

CAPITOLO 3

CINEMATICA DEI FLUIDI

- 3.0.- RICHIAMI TEORICI
- 3.1.- PORTATA E VELOCITÀ MEDIA
- 3.2.- CONSERVAZIONE DELLA MASSA
- 3.3.- EQUAZIONE DI CONTINUITÀ
- 3.4.- DEFORMAZIONI
- 3.5.- VORTICITÀ

3.0.- RICHIAMI TEORICI

Portata massica

Per definizione la portata massica G_m rappresenta la massa m che in un intervallo di tempo t passa attraverso una sezione normale al flusso

$$G_m = \frac{m}{t} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]. \quad (3.1)$$

La portata massica dG_m di un filetto fluido diventa allora

$$dG_m = \rho \bar{u} d\vec{S} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

dove ρ è la massa volumica in $[\text{kg}/\text{m}^3]$, $\bar{u}$ è la velocità in $[\text{m}/\text{s}]$, $d\vec{S}$ è la sezione del filetto fluido in $[\text{m}^2]$ e $\bar{u} d\vec{S}$ rappresenta il prodotto scalare dei due vettori in modo che la normale a $d\vec{S}$ formi un angolo acuto con $\bar{u}$, mentre la portata massica G_m di un tubo di flusso diventa allora

$$G_m = \int_S dG_m = \int_S \rho \bar{u} d\vec{S} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

dove S è la sezione del tubo di flusso in $[\text{m}^2]$. Se la massa volumica ρ rimane costante su tutta la sezione S e se anche la velocità $\bar{u}$ rimane costante su tutta la sezione S , assumendo il nome di velocità media, si ha

$$G_m = \rho u S \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \quad (3.2)$$

dove S è la sezione del tubo di flusso normale alla velocità media.

Portata volumetrica

Per definizione la portata volumetrica G_v rappresenta il volume V che in un intervallo di tempo t passa attraverso una sezione normale al flusso

$$G_v = \frac{V}{t} = \frac{G_m}{\rho} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]. \quad (3.3)$$

La portata volumetrica dG_v di un filetto fluido diventa allora

$$dG_v = \frac{dG_m}{\rho} = \bar{u} d\vec{S} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

mentre la portata volumetrica G_v di un tubo di flusso diventa allora

$$G_v = \int_S dG_v = \int_S \bar{u} d\vec{S} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right].$$

Se la velocità rimane costante su tutta la sezione S , assumendo il nome di velocità media, si ha

$$G_v = u S \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]. \quad (3.4)$$

Velocità media

Per definizione la velocità media è quella velocità che, considerata costante su tutta la sezione normale, fa passare la stessa portata massica o volumetrica di fluido (nel caso di portata massica, la massa volumica ρ è considerata costante su tutta la sezione S); dalla (3.2) e dalla (3.4) si ha

$$u = \frac{G_m}{\rho S} = \frac{G_v}{S} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]. \quad (3.5)$$

Conservazione della massa

Se ci si riferisce ad un volume generico V delimitato da una superficie chiusa S , la conservazione della mas-

sa può essere scritta

$$\int_S dG_m = 0 \quad \rightarrow \quad \sum G_{mi} = \sum \rho_i u_i S_i = 0 \quad (3.6)$$

dove S_i è la i -esima superficie appartenente a S attraverso cui il fluido entra nel volume V con velocità u_i negativa o esce dal volume V con velocità u_i positiva. Se il fluido è incompressibile la (3.6) diventa

$$\int_S dG_v = 0 \quad \rightarrow \quad \sum G_{vi} = \sum u_i S_i = 0 \quad (3.7)$$

In un tubo di flusso dalla (3.6) si ricava

$$G_{m1} - G_{m2} = 0 \quad \rightarrow \quad G_{m1} = G_{m2} \quad \rightarrow \quad \rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 \quad (3.8)$$

dove la posizione 1, dalla quale entra fluido, è a monte della posizione 2, dalla quale esce fluido. Se il fluido è incompressibile ($\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{cost}$), dalla (3.4) e dalla (3.8) si ottiene che rimane costante anche la portata volumetrica

$$\rho u_1 S_1 = \rho u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad G_{v1} = G_{v2} \quad (3.9)$$

Equazione di continuità

Con approccio di tipo euleriano, l'equazione di continuità è data dalla relazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\bar{u} \rho) = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \text{grad}(\rho) + \rho \text{div}(\bar{u}) \right] = 0 \quad (3.10)$$

mentre, con approccio di tipo lagrangiano, è data dalla relazione

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\bar{u}) = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \text{grad}(\rho) + \rho \text{div}(\bar{u}) \right] = 0 \quad (3.11)$$

Se il fluido è incompressibile ($\rho = \text{cost}$) la (3.10) e la (3.11) diventano in coordinate cartesiane

$$\text{div}(\bar{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

e in coordinate cilindriche

$$\text{div}(\bar{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(u r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.13)$$

Come conseguenza si ottiene che la velocità è un vettore "solenoidale", cioè a divergenza nulla, solo in un fluido incompressibile.

Deformazioni

In notazione tensoriale la generica deformazione ϵ_{ij} è data da

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.14)$$

dove $\bar{s}$ è il vettore spostamento di componenti (ξ, η, ζ) , i è la direzione della normale al piano su cui la deformazione giace e j è la direzione della deformazione, mentre la variazione di volume e è data da

$$e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \text{div}(\bar{s}) \quad (3.15)$$

In notazione tensoriale la generica velocità di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}$ è data da

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.16)$$

mentre la velocità di variazione di volume $\dot{e}$ è data da

$$\dot{e} = \dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}(\bar{u}) \quad (3.17)$$

Vorticità

Per definizione la vorticità $\vec{\omega}$ è data dal vettore

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{u}) \quad (3.18)$$

avente in coordinate cartesiane le componenti

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.19)$$

e in coordinate cilindriche le componenti

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_\vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r v)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right). \quad (3.20)$$

Se la vorticità (3.18) è nulla, il moto si dice "irrotazionale" ed è applicabile a fluidi non viscosi, mentre se è differente da zero, il moto si dice "rotazionale" ed è applicabile a fluidi viscosi.

3.1.- PORTATA E VELOCITÀ MEDIA

Esercizio 3.1.1

Per contenere le perdite continue, all'interno di un tubo di diametro $D = 5$ cm viene fatta circolare acqua ad una velocità media $u \leq 2$ m/s. Calcolare: a) la portata massica G_m massima; b) la portata volumetrica G_v massima.

- a) Dalla legge della portata massica (3.2) si ha

$$G_m = \rho u S = \rho u \frac{\pi D^2}{4} = 1000 \times 2 \times \frac{\pi \times (5 \times 10^{-2})^2}{4} = 3.927 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

- b) Dalla relazione fra portate volumetrica e massica (3.3) e dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = \frac{G_m}{\rho} = \frac{3.927}{1000} = 3.93 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 3.93 \frac{\text{litri}}{\text{s}}$$
$$G_v = u S = u \frac{\pi D^2}{4} = 2 \times \frac{\pi \times (5 \times 10^{-2})^2}{4} = 3.93 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Esercizio 3.1.2

Un volume $V = 60$ litri di acqua sono scaricati da un contenitore in un tempo $t = 25$ s attraverso un'apertura circolare di diametro $D = 40$ mm. Calcolare: a) la portata volumetrica G_v ; b) la velocità media di scarico u .

Il volume in unità fondamentali vale

$$V = 60 \text{ litri} = 60 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 0.060 \text{ m}^3.$$

- a) Dalla definizione di portata volumetrica (3.3) si ha

$$G_v = \frac{V}{t} = \frac{60 \times 10^{-3}}{25} = 2.40 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

- b) Dalla definizione di velocità media (3.5) si ha

$$u = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 2.40 \times 10^{-3}}{\pi \times (40 \times 10^{-3})^2} = 1.91 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esercizio 3.1.3

Un pistone di diametro $D_p = 65$ mm scorre coassialmente all'interno di un cilindro di diametro $D_c = 70$ mm alla velocità $u_p = 50$ mm/s. Il cilindro è riempito di acqua che, quando il pistone si muove, esce dall'intercapedine fra cilindro e pistone. Calcolare la velocità media u di uscita dell'acqua.

Il volume V_p che nel tempo t il pistone occupa all'interno del cilindro è uguale al volume V di fluido che nello stesso tempo t esce attraverso l'intercapedine; allora dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$\frac{V_p}{t} = \frac{V}{t} \quad \rightarrow \quad G_{vp} = G_v \quad \rightarrow \quad u_p S_p = u (S_c - S_p) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad u = u_p \frac{S_p}{S_c - S_p} = u_p \frac{D_p^2}{D_c^2 - D_p^2} = 50 \times 10^{-3} \times \frac{65^2}{70^2 - 65^2} = 0.313 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esercizio 3.1.4

Un fluido incompressibile scorre dentro un tubo convergente, che in una lunghezza $L = 3$ m varia linearmente il diametro da $D_1 = 0.40$ m all'entrata a $D_2 = 0.20$ m all'uscita. Il moto è stazionario e la portata volumetrica che circola è $G_v = 0.03$ m³/s. Calcolare la accelerazione a del fluido.

Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u S \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.03}{\pi \times 0.40^2} = 0.2387 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2 &= \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.03}{\pi \times 0.20^2} = 0.9549 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Poiché la velocità varia linearmente da u_1 all'entrata a u_2 all'uscita, l'accelerazione a è costante e di conseguenza l'intervallo di tempo Δt impiegato dal fluido a percorrere il tratto lungo L con accelerazione a costante è uguale a quello impiegato a percorrerlo con la velocità u costante; la velocità u è data da

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{0.2387 + 0.9549}{2} = 0.5968 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

l'intervallo di tempo Δt impiegato a percorrere il tubo è dato da

$$\Delta t = \frac{L}{u} = \frac{3}{0.5968} = 5.027 \text{ s}$$

e in definitiva l'accelerazione a è data da

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta t} = \frac{0.9549 - 0.2387}{5.027} = 0.143 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Esercizio 3.1.5

Una portata massica di aria pari a $G_m = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$ alla pressione $p = 2.5 \text{ bar}$ e alla temperatura $T = 50^\circ \text{C}$ circola all'interno di una tubo di diametro $D = 10 \text{ mm}$. Calcolare la velocità media u .

Dall'equazione di stato (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica R dell'aria, si ha

$$\rho = \frac{p}{R T} = \frac{2.5 \times 10^5}{287 \times (273.15 + 50)} = 2.696 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e dalla definizione di velocità media (3.5) si ha

$$u = \frac{G_m}{\rho S} = \frac{4 G_m}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \times 2.5 \times 10^{-3}}{2.696 \times \pi \times (10 \times 10^{-3})^2} = 11.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esercizio 3.1.6

Una tubazione, attraverso cui circola con moto permanente una portata massica di acqua pari a $G_m = 100 \text{ kg/s}$, presenta un tratto tronco - conico lungo $L = 2 \text{ m}$ che restringe il diametro da $D_1 = 0.5 \text{ m}$ a $D_2 = 0.3 \text{ m}$. Calcolare: a) le caratteristiche del moto; b) l'accelerazione media a nel tratto tronco - conico.

a) Dalla relazione fra portata massica e portata volumetrica (3.3) si ha

$$G_v = \frac{G_m}{\rho} = \frac{100}{1000} = 0.10 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

e poiché la portata volumetrica rimane costante, dalla definizione di velocità media (3.5), si ha

$$u_1 = \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.10}{\pi \times 0.5^2} = 0.5093 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.10}{\pi \times 0.3^2} = 1.415 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) L'accelerazione media può essere ottenuta dalle due equazioni valide nella cinematica per un moto uniformemente accelerato

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + a t & 1.415 &= 0.5093 + a t \\ s &= u_1 t + \frac{1}{2} a t^2 & 2 &= 0.5093 t + 0.5 a t^2 \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{1.415 - 0.5093}{a} = \frac{0.9057}{a} \quad \rightarrow \quad t = \frac{0.9057}{0.4357} = 2.079 \text{ s}$$

$$2 = \frac{0.5093 \times 0.9057}{a} + \frac{0.5 \times 0.9057^2}{a} = \frac{0.8714}{a} \quad \rightarrow \quad a = \frac{0.8714}{2} = 0.4357 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Esercizio 3.1.7

In una tubazione, costituita da un tratta di diametro $D_1 = 20 \text{ cm}$ e da una tratta di diametro $D_2 = 10 \text{ cm}$, scorre una portata volumetrica d'acqua pari a $G_v = 900 \text{ litri/min}$. Calcolare le velocità medie u_1 e u_2 nelle due tratte.

La portata volumetrica in unità fondamentali vale

$$G_v = 900 \frac{\text{litri}}{\text{min}} = 900 \times \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}} = 15.0 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} ;$$

perciò dalla definizione di velocità media (3.5) si ha

$$u_1 = \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 15 \times 10^{-3}}{\pi \times (20 \times 10^{-2})^2} = 4.77 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 15.0 \times 10^{-3}}{\pi \times (10 \times 10^{-2})^2} = 19.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 3.1.8

Nella tubazione dell'esercizio 3.1.7 circola, in condizioni ambiente, la portata massica di aria $G_m = 36 \text{ kg/h}$ che, tra la sezione S_1 e la sezione S_2 , subisce una compressione fino a $p_2 = 4 \text{ bar}$ oppure una espansione fino a $p_2 = 0.8 \text{ bar}$. Calcolare le velocità medie u_1 e u_2 .

Dalla legge della trasformazione adiabatica (1.17), dalla tab. T.2, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ dell'aria in condizioni ambiente ($p_1 = 101325 \text{ Pa}$ e $T_1 = 20^\circ\text{C}$) e dalla tab. T.4, in cui viene letto il valore dell'esponente della trasformazione adiabatica γ , per la compressione e per l'espansione si ha

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} \rho_1 \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \left(\frac{4.0}{1.0} \right)^{1/1.402} \times 1.206 = 3.246 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_2 = \left(\frac{0.8}{1.0} \right)^{1/1.402} \times 1.206 = 1.028 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

La portata massica in unità fondamentali vale

$$G_m = 36 \frac{\text{kg}}{\text{h}} = \frac{36}{3.6 \times 10^3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 10 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido compressibile (3.8) si ha

$$G_{m1} = G_{m2} .$$

Dalla definizione di velocità media (3.5) si ha

$$u_1 = \frac{G_m}{\rho_1 S_1} = \frac{4 G_m}{\rho_1 \pi D_1^2} = \frac{4 \times 10 \times 10^{-3}}{1.206 \times \pi \times (50 \times 10^{-3})^2} = 4.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e quindi, per la compressione e per l'espansione, si ha

$$u_2 = \frac{G_m}{\rho_2 S_2} = \frac{4 G_m}{\rho_2 \pi D_2^2} \quad \rightarrow \quad u_2 = \frac{4 \times 10 \times 10^{-3}}{3.246 \times \pi \times (40 \times 10^{-3})^2} = 2.45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u_2 = \frac{4 \times 10 \times 10^{-3}}{1.028 \times \pi \times (40 \times 10^{-3})^2} = 7.74 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Per un fluido compressibile si ha la certezza che, al diminuire della sezione, la velocità aumenta solo in caso di espansione perché in caso di compressione, se la massa volumica aumenta percentualmente più della diminuzione della sezione, la velocità diminuisce; infatti, se la compressione avesse portato la pressione solo a $p_2 = 1.2 \text{ bar}$, si sarebbe ottenuta una velocità superiore a quella di partenza

$$\rho_2 = \left(\frac{1.2}{1.0}\right)^{1/1.402} \times 1.206 = 1.534 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad , \quad u_2 = \frac{4 \times 10 \times 10^{-3}}{1.534 \times \pi \times (40 \times 10^{-3})^2} = 5.19 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

In realtà il problema dell'espansione non è così semplice, perché subentrano i concetti di "portata specifica massima" e di "pressione critica" ad essa associata; essi vengono affrontati nello studio della gasdinamica e delle turbine a vapore.

Al contrario si ha la certezza che, all'aumentare della sezione, la velocità diminuisce solo in caso di compressione perché in caso di espansione, se la massa volumica diminuisce percentualmente più dell'aumento della sezione, la velocità aumenta.

3.2.- CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Esercizio 3.2.1

La velocità di un fluido considerato incompressibile in un tubo di diametro $D_1 = 20$ cm vale $u_1 = 1$ m/s. Calcolare la velocità u_2 in un ugello di diametro $D_2 = 5$ cm inserito nel tubo.

Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = \frac{S_1}{S_2} u_1 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 u_1 = \left(\frac{20}{5} \right)^2 \times 1 = 16 \times 1 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 3.2.2

Una turbina idraulica viene alimentata da una condotta che trasporta una portata volumetrica d'acqua pari a $G_v = 2$ m³/s alla velocità media $u_1 = 2$ m/s; allo scopo di utilizzare in turbina quanta più energia possibile, si scarica l'acqua ad una velocità media $u_2 = 0.2$ m/s. Calcolare: a) il diametro della condotta D_1 ; b) la sezione di passaggio S_2 .

a) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u S \quad \rightarrow \quad S_1 = \frac{G_v}{u_1} = \frac{2.0}{2.0} = 1.0 \text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad D_1 = \sqrt{\frac{4 S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 1.0}{\pi}} = 1.13 \text{ m} .$$

b) Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad S_2 = \frac{u_1}{u_2} S_1 = \frac{2.0}{0.2} \times 1.0 = 10 \text{ m}^2 .$$

Esercizio 3.2.3

Una tubazione, attraverso cui circola una portata volumetrica di acqua $G_v = 3600$ litri/h, presenta una strozzatura che porta il diametro da $D_1 = 50$ mm a $D_2 = 40$ mm. Calcolare le velocità medie u_1 e u_2 .

La portata volumetrica in unità fondamentali vale

$$G_v = 3600 \frac{\text{litri}}{\text{h}} = \frac{3600}{3600} \frac{\text{litri}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{litri}}{\text{s}} = 1.0 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} ;$$

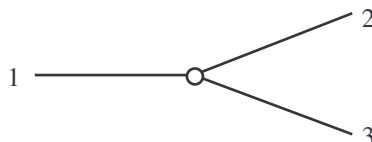
allora dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 1 \times 10^{-3}}{\pi \times (50 \times 10^{-3})^2} = 0.509 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2 &= \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 1 \times 10^{-3}}{\pi \times (40 \times 10^{-3})^2} = 0.796 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \end{aligned}$$

Per un fluido incompressibile si ha la certezza che, al diminuire della sezione, la velocità aumenta e al contrario che, all'aumentare della sezione, la velocità diminuisce.

Esercizio 3.2.4

Nel nodo a tre imbocchi di una rete idrica si sa che dall'imbocco 1 entra (quindi da indicarsi con il segno negativo) una portata volumetrica $G_{v1} = -0.2$ m³/s, mentre dall'imbocco 3 esce (quindi da indicarsi con il segno positivo) una portata $G_{v3} = 0.5$ m³/s. Calcolare la portata che deve passare nell'imbocco 2.



Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.7) si ha

$$G_{v1} + G_{v2} + G_{v3} = 0 \quad \rightarrow \quad G_{v2} = -G_{v1} - G_{v3} = 0.2 - 0.5 = -0.3 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

Poiché il segno è negativo, per l'equilibrio è necessario che dall'imbocco 2 entri una portata volumetrica pari a $G_{v2} = -0.3 \text{ m}^3/\text{s}$. Se si vuole che la velocità rimanga costante nei tre rami, per esempio $u = 2 \text{ m/s}$, i diametri delle tubazioni devono assumere i valori seguenti (a patto di trovarli in commercio)

$$G_{vi} = u_i S_i = u_i \frac{\pi D_i^2}{4} \quad \rightarrow \quad D_i = \sqrt{\frac{4 G_{vi}}{\pi u_i}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} D_1 &= \sqrt{\frac{4 \times 0.2}{\pi \times 2}} = 0.357 \text{ m} \\ D_2 &= \sqrt{\frac{4 \times 0.3}{\pi \times 2}} = 0.437 \text{ m} , \\ D_3 &= \sqrt{\frac{4 \times 0.5}{\pi \times 2}} = 0.564 \text{ m} \end{aligned}$$

mentre se si vuole che i diametri rimangano costanti nei tre rami, per esempio $D = 0.45 \text{ m}$, le velocità medie all'interno delle tubazioni assumono i valori seguenti

$$G_{vi} = u_i S_i = u_i \frac{\pi D_i^2}{4} \quad \rightarrow \quad u_i = \frac{4 G_{vi}}{\pi D_i^2} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{4 \times 0.2}{\pi \times 0.45^2} = 1.26 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2 &= \frac{4 \times 0.3}{\pi \times 0.45^2} = 1.86 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \\ u_3 &= \frac{4 \times 0.5}{\pi \times 0.45^2} = 3.14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Esercizio 3.2.5

Un tubo di diametro $D = 20 \text{ mm}$ si biforca in due rami con diametri rispettivamente $D_1 = 10 \text{ mm}$ e $D_2 = 15 \text{ mm}$. La velocità media nel tratto (1) è $u_{m1} = 0.3 \text{ m/s}$ e quella nel tratto (2) $u_{m2} = 0.6 \text{ m/s}$. Calcolare nel tratto a monte: a) la portata volumetrica G_v ; b) la velocità u .

Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$\begin{aligned} G_{v1} &= u_1 S_1 = u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 0.3 \times \frac{\pi \times (10 \times 10^{-3})^2}{4} = 23.56 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ G_{v2} &= u_2 S_2 = u_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 0.6 \times \frac{\pi \times (15 \times 10^{-3})^2}{4} = 106.0 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{aligned}$$

a) Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.7) si ha

$$-G_v + G_{v1} + G_{v2} = 0 \quad \rightarrow \quad G_v = G_{v1} + G_{v2} = (23.56 + 106.0) \times 10^{-6} = 129.6 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

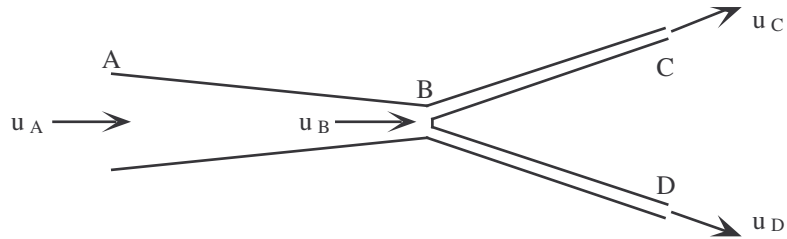
dove il segno negativo è dovuto al fatto che il fluido entra nel sistema e i segni positivi al fatto che il fluido esce dal sistema.

b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u S \quad \rightarrow \quad u = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 129.6 \times 10^{-6}}{\pi \times (20 \times 10^{-3})^2} = 0.413 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 3.2.6

Olio scorre all'interno di una tubazione che si restringe da un diametro $D_A = 450 \text{ mm}$ nel punto A fino a un diametro $D_B = 300 \text{ mm}$ nel punto B, dove di dipartono due rami, il primo dei quali arriva nel punto C con un diametro $D_C = 150 \text{ mm}$ e il secondo arriva nel punto D con un diametro $D_D = 225 \text{ mm}$. La velocità media di entrata nel punto A è $u_A = 1.8 \text{ m/s}$ e quella di uscita nel punto D è $u_D = 3.6 \text{ m/s}$. Calcolare: a) la velocità media u_B nel punto B; b) la velocità media u_C nel punto C.



- a) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_{vA} = u_A S_A = u_A \frac{\pi D_A^2}{4} = 1.8 \times \frac{\pi \times (450 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.2863 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si hanno due modi per ottenere la velocità media u_B

$$G_{vB} = G_{vA} = 0.2863 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \rightarrow \begin{aligned} u_A S_A &= u_B S_B \rightarrow u_B = \frac{S_A}{S_B} u_A = \left(\frac{D_A}{D_B} \right)^2 u_{mA} = \left(\frac{450}{300} \right)^2 \times 1.8 = 4.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ G_{vB} &= u_B S_B \rightarrow u_B = \frac{G_{vB}}{S_B} = \frac{4 G_{vB}}{\pi D_B^2} = \frac{4 \times 0.2863}{\pi \times (300 \times 10^{-3})^2} = 4.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_{vD} = u_D S_D = u_D \frac{\pi D_D^2}{4} = 3.6 \times \frac{\pi \times (225 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.1431 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.7), applicata al nodo B, si ha

$$-G_{vB} + G_{vC} + G_{vD} = 0 \rightarrow G_{vC} = G_{vB} - G_{vD} = 0.2862 - 0.1431 = 0.1431 \frac{\text{m}^3}{\text{s}};$$

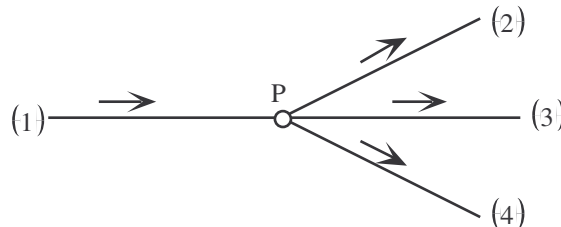
la portata G_{vB} è negativa perché l'olio entra, mentre il segno positivo ottenuto per la portata G_{vC} indica che l'olio esce.

Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_{vC} = u_C S_C = u_C \frac{\pi D_C^2}{4} \rightarrow u_C = \frac{4 G_{vC}}{\pi D_C^2} = \frac{4 \times 0.1431}{\pi \times (150 \times 10^{-3})^2} = 8.10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esercizio 3.2.7

Un fluido scorre nel tubo (1) di diametro $D_1 = 15 \text{ mm}$ con una portata volumetrica $G_{v1} = 15 \text{ litri/s}$. Il tubo nel punto P si riparte in tre tubi aventi i seguenti diametri: $D_2 = D_3 = 25 \text{ mm}$ e $D_4 = 50 \text{ mm}$; la velocità media nel tratto (3) è $u_3 = 4 \text{ m/s}$, mentre la portata nel tratto (2) è il triplo di quella circolante nel tratto (4) ($G_{v2} = 3 G_{v4}$). Calcolare: a) le portate volumetriche G_{v2} , G_{v3} , G_{v4} ; b) le velocità medie u_1 , u_2 , u_4 .



- a) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_{v3} = u_3 S_3 = u_3 \frac{\pi D_3^2}{4} = 4 \times \frac{\pi \times (25 \times 10^{-3})^2}{4} = 1.963 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}};$$

dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.7) si ha

$$\begin{aligned} -G_{v1} + G_{v2} + G_{v3} + G_{v4} &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow G_{v1} &= G_{v2} + G_{v3} + G_{v4} = 3 G_{v4} + G_{v3} + G_{v4} = G_{v3} + 4 G_{v4} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow G_{v4} = \frac{G_{v1} + G_{v3}}{4} = \frac{(15.0 - 1.963) \times 10^{-3}}{4} = 3.259 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} ;$$

dai dati del problema si ha

$$G_{v2} = 3 G_{v4} = 3 \times 3.259 \times 10^{-3} = 9.777 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_{vi} = u_i S_i \quad \rightarrow \quad u_i = \frac{G_{vi}}{S_i} = \frac{4 G_{vi}}{\pi D_i^2} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{4 \times 15 \times 10^{-3}}{\pi \times (100 \times 10^{-3})^2} = 1.91 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2 &= \frac{4 \times 9.777 \times 10^{-3}}{\pi \times (25 \times 10^{-3})^2} = 19.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \\ u_4 &= \frac{4 \times 3.259 \times 10^{-3}}{\pi \times (50 \times 10^{-3})^2} = 1.66 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Esercizio 3.2.8

Aria di massa volumica $\rho_1 = 1.35 \text{ kg/m}^3$ entra in un compressore attraverso un tubo di diametro $D_1 = 4.5 \text{ cm}$ alla velocità media $u_1 = 3.5 \text{ m/s}$ ed esce dal compressore ad una velocità media $u_2 = 2 \text{ m/s}$ attraverso una condotta quadrata di lato $L_2 = 2.2 \text{ cm}$. Calcolare all'uscita: a) la portata massica G_m ; b) la massa volumica ρ_2 .

Dalla legge di conservazione della massa per un fluido compressibile (3.8) si ha

$$G_m = G_{m1} = G_{m2}$$

a) Dalla legge della portata massica (3.2) si ha

$$G_m = G_{m1} = \rho_1 u_1 S_1 = \rho_1 u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 1.35 \times 3.5 \times \frac{\pi \times (4.5 \times 10^{-2})^2}{4} = 2.392 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} .$$

b) Dalla legge della portata massica (3.2) si ha

$$G_m = G_{m2} = \rho_2 u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \frac{G_m}{u_2 S_2} = \frac{G_m}{u_2 L_2^2} = \frac{2.392 \times 10^{-3}}{2 \times (2.2 \times 10^{-2})^2} = 2.47 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

Esercizio 3.2.9

Una portata di aria $G_{v1} = 30 \text{ m}^3/\text{min}$ entra in un compressore in condizioni ambiente e ne esce alla pressione $p_2 = 800 \text{ kPa}$ e alla temperatura $T_2 = 60^\circ \text{C}$. La velocità nella tubazione di distribuzione dell'aria compressa deve avere un valore massimo $u_2 = 20 \text{ m/s}$. Calcolare il diametro D_2 della tubazione.

Dall'equazione di stato (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica R dell'aria, si ha

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{p_1}{R T_1} = \frac{1 \times 10^5}{287 \times (273.15 + 20)} = 1.189 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \rho_2 &= \frac{p_2}{R T_2} = \frac{800 \times 10^3}{287 \times (273.15 + 60)} = 8.367 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} . \end{aligned}$$

La portata volumetrica in unità fondamentali vale

$$G_{v1} = 30 \frac{\text{m}^3}{\text{min}} = \frac{30}{60} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0.50 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} ;$$

allora dalla relazione fra portata massica e portata volumetrica (3.3) si ha

$$G_{m1} = \rho_1 G_{v1} = 1.189 \times 0.50 = 0.5945 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido compressibile (3.8) si ha

$$G_{m1} = G_{m2} \quad \rightarrow \quad G_{m1} = \rho_2 u_2 S_2 = \rho_2 u_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad D_2 = \sqrt{\frac{4 G_{m1}}{\pi \rho_2 u_2}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.5945}{\pi \times 8.371 \times 20}} = 0.0672 \text{ m} \cong 67 \text{ mm} .$$

Esercizio 3.2.10

Attraverso la sezione a monte di una tubazione di diametro $D = 5 \text{ cm}$, in cui vige la pressione $p_1 = 2 \text{ bar}$ e la temperatura $T_1 = 20^\circ \text{C}$, passa azoto alla velocità $u_1 = 6 \text{ m/s}$, mentre attraverso la sezione a valle della stessa tubazione vige la pressione $p_2 = 1.5 \text{ bar}$ e la temperatura $T_2 = 40^\circ \text{C}$. Calcolare: a) la velocità nella sezione a valle u_2 ; b) le portate massiche G_{m1} e G_{m2} ; c) le portate volumetriche G_{v1} e G_{v2} .

Dall'equazione di stato (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica R dell'azoto, nelle due sezioni si ha

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{2 \times 10^5}{297 \times (273.15 + 20)} = 2.297 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} , \quad \rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{1.5 \times 10^5}{297 \times (273.15 + 40)} = 1.613 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

- a) Poiché la sezione del tubo rimane costante

$$S_1 = S_2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times (5 \times 10^{-2})^2}{4} = 1.963 \times 10^{-3} \text{ m}^2 ,$$

dalla legge di conservazione della massa per un fluido compressibile (3.8) si ha

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = 6 \times \frac{2.297}{1.613} = 8.544 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

- b) Dalla legge della portata massica (3.2) si ha

$$G_{m1} = \rho_1 u_1 S_1 = 2.297 \times 6.000 \times 1.963 \times 10^{-3} = 0.0271 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$G_{m2} = \rho_2 u_2 S_2 = 1.613 \times 8.544 \times 1.963 \times 10^{-3} = 0.0271 \frac{\text{kg}}{\text{s}} .$$

- c) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_{v1} = u_1 S_1 = 6.000 \times 1.963 \times 10^{-3} = 11.8 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$G_{v2} = u_2 S_2 = 8.544 \times 1.963 \times 10^{-3} = 16.8 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

Esercizio 3.2.11

Una portata massica d'aria $G_m = 0.1 \text{ kg/s}$, alla pressione $p_1 = 1 \text{ bar}$ e alla temperatura ambiente $T_1 = 20^\circ \text{C}$, entra all'interno di una macchina alla velocità $u_1 = 5 \text{ m/s}$, subisce una trasformazione isoterma che la porta alla pressione $p_2 = 4 \text{ bar}$ ed esce alla stessa velocità $u_2 = 5 \text{ m/s}$. Calcolare: a) il diametro della tubazione di entrata D_1 ; b) il diametro della tubazione di uscita D_2 .

- a) Dall'equazione di stato (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica R dell'aria, si ha

$$\rho = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{1 \times 10^5}{287 \times (273.15 + 20)} = 1.189 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e dalla legge della portata massica (3.2) si ha

$$G_m = \rho u S \quad \rightarrow \quad S_1 = \frac{G_m}{\rho_1 u_1} = \frac{0.1}{1.189 \times 5} = 0.01682 \text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{4 S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.01682}{\pi}} = 0.146 \text{ m} .$$

- b) Dall'equazione della trasformazione isoterma (1.15) si ha

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \frac{p_2}{p_1} \rho_1 = \frac{4}{1} \times 1.189 = 4.756 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido compressibile (3.8) si ha

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad S_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{u_1}{u_2} S_1 = \frac{1.189}{4.756} \times \frac{5}{5} \times 0.01682 = 0.004205 \text{ m}^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad D_2 = \sqrt{\frac{4 S_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.004205}{\pi}} = 0.0732 \text{ m} .$$

A pari velocità, se la massa volumica diventa quattro volte più grande, il diametro della tubazione diventa due volte (radice quadrata di quattro) più piccolo.

Esercizio 3.2.12

L'aria, con gli stessi dati iniziali dell'esercizio 3.2.11, subisce una trasformazione adiabatica. Calcolare il diametro della tubazione di uscita D_2 .

Dall'equazione della trasformazione adiabatica (1.17) e dalla tab. T.4, in cui viene letto il valore dell'esponente della trasformazione adiabatica γ , si ha

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} \rho_1 = \left(\frac{4}{1} \right)^{1/1.402} \times 1.189 = 3.196 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido compressibile (3.8) si ha

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad S_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{u_1}{u_2} S_1 = \frac{1.189}{3.196} \times \frac{5}{5} \times 0.01682 = 0.006258 \text{ m}^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad D_2 = \sqrt{\frac{4 S_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.006258}{\pi}} = 0.0893 \text{ m} .$$

Rispetto alla trasformazione isoterma, quella adiabatica richiede per la tubazione di uscita un diametro maggiore per il fatto che l'aumento della temperatura ottenuto con la (1.19)

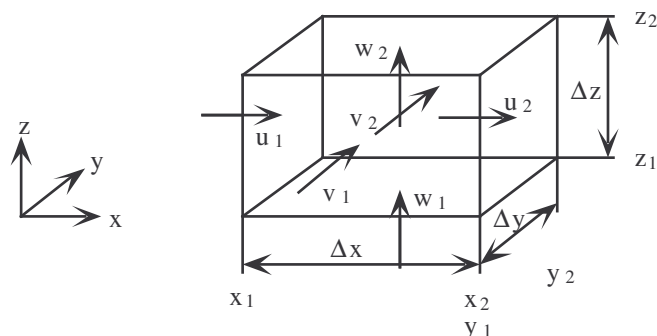
$$T_1 p_1^{(\gamma-1)/\gamma} = T_2 p_2^{(\gamma-1)/\gamma} \quad \rightarrow \quad T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_1 = \left(\frac{4}{1} \right)^{(1.402-1)/1.402} \times (273.15 + 20) = 436 \text{ K}$$

produce un aumento di massa volumica più contenuto (fino a 3.20 kg/m^3 invece che fino a 4.76 kg/m^3). Per questa ragione nella pratica applicativa si effettuano raffreddamenti fra gli stadi successivi di compressione; gli aeriformi infatti durante la compressione seguono una legge vicina a quella adiabatica.

3.3.- EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Esercizio 3.3.1

Integrare l'equazione di continuità di un fluido incompressibile su un campo a forma di parallelepipedo. Questo tipo di operazione è molto frequente nei metodi numerici delle "differenze finite" e dei "volumi di controllo".



L'integrazione dell'equazione di continuità (3.12) sul parallelepipedo rappresentato in figura porta a

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{du}{dx} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dv}{dy} dy \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{dw}{dz} dz = \\ &= (u_2 - u_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) + (v_2 - v_1)(z_2 - z_1)(x_2 - x_1) + (w_2 - w_1)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \\ &= (u_2 - u_1)\Delta y \Delta z + (v_2 - v_1)\Delta z \Delta x + (w_2 - w_1)\Delta x \Delta y = \\ &= (u_2 - u_1)S_x + (v_2 - v_1)S_y + (w_2 - w_1)S_z = \Delta u S_x + \Delta v S_y + \Delta w S_z = 0 \quad (3.3.1.1) \end{aligned}$$

dove S_x , S_y e S_z sono le sezioni normali rispettivamente agli assi x , y e z . Se il flusso è bidimensionale, cioè se $w_1 = w_2 = 0$, la relazione (3.3.1.1) diventa

$$(u_2 - u_1)\Delta y \Delta z + (v_2 - v_1)\Delta z \Delta x = (u_2 - u_1)S_x + (v_2 - v_1)S_y = 0 \quad (3.3.1.2)$$

e infine se il flusso è monodimensionale, cioè se $v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = 0$, diventa

$$(u_2 - u_1)\Delta y \Delta z = (u_2 - u_1)S_x = 0 \quad (3.3.1.3)$$

Nella relazione (3.3.1.3) la sezione S_x proveniente dal parallelepipedo di partenza porta alla conclusione che $u_1 = u_2$. Se invece viene identificata nelle due posizioni x_1 e x_2 con valori generici S_1 e S_2 , la (3.3.1.3) diventa la conservazione della massa per un fluido incompressibile lungo un tubo di flusso (3.9); infatti

$$u_2 S_2 - u_1 S_1 = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 S_1 = u_2 S_2$$

con u_1 e u_2 velocità medie nelle due sezioni.

Esercizio 3.3.2

In un flusso bidimensionale largo $\Delta z = 30$ mm la componente della velocità in x passa da $u_1 = 0.5$ m/s a $u_2 = 0.6$ m/s su una distanza $\Delta x = 8$ mm. Calcolare la variazione della componente della velocità in y su una distanza $\Delta y = 5$ mm.

Dalla relazione (3.3.1.2) si ha

$$\Delta v = (v_2 - v_1) = -(u_2 - u_1) \frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x} = -(u_2 - u_1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = -(0.6 - 0.5) \times \frac{0.005}{0.008} = -0.0625 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La portata volumetrica per unità di lunghezza G_{vE} uscente dal lato 'est'

$$G_{vE} = u_2 \Delta y \Delta z = 0.6 \times 0.005 \times 0.03 = 90 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

è superiore a quella G_{vO} entrante dal lato 'ovest'

$$G_{vO} = u_1 \Delta y \Delta z = 0.5 \times 0.005 \times 0.03 = 75 \times 10^{-6} \frac{m^3}{s} ;$$

questa diminuzione, per soddisfare l'equazione di continuità, deve essere compensata dalla maggiore portata G_{vD} entrante dal lato 'davanti' rispetto a quella G_{vR} uscente dal lato 'retro'

$$G_{vO} - G_{vR} = (v_1 - v_2) \Delta z \Delta x = 0.0625 \times 0.03 \times 0.008 = 15 \times 10^{-6} \frac{m^3}{s} .$$

Attraverso i lati 'sud' e 'nord', dato che $w_1 = w_2 = 0$, le portate volumetriche sono nulle.

Esercizio 3.3.3

Integrare l'equazione di continuità di un fluido compressibile sul campo a forma di parallelepipedo riportato nella figura dell'esercizio 3.3.1. Questo tipo di operazione è molto frequente nei metodi numerici delle "differenze finite" e dei "volumi di controllo".

L'integrazione dell'equazione di continuità (3.10) sul parallelepipedo rappresentato nella figura dell'esercizio 3.3.1, in caso di moto stazionario $\partial \rho / \partial t = 0$, porta a

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dV = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(\rho u)}{dx} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{d(\rho v)}{dy} dy \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{d(\rho w)}{dz} dz = \\ = (\rho_{x2} u_2 - \rho_{x1} u_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) + (\rho_{y2} v_2 - \rho_{y1} v_1)(z_2 - z_1)(x_2 - x_1) + (\rho_{z2} w_2 - \rho_{z1} w_1)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \\ = (\rho_{x2} u_2 - \rho_{x1} u_1) \Delta y \Delta z + (\rho_{y2} v_2 - \rho_{y1} v_1) \Delta z \Delta x + (\rho_{z2} w_2 - \rho_{z1} w_1) \Delta x \Delta y = \\ = (\rho_{x2} u_2 - \rho_{x1} u_1) S_x + (\rho_{y2} v_2 - \rho_{y1} v_1) S_y + (\rho_{z2} w_2 - \rho_{z1} w_1) S_z = 0 \quad (3.3.3.1) \end{aligned}$$

dove ρ_x , ρ_y e ρ_z rappresentano le masse volumiche corrispondenti alle facce del parallelepipedo normali agli assi x, y e z. Se il flusso è bidimensionale, cioè se $w_1 = w_2 = 0$, la relazione (3.3.3.1) diventa

$$(\rho_{x2} u_2 - \rho_{x1} u_1) \Delta y \Delta z + (\rho_{y2} v_2 - \rho_{y1} v_1) \Delta z \Delta x = (\rho_{x2} u_2 - \rho_{x1} u_1) S_x + (\rho_{y2} v_2 - \rho_{y1} v_1) S_y = 0$$

e infine se il flusso è monodimensionale, cioè se $v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = 0$, diventa

$$(\rho_{x2} u_2 - \rho_{x1} u_1) \Delta y \Delta z = (\rho_{x2} u_2 - \rho_{x1} u_1) S_x = 0 \quad (3.3.3.2)$$

dove la massa volumica varia solamente lungo l'asse x.

Con le modalità viste nell'esercizio 3.3.1 la (3.3.3.2) diventa la conservazione della massa per un fluido compressibile lungo un tubo di flusso (3.8)

$$\rho_2 u_2 S_2 - \rho_1 u_1 S_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2$$

con u_1 e u_2 velocità medie nelle due sezioni.

3.4.- DEFORMAZIONI

Esercizio 3.4.1

Determinare le deformazioni assiali della faccia (x,y) del cubo di lato unitario i cui vertici cambiano la loro posizione nel modo seguente

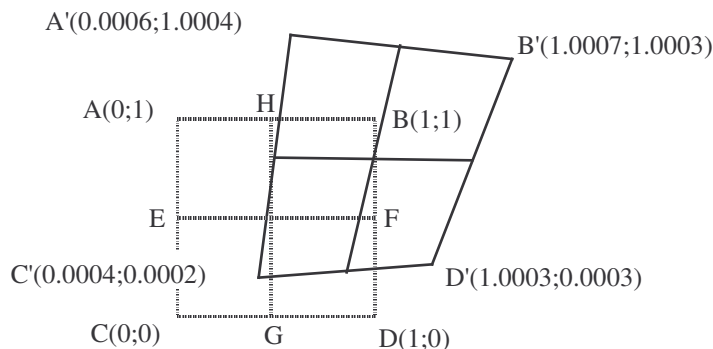
$$A(0; 1) \rightarrow A'(0.0006; 1.0004)$$

$$B(1; 1) \rightarrow B'(1.0007; 1.0003)$$

$$C(0; 0) \rightarrow C'(0.0004; 0.0002)$$

$$D(1; 0) \rightarrow D'(1.0003; 0.0003)$$

con spostamenti piccoli rispetto alla lunghezza del lato, ma esagerati nella figura.



Le componenti degli spostamenti dei vertici assumono i valori

$$A (\xi_A = 0.0006; \eta_A = 0.0004)$$

$$B (\xi_B = 0.0007; \eta_B = 0.0003)$$

$$C (\xi_C = 0.0004; \eta_C = 0.0002)$$

$$D (\xi_D = 0.0003; \eta_D = 0.0003)$$

mentre le componenti degli spostamenti dei punti intermedi assumono i valori

$$E (\xi_E = \frac{\xi_C + \xi_A}{2} = \frac{0.0004 + 0.0006}{2} = 0.0005 ; \eta_E = \frac{\eta_C + \eta_A}{2} = \frac{0.0002 + 0.0004}{2} = 0.0003)$$

$$F (\xi_F = \frac{\xi_D + \xi_B}{2} = \frac{0.0003 + 0.0007}{2} = 0.0005 ; \eta_F = \frac{\eta_D + \eta_B}{2} = \frac{0.0003 + 0.0003}{2} = 0.0003)$$

$$G (\xi_G = \frac{\xi_C + \xi_D}{2} = \frac{0.0004 + 0.0003}{2} = 0.00035 ; \eta_G = \frac{\eta_C + \eta_D}{2} = \frac{0.0002 + 0.0003}{2} = 0.00025)$$

$$H (\xi_H = \frac{\xi_A + \xi_B}{2} = \frac{0.0006 + 0.0007}{2} = 0.00065 ; \eta_H = \frac{\eta_A + \eta_B}{2} = \frac{0.0004 + 0.0003}{2} = 0.00035)$$

Di conseguenza il valore medio della deformazione assiale in x, che corrisponde all'allungamento in x del segmento EF posizionato lungo la x sulla mezzieria della faccia, è ottenuto dalla relazione (3.14)

$$\epsilon_{xx} = \left| \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \right|_{EF} = \frac{\xi_F - \xi_E}{\Delta x} = \frac{0.0005 - 0.0005}{1} = 0$$

e il valore medio della deformazione assiale in y, che corrisponde all'allungamento in y del segmento GH posizionato lungo la y sulla mezzieria della faccia, è ottenuto dalla relazione (3.14)

$$\epsilon_{yy} = \left| \frac{\Delta \eta}{\Delta y} \right|_{GH} = \frac{\eta_F - \eta_E}{\Delta y} = \frac{0.00035 - 0.00025}{1} = 0.0001$$

La variazione di superficie è invece ottenuta dalla relazione (3.15)

$$e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = 0 + 0.0001 = 0.0001$$

Esercizio 3.4.2

Determinare la deformazione angolare della faccia (x,y) del cubo riportato nella figura dell'esercizio 3.4.1.

Utilizzando le componenti degli spostamenti dei punti intermedi ricavati nell'esercizio 3.4.1, il valore medio della deformazione angolare è ottenuto dalla relazione (3.14)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &\cong \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\Delta \xi}{\Delta y} \right|_{GH} + \left| \frac{\Delta \eta}{\Delta x} \right|_{EF} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_H - \xi_G}{\Delta y} + \frac{\eta_F - \eta_E}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{0.00065 - 0.00035}{1} + \frac{0.0003 - 0.0003}{1} \right) = \frac{1}{2} \times (0.0003 + 0) = 0.00015 .\end{aligned}$$

Se gli spostamenti fossero confrontabili con le dimensioni della faccia del cubo, per esempio 5000 volte più grandi, si sarebbe ottenuto

$$\varepsilon_{xy} \cong \frac{1}{2} \times \left(\frac{1.5}{1} + \frac{0}{1} \right) = 0.750 ;$$

in realtà, però, il vero valore medio della deformazione tangenziale è dato da

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\arctg \left(\frac{\xi_H - \xi_G}{1 + \eta_H - \eta_G} \right) + \arctg \left(\frac{\eta_H - \eta_G}{1 + \xi_H - \xi_G} \right) \right] = \frac{1}{2} \times \left[\arctg \left(\frac{1.5}{1 + 0.5} \right) + \arctg \left(\frac{0}{1 + 0} \right) \right] = 0.393$$

e l'errore percentuale che si compirebbe usando la semplificazione per piccole deformazioni sarebbe

$$\frac{0.393 - 0.750}{0.393} = -0.908 = -90.8 \% .$$

Esercizio 3.4.3

Determinare le velocità di deformazione della faccia (x,y) del cubo riportato nella figura dell'esercizio 3.4.1 sapendo che gli spostamenti dei vertici avvengono in un tempo pari a $\Delta t = 0.001$ s.

Le componenti della velocità nei vertici della faccia del cubo diventano

$$A (u_A = 0.6; v_A = 0.4)$$

$$B (u_B = 0.7; v_B = 0.3)$$

$$C (u_C = 0.4; v_C = 0.2)$$

$$D (u_D = 0.3; v_D = 0.3)$$

e le componenti della velocità nei punti intermedi diventano

$$E (u_E = 0.5; v_E = 0.3)$$

$$F (u_F = 0.5; v_F = 0.3)$$

$$G (u_G = 0.35; v_G = 0.25)$$

$$H (u_H = 0.65; v_H = 0.35)$$

per cui le velocità di deformazione assiale, riferendo i valori medi ai segmenti EF e GH (vedi figura dell'esercizio 3.5) che si trovano sulla mezzeria della faccia, sono ottenute dalla relazione (3.16)

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{xx} &= \left| \frac{\Delta u}{\Delta x} \right|_{EF} = \frac{u_F - u_E}{\Delta x} = \frac{0.5 - 0.5}{1} = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= \left| \frac{\Delta v}{\Delta y} \right|_{GH} = \frac{v_H - v_G}{\Delta y} = \frac{0.35 - 0.25}{1} = 0.1 ,\end{aligned}$$

la velocità di deformazione angolare è ottenuta dalla relazione (3.16)

$$\dot{\varepsilon}_{xy} \cong \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|_{GH} + \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right|_{EF} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_H - u_G}{\Delta y} + \frac{v_F - v_E}{\Delta x} \right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{0.65 - 0.35}{1} + \frac{0.3 - 0.3}{1} \right) = \frac{1}{2} \times (0.3 + 0) = 0.15$$

e la velocità di deformazione della superficie è ottenuta dalla relazione (3.17)

$$\dot{e} = \dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} = 0 + 0.1 = 0.1 .$$

Più semplicemente queste quantità possono essere ricavate come rapporto fra la deformazione stessa e il tempo trascorso affinché essa si verifichi

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\varepsilon_{xx}}{\Delta t} = \frac{0}{0.001} = 0 , & \dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\varepsilon_{yy}}{\Delta t} = \frac{0.0001}{0.001} = 0.1 , & \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{\varepsilon_{xy}}{\Delta t} = \frac{0.00015}{0.001} = 0.15 \\ \dot{e} &= \frac{e}{\Delta t} = \frac{0.0001}{0.001} = 0.1 .\end{aligned}$$

3.5.- VORTICITÀ

Esercizio 3.5.1

Determinare la vorticità dovuta ad una corrente fluida costituita da un moto con una velocità uniforme, concorde all'asse x, pari a $U = 3 \text{ m/s}$.

Nel caso in esame le componenti della velocità sono costanti ($v = w = 0$ e $u = U = 3 \text{ m/s}$) e le loro derivate spaziali diventano tutte nulle; di conseguenza diventano identicamente nulli il rotore del vettore velocità e le componenti del vettore vorticità $\vec{\omega}$ (3.19); il moto esaminato è quindi "irrotazionale".

Esercizio 3.5.2

Determinare la vorticità dovuta ad una corrente fluida costituita da una sorgente e da un pozzo puntiformi sul piano (r, ϑ) con portata volumetrica pari a $G_v = 6\pi \text{ m}^3/\text{s}$.

Una sorgente puntiforme è un modello matematico che simula l'immissione di fluido in direzione radiale con portata volumetrica costante, mentre invece un pozzo lo assorbe; le loro velocità radiali sono quindi date da

$$u_{\text{sorgente}} = \frac{G_v}{2\pi r Z} \quad u_{\text{pozzo}} = -\frac{G_v}{2\pi r Z}$$

(per la sorgente concorde con la r e per il pozzo discorde con la r), mentre quelle circonferenziale e assiale sono nulle. Il punto in cui la sorgente o il pozzo è situato costituisce una singolarità, perché al tendere di r a zero la velocità radiale u tende all'infinito.

Nel caso in esame v e w sono nulle e u è funzione della sola r e perciò le derivate spaziali che interessano la determinazione del rotore sono tutte nulle; di conseguenza diventano identicamente nulli il rotore del vettore velocità e le componenti del vettore vorticità $\vec{\omega}$ (3.19). Il moto esaminato è quindi "irrotazionale".

Esercizio 3.5.3

Determinare la vorticità dovuta ad una corrente fluida costituita da un moto rotatorio sul piano (r, ϑ) con una velocità tale che risulti $v \cdot r = C = 3 \text{ m}^2/\text{s}$ in ogni punto a distanza r dall'asse.

Il moto descritto viene anche chiamato vortice potenziale o filetto vorticoso ed è un modello matematico che simula il moto di corpo rigido di ogni particella di fluido attorno ad un asse.

Nel caso in esame u e w sono nulle e il prodotto $v \cdot r$ è costante e perciò le derivate spaziali che interessano la determinazione del rotore sono tutte nulle; di conseguenza diventano identicamente nulli il rotore del vettore velocità e le componenti del vettore vorticità $\vec{\omega}$ (3.19). Il moto esaminato è quindi "irrotazionale".

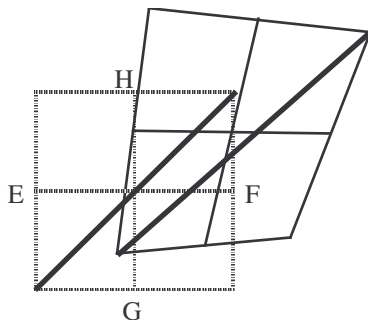
Esercizio 3.5.4

Determinare la vorticità della faccia (x,y) del cubo riportato nella figura dell'esercizio 3.4.1 in base alle velocità di deformazione calcolate nell'esercizio 3.4.3.

Dalla definizione di vorticità (3.19) si può scrivere

$$\omega_z \cong \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right|_{\text{EF}} - \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|_{\text{GH}} \right) = \frac{1}{2} \times (0 - 0.3) = -0.15 \frac{1}{\text{s}}$$

e dalla figura si nota che la bisettrice della faccia ruota in senso orario, negativo rispetto alla convenzione dei segni usata.



La vorticità è un valore puntuale, anche se in questo esercizio si è trovato il suo valore medio sulla faccia (x,y) del cubo e lo si è riferito al baricentro intersezione dei due segmenti EF e GH.