

CAPITOLO 2

STATICA DEI FLUIDI

2.1. GENERALITÀ

Lo studio dell'equilibrio dei fluidi in quiete, **fluidostatica**, può essere suddiviso in due parti: l'**idrostatica** o statica dei liquidi, cioè dei fluidi praticamente incompressibili, e la **statica dei gas**, cioè dei fluidi compressibili; la parte della statica dei gas che si occupa in particolare dell'atmosfera in quiete e dell'equilibrio dei corpi solidi immersi in essa è denominata **aerostatica**.

Le origini della fluidostatica possono essere fatte risalire ad Archimede e al suo celebre principio, ma l'assetto sistematico, che differisce da quello moderno quasi esclusivamente nella forma, fu dato a essa soltanto sul finire del XVI secolo a opera di Simone Stevin e con importanti contributi di Blaise Pascal.

La distinzione fra idrostatica e statica dei gas e il riconoscimento dei punti in cui le rispettive leggi differiscono è invece relativamente recente e in pratica risale al XIX secolo.

2.2. LEGGE DI STEVIN

La legge di Stevin si ottiene studiando l'equilibrio, rispetto al fluido circostante, del cilindretto fluido con basi orizzontali e di altezza infinitesima dz rappresentato in fig. 2.1.a. Sul volumetto infinitesimo agiscono forze di volume e forze di superficie: più precisamente le forze di volume sono costituite dall'azione del campo gravitazionale e le forze di superficie sono dovute alla pressione esercitata dal fluido circostante.

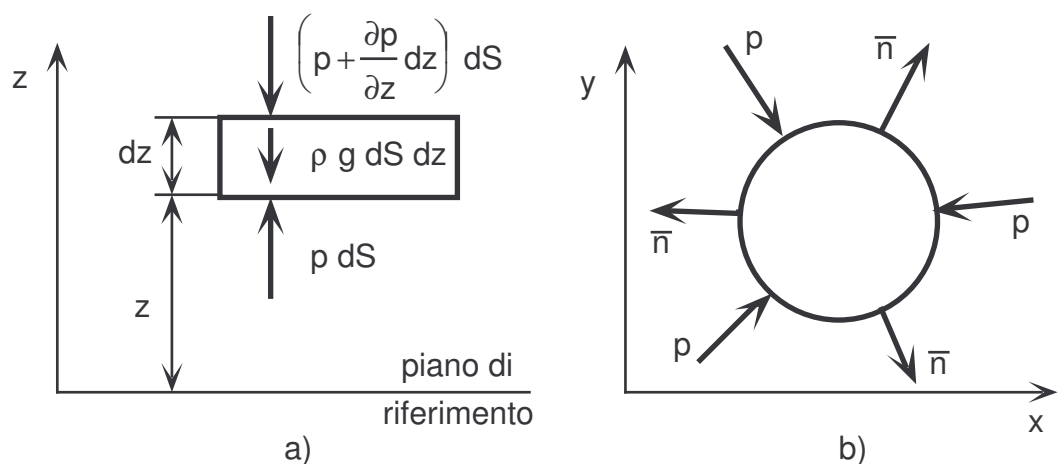


Fig. 2.1.- Equilibrio di un cilindretto fluido: a) vista in sezione; b) vista in pianta.-

Dal momento che non sono applicate forze di altra natura nelle direzioni x e y , la forza di pressione risultante su un piano generico (x,y) deve essere nulla. Dato poi che la forza peso del fluido esaminato non lo porta verso il basso, la forza di pressio-

ne esercitata sulla base inferiore deve essere maggiore di quella agente sulla base superiore e, poiché le aree delle due superfici sono uguali, la pressione deve crescere con l'aumentare della profondità.

Si consideri, in base a quanto riportato in fig. 2.1.b, una sezione orizzontale di forma qualsiasi del cilindretto sul piano (x,y). La forza lineare infinitesima di pressione $d\bar{F}$ lungo il tratto infinitesimo di contorno dl vale $d\bar{F} = p \cdot \bar{n} \cdot dl$, dove $\bar{n}$, rappresentando il versore normale esterno al contorno, dà il verso del vettore $d\bar{F}$. La forza totale è data dall'integrale esteso a tutto il contorno ed essa, come detto, deve essere nulla

$$\bar{F} = \int_l d\bar{F} = \int_l p \bar{n} dl = 0 .$$

In coordinate cartesiane il gradiente di uno scalare generico φ è un vettore $\bar{\Psi}$ di componenti

$$\Psi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \quad \Psi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} , \quad \Psi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

mentre in coordinate cilindriche è un vettore di componenti

$$\Psi_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} , \quad \Psi_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} , \quad \Psi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} ;$$

in entrambi i casi si scrive

$$\bar{\Psi} = \text{grad}(\varphi) .$$

Il teorema del gradiente dice che l'integrale di uno scalare generico φ esteso sulla superficie S (linea l) di contorno di un certo volume V (superficie S) è uguale all'integrale esteso sul volume V (superficie S) del gradiente dello scalare φ ; la superficie S (linea l) deve essere orientata con la normale $\bar{n}$ diretta verso l'esterno del volume V (superficie S). Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_S \varphi \bar{n} dS &= \int_V \text{grad}(\varphi) dV \\ &\downarrow \\ \int_S \varphi dy dz &= \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV \\ \int_S \varphi dz dx &= \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy dz dx = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial y} dV \\ \int_S \varphi dx dy &= \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz dx dy = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z} dV \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \int_l \varphi \bar{n} dS &= \int_S \text{grad}(\varphi) dS \\ &\downarrow \\ \int_l \varphi dy &= \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS . \\ \int_l \varphi dx &= \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy dx = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS \end{aligned}$$

Il passaggio indicato dalla freccia è ottenuto dalla definizione di gradiente.

Dal teorema del gradiente per una quantità scalare, si può trasformare l'integrale sul contorno l in un integrale esteso su tutta l'area S della sezione del cilindretto

$$\int_l p \bar{n} dl = - \int_S \text{grad}(p) dS = 0$$

dove il segno negativo è dovuto al fatto che la normale è orientata verso l'esterno della superficie, mentre la pressione agisce in senso contrario. Di conseguenza si ottiene che sul piano (x,y) è nullo il gradiente della pressione

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.2.1.a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2.2.1.b}$$

e che quindi su questo piano la pressione è costante.

Per l'equilibrio lungo la direzione z , in base a quanto riportato nella fig. 2.1.a, si può scrivere

$$p dS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dS - \rho g dS dz = 0$$

dove il primo termine rappresenta la forza agente sulla base inferiore, il secondo la forza su quella superiore e il terzo la forza peso. Dopo le dovute semplificazioni si ottiene la legge di variazione della pressione con l'altezza z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g ; \quad (2.2.1.c)$$

da essa si nota che la pressione diminuisce con l'aumento della coordinata z , o come si dice più spesso, aumenta con la profondità.

Le relazioni (2.2.1) possono essere sintetizzate nel seguente modo

$$\text{grad}(p) = \rho \bar{G} \quad (2.2.2)$$

dove $\bar{G}$ rappresenta l'intensità del campo del vettore gravità $(0, 0, -g)$.

Se si trascurano le variazioni di g con l'altezza e di ρ con la pressione, cioè se si considera il fluido come incompressibile, l'integrazione della (2.2.1.c) porta a

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 - \rho g (z_2 - z_1) = p_1 - \rho g \Delta z : \quad (2.2.3)$$

la pressione al livello z_2 è uguale alla pressione al livello z_1 diminuita o aumentata del peso di un cilindro fluido di altezza $z_2 - z_1$ e base unitaria secondo che $z_2 - z_1$ sia rispettivamente maggiore o minore di zero; la legge fu enunciata da S. Stevin nella seconda metà del XVI secolo.

La relazione (2.2.3), scritta nel modo seguente

$$p + \rho g z = \text{cost} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad \rightarrow \quad z + \frac{p}{\rho g} = \text{cost} \quad [m] ,$$

esprime il fatto che in seno a un liquido in quiete tutti i piani orizzontali ($z = \text{cost}$) sono isobari ($p = \text{cost}$ se anche $\rho = \text{cost}$ e $g = \text{cost}$), cioè su ciascuno di essi si ha eguale pressione (cosa già ottenuta per altra via). Questa deduzione va bene se l'estensione dei piani sono grandi da trascurare eventuali perturbazioni prodotte dalle pareti del recipiente (effetto capillare), ma non tanto da tenere conto della curvatura terrestre.

I **campi conservativi** sono i campi relativi alle **forze conservative**. Le forze conservative godono della proprietà che, se ad un dato spostamento ds compiuto in un senso corrisponde il lavoro dL , allo spostamento $-ds$ in senso opposto corrisponde il lavoro $-dL$; cioè

$$\int_A^B \bar{F} ds = - \int_B^A \bar{F} ds .$$

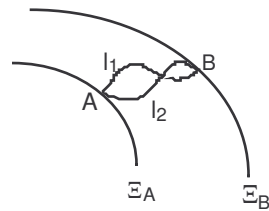
L'integrale dipende solo dai punti iniziali e finali e non dal percorso effettuato: lungo una linea chiusa l'integrale è di conseguenza nullo

$$\oint \bar{F} ds = 0 .$$

Il campo conservativo ammette un potenziale Ξ , cioè una funzione tale che il suo gradiente è uguale all'intensità del campo, cioè al valore che la forza assume nei vari punti del campo

$$\text{grad}(\Xi) = \bar{F} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Xi}{\partial x} = F_x \quad , \quad \frac{\partial \Xi}{\partial y} = F_y \quad , \quad \frac{\partial \Xi}{\partial z} = F_z .$$

Di conseguenza



$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \Xi_B - \Xi_A .$$

E' noto, infatti, che il **campo gravitazionale è conservativo** ed ammette un **potenziale** Ξ definito da

$$\text{grad}(\Xi) = -\vec{G} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Xi}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Xi}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Xi}{\partial z} = g ;$$

allora la relazione (2.2.2) diventa

$$\text{grad}(p) = -\rho \text{grad}(\Xi)$$

e afferma che le superfici equipotenziali del campo gravitazionale, che sono sfere in prima approssimazione e ellissoidi (geodetici) in seconda approssimazione, non solo coincidono con le superfici isobare del fluido, ma anche sono superfici di uguale massa volumica del fluido. Infatti due fluidi non miscibili aventi diversa massa volumica hanno la superficie di separazione coincidente con una superficie equipotenziale.

Se si trascura la variazione di g con l'altezza ma non quella di ρ con la pressione, è possibile sostituire la (2.2.1.c) nella (1.14.1) e ottenere

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{E} dp \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} = -\frac{1}{E} \rho g dz ;$$

l'integrazione porta a

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho^2} = -\frac{g}{E} \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \rightarrow \quad \left(-\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) = -\frac{g}{E} (z_2 - z_1) \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \frac{1}{E} \rho_1 g \Delta z} . \quad (2.2.4)$$

Tuttavia la legge di Stevin è valida con ottima approssimazione per i liquidi entro larghi limiti, data la loro molto piccola compressibilità; infatti l'errore che si commette utilizzando la (2.2.3), con massa volumica costante, nel calcolo della pressione alle profondità oceaniche di circa 10000 metri non raggiunge il 3%. In prima approssimazione, per intervalli limitati della pressione, può essere usata anche per gli aeriformi.

Il termine $\rho g \Delta z$ può anche essere trascurato rispetto a p_1 , quando p_1 è grande rispetto a Δz oppure rispetto a ρ ; nella prima eventualità la pressione può essere considerata costante in ogni punto del fluido, mentre nel secondo, che avviene soprattutto negli aeriformi, è possibile trascurare la differenza di pressione che si verifica su piccoli dislivelli.

Un'altra conseguenza molto nota della legge di Stevin o delle superfici equipotenziali, è il **principio dei vasi comunicanti**: in un sistema di tubi e recipienti contenenti un medesimo liquido omogeneo, aperti in un medesimo ambiente e comunicanti fra loro, le superfici libere del liquido stanno tutte su un medesimo piano orizzontale (approssimazione, su spazi limitati, di un ellissoide geodetico).

2.3. MISURA DELLE PRESSIONI

Nei due rami del tubo a U della fig. 2.2.a, per il principio dei vasi comunicanti, le superfici libere di un liquido omogeneo si trovano allo stesso livello se la pressione esterna agente su di esse è uguale ($p_1 = p_2$). Se invece i due rami comunicano con ambienti rispettivamente alle pressioni p_1 e p_2 differenti fra loro (per esempio $p_1 > p_2$) come indicato nella fig. 2.2.b, le superfici libere si dispongono in modo da presentare il dislivello Δz .

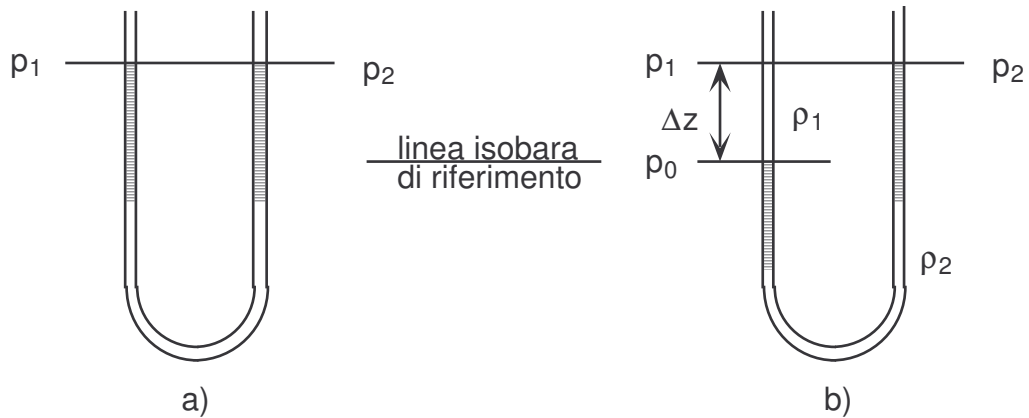


Fig. 2.2.- Manometro differenziale: a) a riposo; b) in funzione.-

Facendo riferimento alla linea isobara p_0 rappresentata in fig. 2.2.b (isobara perché al di sotto di essa esiste solo fluido di massa volumica ρ_2) si può scrivere

$$p_0 = p_1 + \rho_1 g \Delta z = p_2 + \rho_2 g \Delta z$$

e quindi

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_2 - \rho_1) g \Delta z \quad (2.3.1)$$

Note le masse volumiche dei due fluidi, dal dislivello si può risalire alla differenza di pressione. Anche se costituisce il **manometro** più semplice esistente, il tubo a U viene usato in molti rilievi sperimentali di laboratorio, specialmente nel settore delle macchine idrauliche e aerauliche e dei motori a combustione interna; viene detto ad aria libera se un ramo è aperto all'atmosfera: esso misura allora le differenze di pressione relative all'atmosfera. Come liquidi manometrici, a seconda delle esigenze, vengono usati mercurio, acqua, xilolo, ecc.

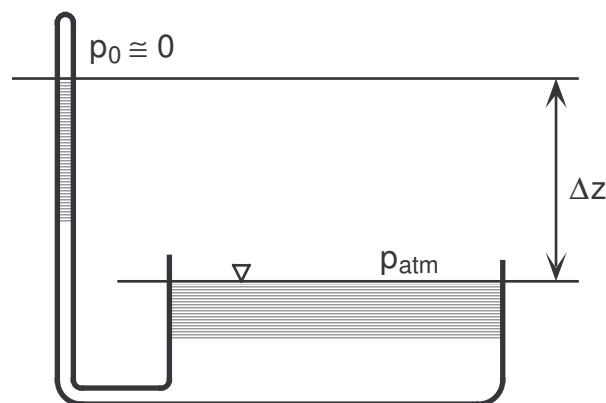


Fig. 2.3.- Barometro di Torricelli.-

Il **barometro a mercurio** di Torricelli non è altro che un manometro a U con un ramo chiuso e un ramo aperto all'atmosfera, nel quale la lunghezza del ramo chiuso deve essere superiore al dislivello che corrisponde alla pressione atmosferica. La famosa esperienza di Torricelli è riportata in fig. 2.3. La pressione p_0 sulla superficie libera nell'interno del tubo (camera barometrica) è praticamente nulla e alla profondità Δz sotto questa superficie la pressione è $p_{\text{atm}} = \rho \cdot g \cdot \Delta z$.

Nel 1644 Torricelli per primo ebbe l'idea che l'acqua salisse nelle pompe idrauliche perché premuta dalla pressione atmosferica esterna e non perché attirata dal vuoto, secondo l'allora corrente teoria aristotelica dell'**horror vacui** da parte della natura. Per dimostrare la sua tesi, conoscendo il peso specifico del mercurio, si mise a calcolare quanto questo avrebbe potuto salire per effetto della pressione atmosferica rispetto all'acqua. Dal calcolo ottenne proprio quel valore di circa 76 cm che l'esperimento gli confermò perfettamente. La notizia si diffuse rapidamente e dette l'avvio a molti altri esperimenti, tra cui quelli di Pascal, che ripeté la prova anche in montagna (sul Puy de Dôme). Trovando valori più bassi, compatibili con la legge di Stevin, si convinse della validità della teoria di Torricelli.

Convenzionalmente il valore normale della pressione atmosferica al livello del mare è stato fissato in

$$p_{\text{atm}} = 101325 \text{ Pa} = 1.01325 \text{ bar} \quad (2.3.2)$$

pari ad un'altezza di mercurio, puro a 0 °C, di $\Delta z = 0.760 \text{ m}$ con una massa volumica pari a $\rho = 13595 \text{ kg/m}^3$, dove l'accelerazione di gravità è uguale a $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$.

2.4. CARICO PIEZOMETRICO E CARICO ASSOLUTO

Si è già visto che in condizioni di quiete la superficie di separazione di un liquido con un aeriforme o con il vuoto è un piano orizzontale. Tale superficie prende il nome di **pelo libero del liquido**.

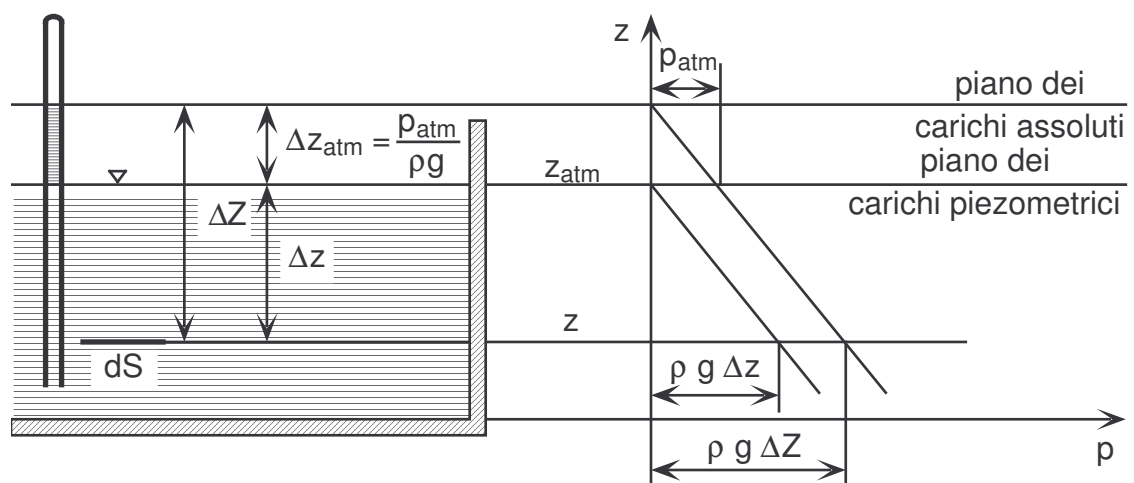


Fig. 2.4.- Rappresentazione grafica del carico piezometrico e del carico assoluto.-

Si consideri, come riportato in fig. 2.4, un liquido di massa volumica ρ in quiete all'interno di un recipiente aperto all'atmosfera e si isoli una superficie infinitesima orizzontale dS all'altezza z (cioè alla profondità Δz sotto il pelo libero). Se sul pelo libero agisce la pressione atmosferica data dalla relazione (2.3.2) (nei calcoli tecnici si

assume spesso $p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$), sulla superficie dS agirà la forza complessiva dovuta all'azione della pressione atmosferica sommata al peso della colonna liquida ad essa sovrastante. Infatti, dalla legge di Stevin si ottiene

$$p_{\text{atm}} + \rho g z_{\text{atm}} = p + \rho g z \quad \rightarrow \quad p = p_{\text{atm}} + \rho g \Delta z \quad \rightarrow \quad p = p_{\text{atm}} + p'$$

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + z_{\text{atm}} = \frac{p}{\rho g} + z \quad \rightarrow \quad \frac{p}{\rho g} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \Delta z \quad \rightarrow \quad \Delta Z = \Delta z_{\text{atm}} + \Delta z$$

dove Δz_{atm} rappresenta l'altezza in metri di colonna di liquido corrispondente alla pressione atmosferica; di conseguenza

$$dF = p dS = (p_{\text{atm}} + p') dS = \rho g (\Delta z_{\text{atm}} + \Delta z) dS = \rho g \Delta Z dS$$

rappresenta la forza infinitesima agente sulla superficie infinitesima dS .

La pressione p viene chiamata **pressione assoluta**, mentre la pressione $p' = \rho g \Delta z$ viene chiamata **pressione idrostatica** alla profondità Δz sotto il pelo libero. L'altezza $\Delta Z = p/(\rho g)$ viene definita come **carico assoluto**, mentre l'altezza Δz come **carico piezometrico**. Il piano che si trova sopra il pelo libero della quantità $\Delta z_{\text{atm}} = p_{\text{atm}}/(\rho g)$ è detto **piano dei carichi assoluti**, mentre quello contenente il pelo libero è detto **piano dei carichi piezometrici**.

2.5. SPINTA SOPRA SUPERFICI PIANE

In seno ad una massa liquida in quiete, soggetta solamente all'azione del peso proprio, si immagini isolata una superficie piana S comunque inclinata rispetto ad un piano orizzontale; la situazione è rappresentata in fig. 2.5.

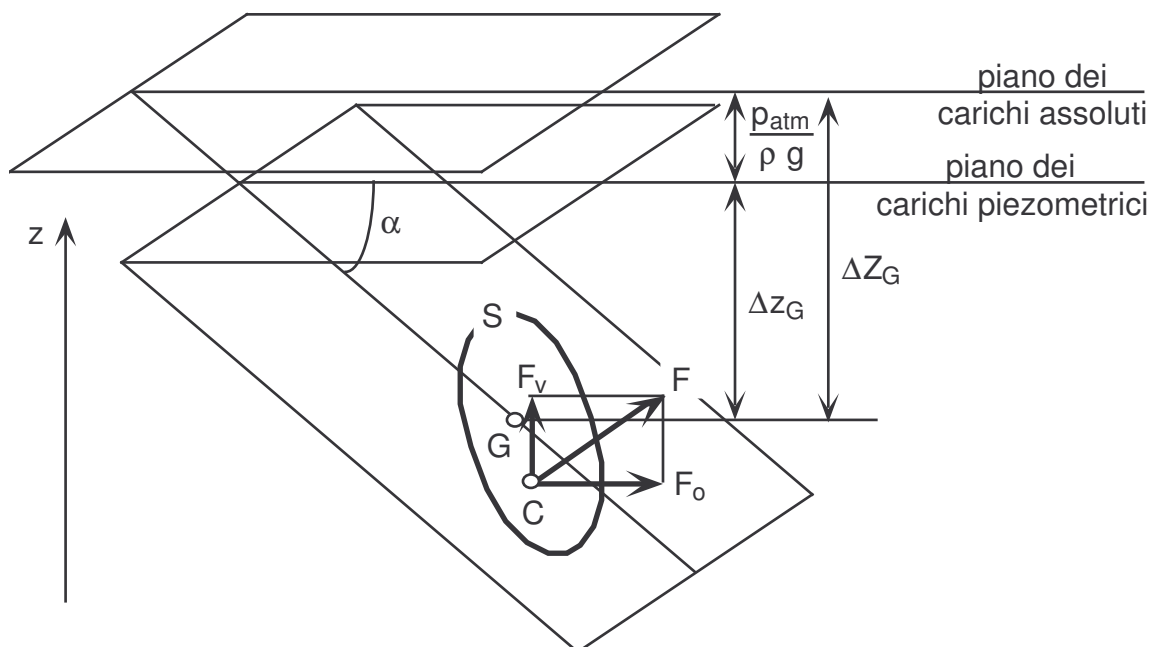


Fig. 2.5.- Spinta sopra una superficie piana immersa comunque inclinata.-

All'azione che il liquido esercita su una delle due facce si dà il nome di:

- spinta idrostatica**, se nel calcolarne il valore si prescinde dall'influenza della pressione atmosferica sul pelo libero;

b) **spinta assoluta**, se nel calcolarne il valore si tiene conto anche del contributo della pressione atmosferica sul pelo libero.

Le spinte, sia idrostatica che assoluta, sono sempre normali alla superficie considerata, diretta in modo da generare una compressione ed applicata in un particolare punto detto **centro di spinta**.

La superficie rispetto alla quale la spinta viene calcolata può essere bagnata dalle due parti, ad esempio la paratia di divisione fra due masse liquide, o può far parte del contorno della massa liquida, ad esempio la parete di un contenitore. Nel primo caso, se la paratia è libera, la spinta esercitata dal liquido che sta da una parte è controbilanciata dalla spinta di quello che sta dall'altra; nel secondo caso è assorbita dalla reazione della parete.

2.5.1. SPINTA IDROSTATICA

Come già visto, la spinta idrostatica che il liquido esercita sulla superficie S è data dal peso del liquido sovrastante P . Se il volume infinitesimo che insiste sulla superficie infinitesima dS è dato da

$$dV = \Delta z \, dS ,$$

il volume totale V è dato dalla seguente espressione

$$V = \int_V dV = \int_S \Delta z \, dS = \Delta z_G \, S$$

dove l'ultimo termine è stato ottenuto dal teorema che consente di calcolare il momento statico di una superficie rispetto ad un piano (in questo caso il piano dei carichi piezometrici) come il prodotto dell'area della superficie stessa volte la distanza del suo baricentro dal piano.

Da ciò consegue che, se la massa volumica del liquido è considerata costante, la spinta idrostatica è indipendente dall'inclinazione della superficie e vale

$$F_i = P = \rho \, g \, V = \rho \, g \, \Delta z_G \, S . \quad (2.5.1.1)$$

Poiché nel baricentro G della superficie S la pressione vale

$$p_G = \rho \, g \, \Delta z_G , \quad (2.5.1.2)$$

la relazione (2.5.1.1) può anche essere scritta nel modo seguente

$$F_i = \rho \, g \, \Delta z_G \, S = p_G \, S . \quad (2.5.1.3)$$

2.5.2. SPINTA ASSOLUTA

La spinta assoluta tiene conto del contributo della pressione esterna agente sul pelo libero, pari nella maggioranza dei casi a quella atmosferica p_{atm} . Se si indica con Δz_G (vedi fig. 2.5) la profondità del baricentro della sezione sotto il piano dei carichi assoluti in modo che, sostituendo la (2.5.1.2), valga la relazione

$$\Delta Z_G = \Delta z_G + \frac{p_{atm}}{\rho \, g} = \frac{p_G}{\rho \, g} + \frac{p_{atm}}{\rho \, g} = \frac{1}{\rho \, g} (p_G + p_{atm}) , \quad (2.5.2.1)$$

la spinta assoluta, in base anche alle (2.5.1.1) e (2.5.1.3), diviene

$$F_a = \rho \, g \, \Delta Z_G \, S = \rho \, g \left(\Delta z_G + \frac{p_{atm}}{\rho \, g} \right) S = \rho \, g \, \Delta z_G \, S + p_{atm} \, S =$$

$$= F_i + p_{atm} S = p_G S + p_{atm} S = (p_G + p_{atm}) S . \quad (2.5.2.2)$$

2.5.3. COMPONENTI DELLA SPINTA

Poiché la spinta su una superficie piana immersa in un liquido in quiete è normale alla superficie stessa, la sua linea d'azione, tranne che nel caso di superficie verticale, sarà inclinata sull'orizzontale ed ammetterà due componenti; in fig. 2.5 sono rappresentate le componenti orizzontale F_o e verticale F_v o della spinta idrostatica o della spinta assoluta. Le componenti della spinta idrostatica diventano

$$F_{io} = \rho g \Delta z_G S \sin \alpha \quad (2.5.3.1)$$

$$F_{iv} = \rho g \Delta z_G S \cos \alpha \quad (2.5.3.2)$$

e quelle della spinta assoluta diventano

$$F_{ao} = \rho g \Delta Z_G S \sin \alpha \quad (2.5.3.3)$$

$$F_{av} = \rho g \Delta Z_G S \cos \alpha . \quad (2.5.3.4)$$

Poiché per una superficie generica S , inclinata di un angolo generico α , le proiezioni sui piani verticale S_o ed orizzontale S_v valgono rispettivamente

$$S_o = S \sin \alpha \quad S_v = S \cos \alpha ,$$

le componenti delle spinte (2.5.3.1) ÷ (2.5.3.4), in base anche alla (2.5.1.2) e alla (2.5.2.1), diventano

$$F_{io} = \rho g \Delta z_G S \sin \alpha = \rho g \Delta z_G S_o = p_G S_o \quad (2.5.3.5)$$

$$F_{iv} = \rho g \Delta z_G S \cos \alpha = \rho g \Delta z_G S_v = p_G S_v \quad (2.5.3.6)$$

$$F_{ao} = \rho g \Delta Z_G S \sin \alpha = \rho g \Delta Z_G S_o = (p_G + p_{atm}) S_o \quad (2.5.3.7)$$

$$F_{av} = \rho g \Delta Z_G S \cos \alpha = \rho g \Delta Z_G S_v = (p_G + p_{atm}) S_v . \quad (2.5.3.8)$$

2.5.4. CENTRO DI SPINTA

La spinta esercitata da una massa liquida in quiete sopra una superficie piana è applicata in un particolare punto che prende il nome di **centro di spinta** o **centro di pressione**. Tale punto non coincide con il baricentro dell'area, tranne nel caso di superficie orizzontale, ma si trova spostato verso il basso.

La spinta, infatti, essendo la risultante delle spinte infinitesime che agiscono ciascuna su una porzione infinitesima dell'area totale, dipende dalla pressione che cresce con la profondità e sposta il suo centro di applicazione verso il basso rispetto al baricentro. Solo se la superficie è orizzontale, la pressione è la stessa in ogni punto della superficie e il centro di spinta C coincide con il baricentro G .

In fig. 2.6 si è scelto come asse x' la retta di massima pendenza del piano contenente la superficie S e passante per il baricentro e come asse y' la retta di intersezione del piano contenente la superficie S con il piano dei carichi piezometrici (piano del pelo libero). Il centro di spinta si trova sull'asse x' , al di sotto di G , solo se l'area è simmetrica rispetto a tale asse; nel caso più generale, come indicato nella figura, il centro di spinta si trova, invece, spostato lateralmente.

Il momento della spinta sulla superficie S rispetto all'asse y' è dato dall'integrale, esteso su S , del prodotto della spinta sulla superficie infinitesima dS volte la distanza generica dall'asse y' lungo la direzione x' ; esso, per la definizione di centro di spinta, è uguale al momento della spinta totale sulla superficie S applicata nel suo centro di spinta rispetto all'asse y'

$$\int_S p dS x' = F_i x'_C .$$

Poiché la legge di variazione della pressione p lungo la x' deriva dalla legge di Stevin

$$p = \rho g \Delta z = \rho g x' \sin \alpha$$

e poiché la spinta idrostatica può essere anche scritta

$$F_i = \rho g \Delta z_G S = \rho g x'_G \sin \alpha S , \quad (2.5.4.1)$$

alla fine si ottiene

$$\rho g \sin \alpha \int_S x'^2 dS = \rho g x'_G \sin \alpha S x'_C \quad \rightarrow \quad x'_C = \frac{J_{y'y'}}{x'_G S} \quad (2.5.4.2)$$

dove il termine

$$J_{y'y'} = \int_S x'^2 dS . \quad (2.5.4.3)$$

rappresenta il momento d'inerzia dell'area S rispetto all'asse y' .

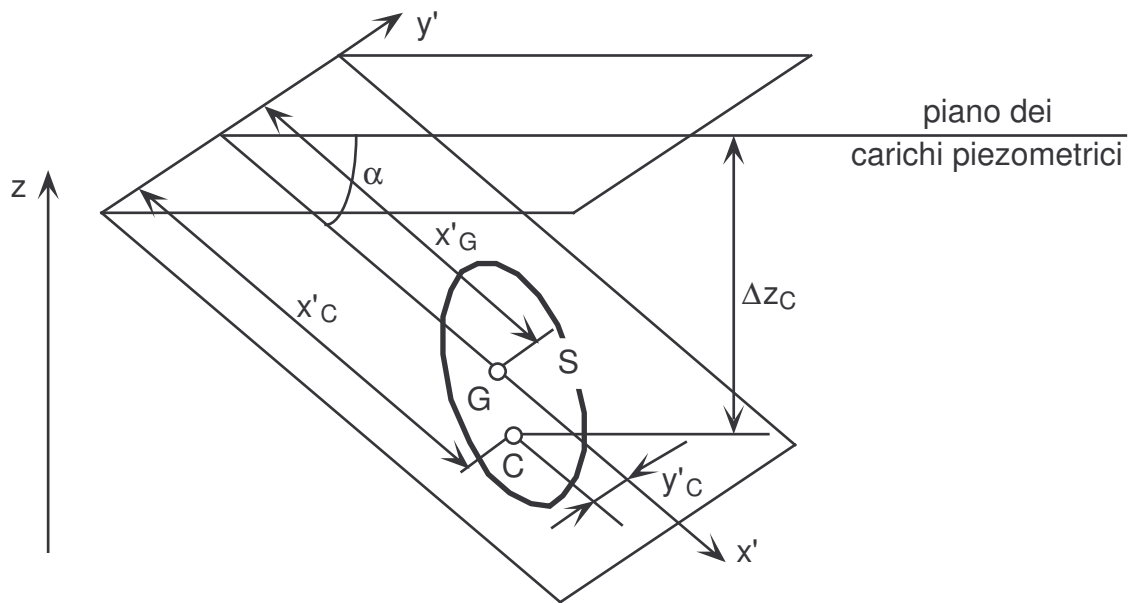


Fig. 2.6.- Centro di spinta di una superficie piana immersa comunque inclinata.-

Se si calcolano i momenti della spinta rispetto all'asse x' si ottengono i seguenti passaggi simili a quelli già visti nel caso dell'asse y'

$$\int_S p dS y' = F_i y'_C$$

$$\rho g \sin \alpha \int_S x' y' dS = \rho g x'_G \sin \alpha S y'_C \quad \rightarrow \quad y'_C = \frac{J_{x'y'}}{x'_G S} \quad (2.5.4.4)$$

dove il termine

$$J_{x'y'} = \int_S x' y' dS . \quad (2.5.4.5)$$

rappresenta il momento d'inerzia centrifugo dell'area S rispetto agli assi x' e y' fra loro ortogonali.

Nel caso di superfici di forme geometriche semplici e simmetriche, come rettangoli o cerchi, il centro di spinta C si trova sull'asse x' perché $y'_C = 0$, mentre risulta di maggiore interesse la determinazione della quantità x'_C .

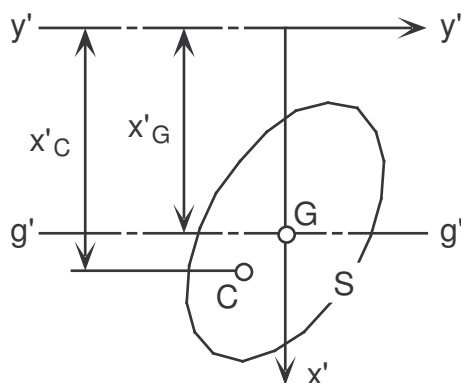


Fig. 2.6.bis.- Posizione del centro di spinta di una superficie piana.-

Figura	Geometria	S	$J_{g'g'}$	$\frac{J_{g'g'}}{S}$
Rettangolo		$B H$	$\frac{B H^3}{12}$	$\frac{H^2}{12}$
Triangolo		$\frac{B H}{2}$	$\frac{B H^3}{36}$	$\frac{H^2}{18}$
Cerchio		$\pi R^2 = \pi \frac{D^2}{4}$	$\pi \frac{R^2}{4} = \pi \frac{D^2}{64}$	$\frac{R^2}{4} = \frac{D^2}{16}$
Semicerchio		$\pi \frac{R^2}{2} = \pi \frac{D^2}{8}$	$0.1102 R^4 = 0.006888 D^4$	$0.07016 R^2 = 0.01754 D^2$

Tab. 2.1.- Proprietà di alcune figure geometriche comuni.-

Nella fig. 2.6.bis viene riportata la situazione della fig. 2.6 riguardante il piano di giacitura della superficie S. Da essa appare chiaro il significato del teorema che determina il valore del momento d'inerzia di area $J_{y'y'}$ della superficie S rispetto all'asse generico $y'-y'$ in funzione di quello baricentrale $J_{g'g'}$ rispetto all'asse $g'-g'$ ad esso parallelo e passante per il baricentro G

$$J_{y'y'} = J_{g'g'} + S x'_G{}^2 ; \quad (2.5.4.6)$$

x'_G rappresenta la distanza fra l'asse $y'-y'$ e l'asse $g'-g'$.

Sostituendo la (2.5.4.2) nella (2.5.4.6) si trova l'abbassamento del centro di spinta rispetto al baricentro $x'_C - x'_G$

$$S x'_C x'_G = J_{g'g'} + S x'_G{}^2 \rightarrow S x'_G (x'_C - x'_G) = J_{g'g'} \rightarrow x'_C - x'_G = \frac{J_{g'g'}}{S x'_G} ;$$

sostituendo poi la (2.5.4.1) e la (2.5.1.3) nella relazione precedente si ha

$$x'_C - x'_G = \frac{J_{g'g'}}{S x'_G} = \frac{J_{g'g'} \rho g \sin \alpha}{F_i} = \frac{J_{g'g'}}{S} \frac{\rho g \sin \alpha}{p_G} ; \quad (2.5.4.7)$$

i valori dei rapporti $J_{g'g'}/S$ di alcune figure geometriche comuni sono riportati nella tab. 2.1.

2.6. SPINTA SOPRA SUPERFICI CURVE

Nella fig. 2.7 l'arco AB rappresenta la traccia di una superficie curva immersa in un fluido, mentre F_{io} e F_{iv} sono le componenti orizzontale e verticale della spinta idraulica F_i del liquido sulla superficie AB; in particolare nella fig. 2.7.a il liquido si trova sopra la superficie immersa ABRQ, mentre nella fig. 2.7.b il liquido si trova sotto la superficie immersa ASB.

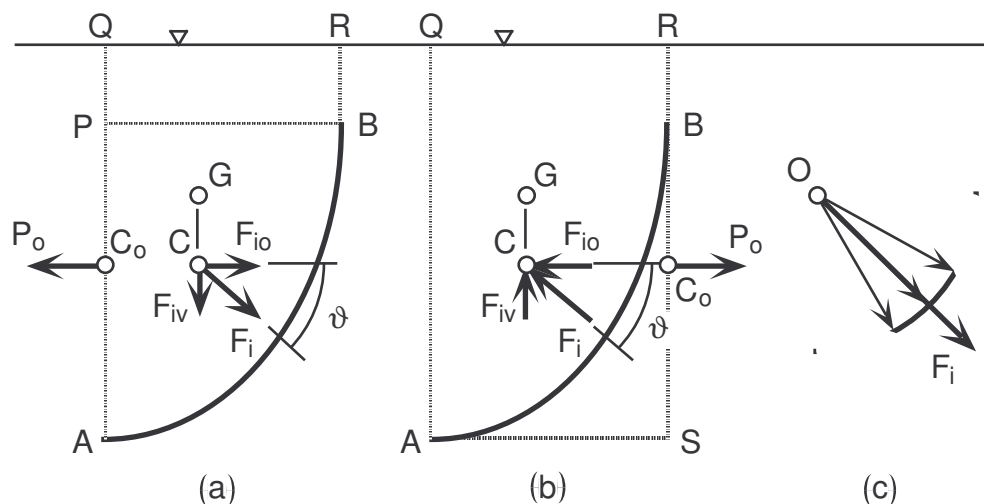


Fig. 2.7.- Superficie curva immersa.-

Considerando dapprima il caso del liquido situato sopra la superficie immersa mostrato nella fig. 2.7.a, se APQ è un piano verticale passante per A, la sezione di fluido ABP è in equilibrio orizzontale e di conseguenza la componente orizzontale F_{io} è uguale alla forza P_0 sulla superficie AP proiezione di AB fatta sul piano verticale

APQ; per di più, affinché si verifichi l'equilibrio, P_o e F_{io} devono trovarsi sulla stessa retta d'azione e di conseguenza la componente F_{io} passa per il centro di pressione C_o di AP. Infine, tutto il peso del fluido ABRQ agente sopra AB deve essere sopportato dalla superficie curva e di conseguenza, per l'equilibrio verticale, la componente verticale F_{iv} deve essere uguale al peso del fluido ABRQ, deve essere diretta verso il basso e deve passare attraverso il baricentro G del fluido **reale** effettivamente presente.

Considerando poi il caso del liquido situato sotto la superficie immersa mostrato nella fig. 2.7.b, se SBR è un piano verticale passante per B, la sezione di fluido ASB è in equilibrio orizzontale e, come prima, la componente orizzontale F_{io} è uguale alla forza P_o e passa per il centro di pressione C_o di SB. Se la superficie AB viene tolta e se lo spazio ABRQ è riempito di liquido, per l'equilibrio verticale la componente verticale F_{iv} deve essere uguale al peso di questo fluido, deve essere diretta verso l'alto e deve passare attraverso il baricentro G del fluido **immaginario** non effettivamente presente.

Riassumendo, si verifica che:

- a) la forza orizzontale su una superficie curva immersa in un fluido è uguale alla forza sulla proiezione della superficie sul piano verticale;
- b) la forza verticale su una superficie curva immersa in un fluido è uguale al peso del fluido che "sta" oppure "potrebbe stare" verticalmente su di essa.

La forza di pressione di ogni elemento infinitesimo di area della superficie curva agisce ad angolo retto sulla superficie e quindi è radiale se la superficie è parte di un cilindro. Tutte queste forze passano attraverso il centro di curvatura O (fig. 2.7.c) e non hanno momento attorno ad O. Poiché la forza risultante F_i rappresenta l'effetto combinato di tutte le forze elementari, allora anche F_i deve passare attraverso il centro di curvatura O.

2.7. CORPI IMMERSI E LORO EQUILIBRIO

Si consideri un corpo di volume V totalmente immerso in un liquido in quiete. Sulla superficie infinitesima dS del suo contorno S la pressione circostante esercita una forza infinitesima $dF = p \cdot dS$; ricorrendo al teorema del gradiente dato nel § 2.2, la forza totale agente sul corpo immerso assume la relazione seguente

$$\bar{F} = \int_S d\bar{F} = \int_S p \bar{n} dS = - \int_V \text{grad}(p) dV$$

dove il segno negativo è dovuto al fatto che la normale è orientata verso l'esterno del volume, mentre la pressione agisce in senso contrario

Poiché si è visto che la pressione all'interno di un liquido in quiete varia solo in direzione perpendicolare agli ellissoidi geodetici, la relazione precedente può scriversi in base alla (2.2.1.c) nel modo seguente

$$F_z = - \int_V \text{grad}(p) dV = - \int_V \frac{\partial p}{\partial z} dV = \rho g \int_V dV = \rho g V . \quad (2.7.1)$$

Si perviene alla dimostrazione di quello che passa sotto il nome di **principio di Archimede**: un corpo immerso in un liquido in quiete è sottoposto ad una spinta idrostatica diretta verso l'alto ed uguale, in valore assoluto, al peso del liquido spostato dal corpo.

Per contro, se il volume V considerato è occupato dal liquido stesso, e non da un corpo di natura differente, si può affermare che la spinta della pressione sul volume di liquido V deve equilibrare la sua forza peso

$$-\int_V \frac{\partial p}{\partial z} dV = \rho g V \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

e quindi si ottiene, in modo elegante, la (2.2.1.c) senza far ricorso all'equazione di equilibrio di Stevin.

La spinta è applicata in un punto C, chiamato con un termine proveniente dall'architettura navale **centro di carena**, che coincide, se si considera che ρ e g non varino con l'altezza, con il baricentro del volume del liquido spostato dal corpo.

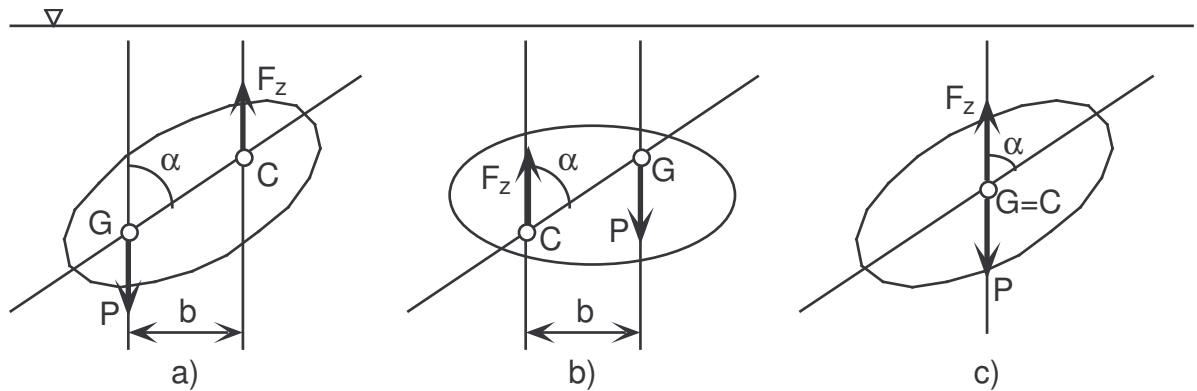


Fig. 2.7.- Equilibrio per i corpi sommersi: a) stabile; b) instabile; c) indifferente.-

Se il peso è maggiore della spinta il corpo affonda (questo caso non ha utilità pratica), mentre se è minore emerge dalla superficie del pelo libero per una parte di volume V' tale che il peso del liquido spostato $\rho g(V - V')$ eguagli il peso P (questo caso verrà esaminato nel § 2.8). Affinché invece un corpo immerso in un liquido sia in equilibrio è necessario che il suo peso P , applicato al baricentro G del corpo, sia uguale e contrario alla spinta F_z prima calcolata, applicata al centro di carena C , e che il baricentro e il centro di carena si trovino sulla stessa verticale.

Nella situazione descritta l'equilibrio è indifferente per qualsiasi traslazione orizzontale e per le rotazioni attorno ad assi verticali. Per le rotazioni attorno ad assi orizzontali si possono verificare le tre situazioni seguenti:

- a) l'equilibrio è **stabile** se il baricentro è più basso del centro di carena (fig. 2.7.a); per una piccola rotazione α si crea una **coppia raddrizzante**, di momento $P.b$, tanto più elevata quanto più basso è il baricentro rispetto al centro di carena;
- b) l'equilibrio è **instabile** se il baricentro è più alto del centro di carena (fig. 2.7.b); per una piccola rotazione α si crea una **coppia sbandante** che tende ad allontanare sempre di più il corpo dalla posizione di equilibrio instabile fino a portare il baricentro al di sotto del centro di carena in una posizione di equilibrio stabile;
- c) l'equilibrio è **indifferente** se il baricentro coincide con il centro di carena (fig. 2.7.c).

2.8. CORPI GALLEGGIANTI E LORO EQUILIBRIO

Quando un corpo, immerso in un liquido, affiora parzialmente dal pelo libero si dice che galleggia. La parte immersa è detta **carena** con un termine ereditato dall'architettura navale e il suo volume, moltiplicato per la massa volumica del fluido, ha peso uguale a quello del corpo; per il principio di Archimede, infatti, la spinta, cui il corpo è sottoposto, è diretta verso l'alto ed è uguale e contraria al peso del liquido spostato dalla carena. Il piano che separa la parte emersa da quella immersa è detto **piano di galleggiamento** e il baricentro della carena, considerata come formata dal liquido in cui è immersa, è detto **centro di carena** o **centro di galleggiamento**.

Affinché il corpo galleggiante sia in equilibrio, si deve verificare che, come nel caso dei corpi immersi, il baricentro del corpo e il centro della carena si trovino sulla stessa verticale e, in più, che il piano di galleggiamento coincida con il pelo libero del liquido. A differenza invece di quanto avviene in un corpo totalmente immerso, in un corpo galleggiante una rotazione α attorno ad un asse orizzontale, oltre a modificare la forma e quindi il volume della carena, cambia anche la posizione del centro di carena all'interno del corpo.

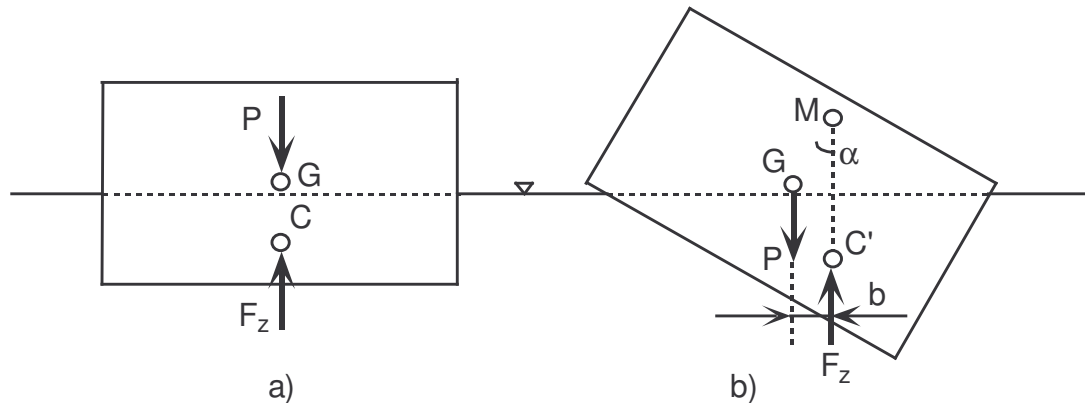


Fig. 2.8.- Equilibrio stabile di un galleggiante.-

La fig. 2.8.a mostra un corpo solido parzialmente immerso in equilibrio. Il suo peso P passa attraverso il centro di gravità G e la spinta F_z attraverso il centro di galleggiamento C , che è il centro di gravità del fluido spostato, e le forze P e F_z si trovano sulla stessa retta d'azione. Quando il corpo si allontana dalla posizione di equilibrio, P continua ad agire su G . Il volume del liquido spostato rimane costante (perché $F_z = P$) ma di solito cambiano la forma del volume e la posizione del suo centro di gravità e quindi del suo centro di galleggiamento. Infatti nella fig. 2.8.a il fluido spostato è, nella sezione, rettangolare mentre nella fig. 2.8.b è triangolare e il centro di galleggiamento si sposta in C' . Si verifica che F_z e P non si trovano più sulla stessa retta d'azione ma creano una coppia di reazione $M_r = P b$, che nella fig. 2.8.b è raddrizzante (perché tende a riportare il corpo nella sua posizione iniziale) e invece nella fig. 2.9.b è ribaltante (perché tende ad allontanare ancora di più il corpo dalla sua posizione iniziale).

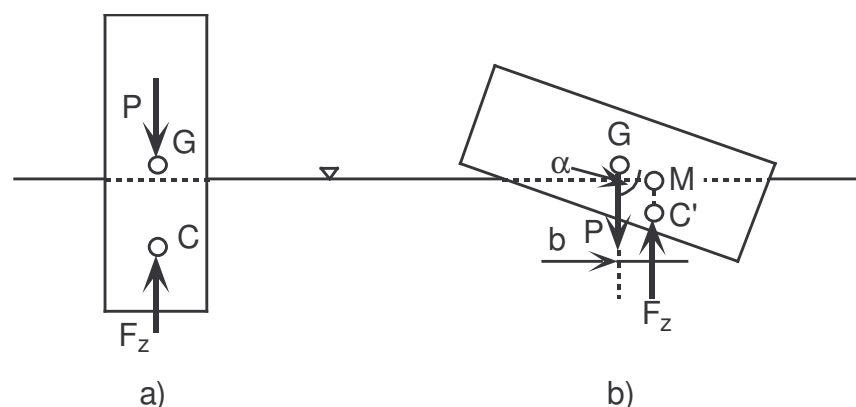


Fig. 2.9.- Equilibrio instabile di un galleggiante.-

Il **metacentro** M è il punto su cui la linea di azione di S , a causa dello spostamento, taglia la verticale originaria che passa attraverso il centro di gravità G del corpo,

mentre la distanza GM è la **altezza metacentrica**.

Per piccoli angoli di rotazione ϑ il momento di reazione vale $M_r = P b = P GM \alpha$ (perché $\text{tg}\alpha = \sin\alpha = \alpha$).

Confrontando la fig. 2.8 con la fig. 2.9 si può notare che:

- 1) Se M è sopra G si crea un momento raddrizzante, GM è vista come positiva e l'equilibrio è stabile.
- 2) Se M è sotto G si crea un momento ribaltante, GM è vista come negativa e l'equilibrio è instabile.
- 3) Se M e G coincidono il corpo è in equilibrio indifferente.

Poiché un corpo galleggiante può essere spostato dalla sua posizione di equilibrio in ogni direzione, è frequente nel caso di un natante considerare gli spostamenti attorno all'asse longitudinale (rollio) e a quello trasversale (beccheggio); la posizione del metacentro e il valore dell'altezza metacentrica sono di solito differenti per il rollio e per il beccheggio.