2} \times 1000 \times 1.2 \times 0.9 \times h^2 = \frac{830 \times 0.33}{\operatorname{tg}(50^\circ)} \rightarrow -200 h^3 + 540 h^2 - 230 = 0 . \end{aligned}$$

Uno o più dei tre zeri del polinomio di terzo grado si individuano rappresentando graficamente il suo andamento nel campo possibile della soluzione $0 < h < H$; nella figura seguente è riportato il campo fra $h = 0.5$ m e $h = 0.9$ m e da essa si vede che uno degli zeri si trova attorno a $h = 0.77$ m.



Per una individuazione più precisa dello zero si può ricorrere al metodo di Newton - Raphson che, partendo da un valore iniziale di tentativo e trovando il valore incrementale Δh dell'incognita h , consente con procedura iterativa di avvicinarsi alla soluzione cercata; se si pone

$$F(h) = -200 h^3 + 540 h^2 - 230 \quad , \quad F'(h) = -600 h^2 + 1080 h$$

le equazioni da risolvere sono

$$\Delta h = -\frac{F(h)}{F'(h)} \quad , \quad h = h + \Delta h .$$

Partendo da $h = 0.5$ m, si trovano i valori riportati nella tabella seguente

h	$F(h)$	$F'(h)$	Δh	$h + \Delta h$
0.5000000	-120.0000000	390.0000000	0.3076923	0.8076923
0.8076923	16.8957670	480.8875740	-0.0351345	0.7725578

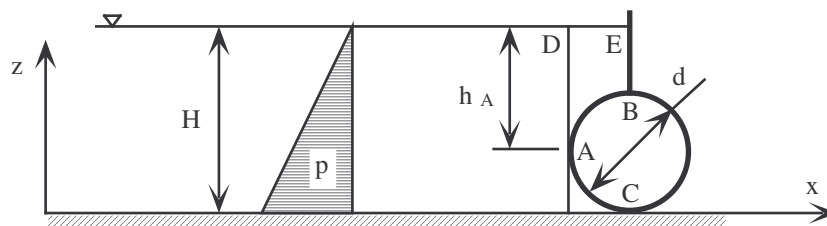
0.7725578	0.0770431	476.2550054	-0.0001618	0.7723960
0.7723960	0.0000020	476.2303304	0.0000000	0.7723960

e quindi la soluzione $h = 0.772$ m.

2.6. SPINTA IDROSTATICA SU SUPERFICI CURVE

Esercizio 2.6.1

Una diga in ferro è costituita da un cilindro BAC, pesante $G_C = 60$ kN, e da un setto verticale BE, pesante $G_S = 10$ kN. Il cilindro, di diametro $d = 2$ m e di lunghezza $Y = 3$ m, è immerso in acqua profonda $H = 6$ m. Calcolare le spinte orizzontale F_o e verticale F_v gravanti sul cilindro.



Dalla relazione (2.18) si ha che la spinta orizzontale F_x è dovuta alla pressione piezometrica che agisce sulla proiezione, lungo il piano verticale, della superficie cilindrica BAC. Poiché la profondità h_A del punto A, medio fra B e C, è data da

$$h_A = H - \frac{d}{2},$$

la pressione idrostatica p_A nel punto A è data da

$$p_A = \rho g h_A = \rho g \left(H - \frac{d}{2} \right)$$

e la proiezione verticale S_v del mantello del cilindro è data da

$$S_v = Y d,$$

la spinta orizzontale è data dalla pressione p_A moltiplicata per l'area del rettangolo S_v

$$F_o = p_A S_v = \rho g \left(H - \frac{d}{2} \right) Y d = 1000 \times 9.80665 \times \left(6 - \frac{2}{2} \right) \times 3 \times 2 = 294200 \text{ N} \cong 294 \text{ kN}$$

ed è diretta verso destra.

La spinta verticale è invece dovuta alla somma algebrica della forza diretta verso il basso agente sulla superficie cilindrica AB e della forza diretta verso l'alto agente sulla superficie cilindrica AC; entrambe le forze sono date dal peso reale oppure immaginario dell'acqua sovrastante le due superfici. Il peso dell'acqua reale gravante sulla superficie AB è

$$G_{AB} = \rho g V_{ABED} = \rho g \left(h_A \frac{d}{2} - \frac{1}{4} \frac{\pi d^2}{4} \right) Y = 1000 \times 9.80665 \times \left(5 \times \frac{2}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi \times 2^2}{4} \right) \times 3 = 124000 \text{ N}$$

dove V_{ABED} è il volume dell'acqua, mentre il peso dell'acqua reale e immaginaria gravante sulla superficie AC è

$$G_{AC} = \rho g V_{ACED} = \rho g \left(h_A \frac{d}{2} + \frac{1}{4} \frac{\pi d^2}{4} \right) Y = 1000 \times 9.80665 \times \left(5 \times \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\pi \times 2^2}{4} \right) \times 3 = 170200 \text{ N}$$

dove V_{ACED} è il volume dell'acqua. La spinta verticale complessiva vale

$$F_v = G_{AC} - G_{AB} = 170200 - 124000 = 46200 \text{ N} \cong 46 \text{ kN}$$

ed è diretta verso l'alto.

Poiché il peso è superiore alla spinta di Archimede, il cilindro appoggia sul fondo con una forza

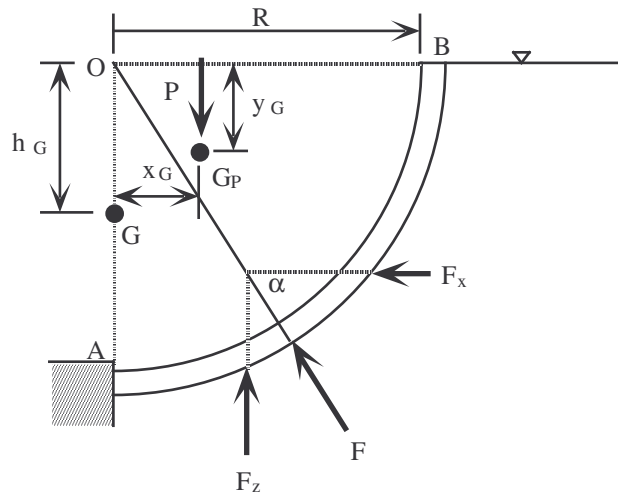
$$F = G_C + G_S - F_v = 60 + 10 - 46 = 24 \text{ kN}$$

diretta verso il basso.

Esercizio 2.6.2

Una paratoia consiste di un quarto di circonferenza di raggio $R = 1.5$ m ruotante attorno al suo centro O. Es-

sa è larga $Y = 3$ m, ha una massa $m = 6000$ kg e il suo baricentro G_P ha le coordinate $x_P = 0.6$ m e $y_P = 0.6$ m. Quando l'acqua è allo stesso livello di O, calcolare: a) l'entità delle componenti orizzontale F_x e verticale F_z della spinta F sulla paratoia; b) l'angolo di inclinazione α della spinta F rispetto all'orizzontale; c) il momento M richiesto per aprire la paratoia facendola ruotare attorno ad O verso l'alto.



a) Dalla relazione (2.18) si ha che la spinta orizzontale F_x è dovuta alla pressione piezometrica che agisce sulla proiezione OA, lungo il piano verticale, della superficie cilindrica AB. Poiché la profondità h_G del baricentro G della superficie OA è data da

$$h_G = \frac{R}{2} ,$$

la pressione idrostatica p_G nel punto G è data da

$$p_G = \rho g h_G = \rho g \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \rho g R$$

e la proiezione verticale $S_v = OA$ del mantello del cilindro è data da

$$S_v = Y R ,$$

la spinta orizzontale F_x è data dalla pressione p_G moltiplicata per l'area del rettangolo S_v

$$F_x = p_G S_v = \frac{1}{2} \rho g R Y R = \frac{1}{2} \rho g Y R^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.80665 \times 3 \times 1.5^2 = 33100 \text{ N}$$

ed è diretta verso sinistra.

La spinta verticale F_z è invece dovuta al peso immaginario dell'acqua sovrastante la superficie cilindrica ed è diretta verso l'alto. Il peso dell'acqua immaginaria gravante sulla superficie AB è data da

$$F_z = G_{ABO} = \rho g V_{ABO} = \rho g Y \frac{1}{4} \pi R^2 = 1000 \times 9.80665 \times 3 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 1.5^2 = 51990 \text{ N} .$$

b) Il valore assoluto della spinta F è quindi dato da

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{33100^2 + 51990^2} = 61630 \text{ N}$$

e il suo angolo di inclinazione α rispetto all'orizzontale vale

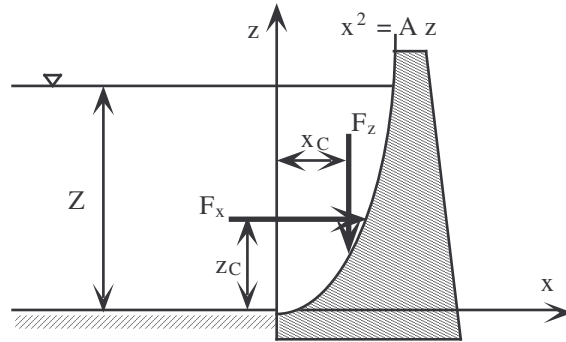
$$\alpha = \arctg\left(\frac{F_z}{F_x}\right) = \arctg\left(\frac{51990}{33100}\right) = 1.004 \text{ rad} = 57.5^\circ .$$

c) Poiché la superficie AB è parte di un cilindro, per ragioni di simmetria la spinta F passa attraverso O e non crea momento nell'apertura della paratoia; il momento è quindi dovuto al solo peso della paratoia applicato al punto G_P

$$M = P h_G = m g h_G = 6000 \times 9.80665 \times 0.6 = 35300 \text{ N.m} .$$

Esercizio 2.6.3

Un frangiflutti ha una curva rappresentata nel piano ($x - z$) dall'equazione $x^2 = A z$ con $A = 2$ m. Se l'altezza dell'acqua di mare raggiunge il valore $Z = 3$ m, calcolare: a) l'entità per metro di lunghezza ($Y = 1$ m) delle componenti orizzontale F_x e verticale F_z della spinta F sul frangiflutti; b) le posizioni x_C e z_C delle componenti rispetto rispettivamente all'asse z e all'asse x .



a) Poiché la pressione atmosferica agisce sulle superfici sia del frangiflutti sia del pelo libero del liquido, la pressione in funzione di z e di x è data dalla sola parte idrostatica della legge di Stevin (2.7)

$$p(z) = -\rho g (z - Z) \quad p(x) = -\rho g \left(\frac{x^2}{A} - Z \right);$$

di conseguenza, sostituendo queste leggi nelle relazioni delle componenti orizzontale F_x e verticale F_z , per unità di lunghezza del frangiflutti si ottiene

$$F_x = \int_0^Z p(z) dz = \int_0^Z -\rho g (z - Z) dz = \rho g \left[Zz - \frac{z^2}{2} \right]_0^Z = \rho g \left(Z^2 - \frac{Z^2}{2} \right) = \frac{\rho g Z^2}{2} = \frac{1000 \times 9.80665 \times 3^2}{2} = 44130 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$F_z = \int_0^{\sqrt{AZ}} p(x) dx = \int_0^{\sqrt{AZ}} -\rho g \left(\frac{x^2}{A} - Z \right) dx = \rho g \left[Zx - \frac{1}{A} \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{AZ}} = \rho g \left(Z\sqrt{AZ} - \frac{1}{A} \frac{A Z \sqrt{AZ}}{3} \right) =$$

$$= \rho g \frac{2}{3} Z \sqrt{AZ} = 1025 \times 9.80665 \times \frac{2}{3} \times 3 \times \sqrt{2 \times 3} = 49240 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Il valore assoluto della spinta F per unità di lunghezza è quindi dato da

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{44130^2 + 49240^2} = 66120 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

b) Le rette d'azione sono ottenute facendo l'equilibrio attorno all'asse y del momento delle componenti per unità di lunghezza e dell'integrale dei momenti delle singole quantità infinitesime per unità di lunghezza. Per la componente in x , sostituendo il valore prima ottenuto per F_x , si ha

$$F_x z_C = \int_{A_z} p(z) z dA_z \quad \rightarrow \quad z_C = \frac{1}{F_x} \int_{A_z} p(z) z dA_z =$$

$$= \frac{1}{F_x} \int_0^Z -\rho g (z - Z) z dz = \frac{1}{F_x} \rho g \left[Z \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^Z = \frac{2}{\rho g Z^2} \frac{\rho g Z^3}{6} = \frac{Z}{3} = \frac{3}{3} = 1.00 \text{ m},$$

mentre per la componente in z , sostituendo il valore prima ottenuto per F_z , si ha

$$F_z x_C = \int_{A_x} p(x) x dA_x \quad \rightarrow \quad x_C = \frac{1}{F_z} \int_{A_x} p(x) x dA_x =$$

$$= \frac{1}{F_z} \int_0^{\sqrt{AZ}} -\rho g \left(\frac{x^2}{A} - Z \right) x dx = \frac{1}{F_z} \rho g \left[Z \frac{x^2}{2} - \frac{1}{A} \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{AZ}} = \frac{1}{F_z} \rho g \left[Z \frac{A Z}{2} - \frac{1}{A} \frac{(A Z)^2}{4} \right]_0^{\sqrt{AZ}} =$$

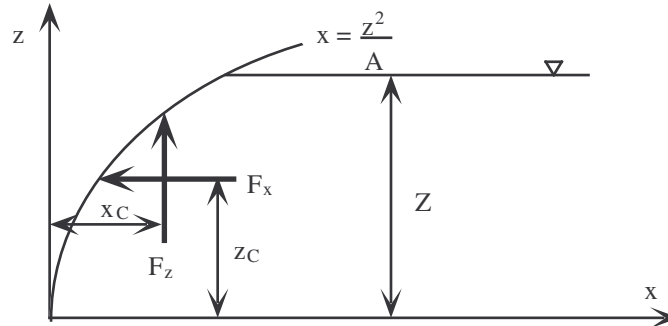
$$= \frac{3}{\rho g 2 Z \sqrt{AZ}} \frac{\rho g A Z^2}{4} = \frac{3}{8} \sqrt{AZ} = \frac{3}{8} \times \sqrt{2 \times 3} = 0.920 \text{ m}.$$

La retta d'azione della spinta F è quindi data da

$$\vec{f} = 0.92 \vec{i} + 1.00 \vec{k}$$

Esercizio 2.6.4

Una paratia, larga $Y = 5$ m, ha una curva rappresentata nel piano ($x - z$) dall'equazione $z^2 = A x$ con $A = 4$ m. Se l'altezza dell'acqua raggiunge il valore $Z = 4$ m, calcolare: a) l'entità delle componenti orizzontale F_x e verticale F_z della spinta F sulla paratia; b) le posizioni x_C e z_C delle componenti rispetto rispettivamente all'asse z e all'asse x .



Poiché la pressione atmosferica agisce sulle superfici sia della paratia sia del pelo libero del liquido, la pressione in funzione di z e di x è data dalla sola parte idrostatica della legge di Stevin (2.7)

$$p(z) = -\rho g (z - Z) \quad p(x) = -\rho g \left[(A x)^{1/2} - Z \right];$$

di conseguenza, sostituendo queste leggi nelle relazioni delle componenti orizzontale F_x e verticale F_z , si ottiene

$$F_x = \int_0^Z Y p(z) dz = \int_0^Z -Y \rho g (z - Z) dz = \rho g Y \left[Z z - \frac{z^2}{2} \right]_0^Z = \rho g Y \left(Z^2 - \frac{Z^2}{2} \right) = \frac{\rho g Y Z^2}{2} = \frac{1000 \times 9.80665 \times 5 \times 4^2}{2} = 392300 \text{ N}$$

$$F_z = \int_0^{Z^2/A} Y p(x) dx = \int_0^{Z^2/A} -Y \rho g \left[(A x)^{1/2} - Z \right] dx = \rho g Y \left[Z x - \frac{2}{3} A^{1/2} x^{3/2} \right]_0^{Z^2/A} = \rho g Y \left(\frac{Z^3}{A} - \frac{2}{3} A^{1/2} \frac{Z^3}{A^{3/2}} \right) = \frac{\rho g Y Z^3}{3 A} = \frac{1000 \times 9.80665 \times 5 \times 4^3}{3 \times 4} = 261500 \text{ N}.$$

Il valore assoluto della spinta F è quindi dato da

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{392300^2 + 261500^2} = 471000 \text{ N} \approx 0.47 \text{ MN}.$$

Le rette d'azione sono ottenute facendo l'equilibrio attorno all'asse y del momento delle componenti e dell'integrale dei momenti delle singole quantità infinitesime. Per la componente in x , sostituendo il valore prima ottenuto per F_x , si ha

$$F_x z_C = \int_{A_z} p(z) z dA_z \quad \rightarrow \quad z_C = \frac{1}{F_x} \int_{A_z} p(z) z dA_z = \frac{1}{F_x} \int_0^Z -\rho g Y (z - Z) z dz = \frac{1}{F_x} \rho g Y \left[Z \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^Z = \frac{2}{\rho g Y Z^2} \frac{\rho g Y Z^3}{6} = \frac{Z}{3} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ m},$$

mentre per la componente in z , sostituendo il valore prima ottenuto per F_z , si ha

$$F_z x_C = \int_{A_x} p(x) x dA_x \quad \rightarrow \quad x_C = \frac{1}{F_z} \int_{A_x} p(x) x dA_x = \frac{1}{F_z} \int_0^{Z^2/A} -\rho g Y \left[(A x)^{1/2} - Z \right] x dx = \frac{1}{F_z} \rho g Y \left[Z \frac{x^2}{2} - \frac{2}{5} A^{1/2} x^{5/2} \right]_0^{Z^2/A} =$$

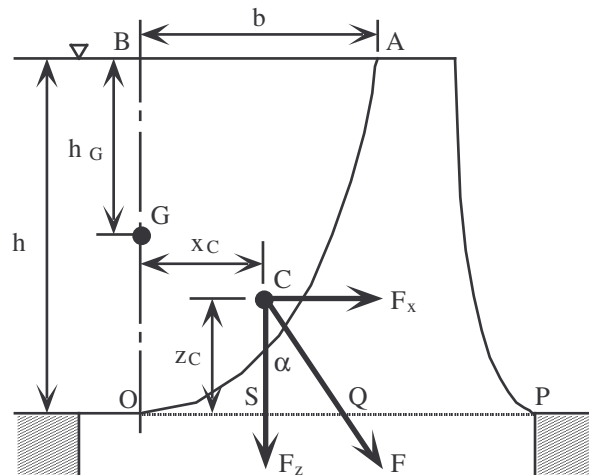
$$= \frac{1}{F_z} \rho g Y \left[\frac{Z^5}{2 A^2} - \frac{2}{5} A^{1/2} \frac{Z^5}{A^{5/2}} \right] = \frac{3 A}{\rho g Y Z^3} \frac{\rho g Y Z^5}{10 A^2} = \frac{3 Z^2}{10 A} = \frac{3 \times 4^2}{10 \times 4} = 1.20 \text{ m} .$$

La retta d'azione della spinta F è quindi data da

$$\vec{f} = 1.20 \vec{i} + 1.33 \vec{k} .$$

Esercizio 2.6.5

La figura mostra la sezione normale di una diga con una faccia parabolica avente il vertice in O. L'asse della parabola è verticale e, al livello dell'acqua, è distante $b = 12.5 \text{ m}$ dalla faccia. Il centro di spinta C della semi-parabola di acqua si trova a $x_C = 4.68 \text{ m}$ dalla verticale per il punto O e l'altezza dell'acqua è $h = 50 \text{ m}$. Calcolare: a) la spinta idrostatica F dovuta all'acqua agente su una larghezza $Y = 1 \text{ m}$ di diga; b) la inclinazione α della spinta F rispetto alla verticale; c) la distanza OQ, dal punto O, del punto Q dove la retta d'azione della risultante taglia il segmento orizzontale OP.



a) Dalla relazione (2.18) si ha che la spinta orizzontale F_x è dovuta alla pressione piezometrica che agisce sulla proiezione OB, lungo il piano verticale, della superficie parabolica OA. Poiché la profondità h_G del baricentro G della superficie OB è data da

$$h_G = \frac{h}{2} ,$$

la pressione idrostatica p_G nel punto G è data da

$$p_G = \rho g h_G = \rho g \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \rho g h$$

e la proiezione verticale S_v della superficie parabolica OA è data da

$$S_v = Y h ,$$

la spinta orizzontale F_x è data dalla pressione p_G moltiplicata per l'area del rettangolo S_v

$$F_x = p_G S_v = \frac{1}{2} \rho g h Y h = \frac{1}{2} \rho g Y h^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.80665 \times 1 \times 50^2 = 12.26 \times 10^6 \text{ N} ,$$

è diretta verso destra e si trova ad un'altezza z_C rispetto al segmento orizzontale OP pari a

$$z_C = \frac{1}{3} h = \frac{1}{3} \times 50 = 16.67 \text{ m} .$$

La spinta verticale F_z è invece dovuta al peso reale dell'acqua sovrastante la superficie parabolica ed è diretta verso il basso. Il peso dell'acqua reale gravante sulla superficie OA è data da

$$F_z = G_{OAB} = \rho g V_{OAB} = \rho g Y A_{OAB} = \rho g Y \frac{2}{3} h b = 1000 \times 9.80665 \times 1 \times \frac{2}{3} \times 50 \times 12.5 = 4.086 \times 10^6 \text{ N}$$

dove A_{OAB} è l'area di metà parabola.

La spinta idrostatica F è allora data da

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{(12.26^2 + 4.086^2) \times 10^6} = 12.9 \times 10^6 \text{ N} .$$

b) L'angolo α di inclinazione di F rispetto alla verticale è dato da

$$\alpha = \arctg\left(\frac{F_x}{F_z}\right) = \arctg\left(\frac{12.26 \times 10^6}{4.086 \times 10^6}\right) = 1.249 \text{ rad} = 71.55^\circ .$$

c) La risultante F taglia OP in Q e, se F_z taglia OP in S , si ha:

$$OQ = OS + SQ = x_C + \frac{1}{3} h \operatorname{tg} \alpha = x_C + \frac{1}{3} h \frac{F_x}{F_z} = 4.68 + \frac{1}{3} \times 50 \times \frac{12.26 \times 10^6}{4.086 \times 10^6} = 54.7 \text{ m} .$$